

百强学校题集

——函数

低头是题海
抬头是前途

信手拈来的从容，都是厚积薄发的沉淀

R E A D A B O O K



百强学校

函数

练1 (★★★☆☆) (2020届浙江省之江教育评价联盟高三第二次联考)

设函数 $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 1, & x \geq 1 \\ \log_2(1-x), & x < 1 \end{cases}$, 则 $f[f(4)] = (\quad)$

A. 2

B. 3

C. 5

D. 6

练2 (★★★☆☆) (2020届山东省枣庄、滕州市高三上期末)

函数 $y = f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^x$, 则当 $x > 0$ 时, $f(x) = (\quad)$

A. -2^x

B. 2^{-x}

C. -2^{-x}

D. 2^x

练3 (★★★☆☆) (2020届山东省泰安市高三上期末)

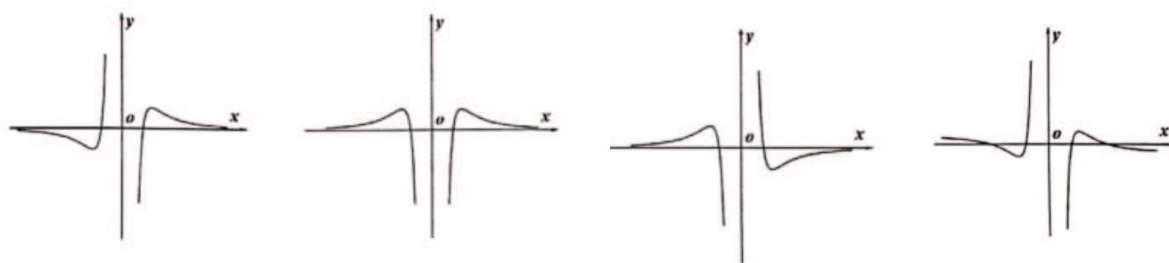
函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^3}$ 的部分图象是 ()

A.

B.

C.

D.



练4 (★★★☆☆) (2021年苏州开学初调研)

大西洋鲑鱼每年都要逆流而上,游回到自己出生的淡水流域产卵,记鲑鱼的游速为 v (单位: m/s), 鲑鱼的耗氧量的单位数为 Q . 科学研究发现 v 与 $\log_3 \frac{Q}{100}$ 成正比, 当 $v = 1m/s$ 时, 鲑鱼的耗氧量的单位数为900. 当 $v = 2m/s$ 时, 其耗氧量的单位数为 ()

- A. 1800 B. 2700 C. 7290 D. 8100

练5 (★★★☆☆) (2021年南京六校联考)

设 $a = \log_4 9$, $b = 2^{-1.2}$, $c = \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $c > a > b$

练6 (★★★☆☆) (2021年南京六校联考)

已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(1+x) = f(1-x)$. 若当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = \log_2(2x+3)$, 则 $f\left(\frac{39}{2}\right)$ 的值是 ()

- A. -3 B. -2 C. 2 D. 3

练7 (★★★☆☆) (2020届山东省枣庄、滕州市高三上期末)

已知 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ f(2-x) + k, & x < 1 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - 1$ 恰有一个零点, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, 1]$

练8 (★★★☆☆) (2020届山东实验中学高三上期中)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq 0 \\ |\log_2 x|, & x > 0 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = a$ 有四个不同的解 x_1, x_2, x_3, x_4 , $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则

$x_3 \cdot (x_1 + x_2) + \frac{1}{x_3^2 \cdot x_4}$ 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 1]$ B. $[-1, 1]$ C. $[-1, 1)$ D. $(-1, 1)$

练9 (★★★☆☆) (2020届山东省枣庄市高三上学期统考) (多选)

下列函数既是偶函数, 又在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减的是 ()

- A. $y = 2^{|x|}$ B. $y = x^{-\frac{2}{3}}$ C. $y = \frac{1}{x} - x$ D. $y = \ln(x^2 + 1)$

练10 (★★★☆☆) (2021年南京六校联考) (多选)

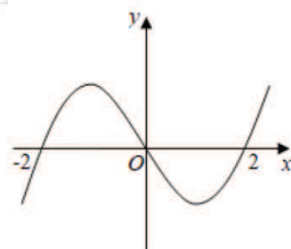
记函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域的交集为 I . 若存在 $x_0 \in I$, 使得对任意 $x \in I$, 不等式 $[f(x) - g(x)](x - x_0) \geq 0$ 恒成立, 则称 $(f(x), g(x))$ 构成“M函数对”. 下列所给的两个函数能构成“M函数对”的有 ()

- A. $f(x) = \ln x, g(x) = \frac{1}{x}$ B. $f(x) = e^x, g(x) = ex$
C. $f(x) = x^3, g(x) = x^2$ D. $f(x) = x + \frac{1}{x}, g(x) = 3\sqrt{x}$

练11 (★★★☆☆) (2020届山东师范大学附中高三月考) (多选)

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ 且导函数为 $f'(x)$, 如图是函数 $y = xf'(x)$ 的图象, 则下列说法正确的是 ()

- A. 函数的增区间是 $(-2, 0), (2, +\infty)$
B. 函数的增区间是 $(-\infty, -2), (2, +\infty)$
C. $x = -2$ 是函数的极小值点
D. $x = 2$ 是函数的极小值点



练12 (★★★☆☆) (2021年金陵中学开学调研) (多选)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \geq 0 \\ -e^{-x} + 1, & x < 0 \end{cases}$, 方程 $|f(x) - 1| = 2 - m$ ($m \in \mathbb{R}$), 则下列判断正确的是 ()

- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{3}{2}$ 对称 B. 函数 $f(x)$ 在区间 $(3, +\infty)$ 上单调递增
C. 当 $m \in (1, 2)$ 时, 方程有2个不同的实数根 D. 当 $m \in (-1, 0)$ 时, 方程有3个不同的实数根

练13 (★★★☆☆) (江苏省如皋市2019-2020学年高三上学期10月调研)

已知 $a \in \mathbb{R}$, 设函数 $f(x) = ax - \ln x$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 l , 则 l 在 y 轴上的截距为_____.

练14 (★★★☆☆) (2020届山东省潍坊市高三上期中)

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上是减函数, $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$, 则不等式 $f\left(\log_{\frac{1}{8}} x\right) > 0$ 的解集为 _____.

练15 (★★★☆☆) (2020届山东师范大学附中高三月考)

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 有 $[f(x_1) - f(x_2)](x_1 - x_2) < 0$ 恒成立, 若 $f(3x + 1) + f(2) > 0$, 则 x 的取值范围是 _____.

练16 (★★★☆☆) (2020·山东省淄博实验中学高三上期末)

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0 \\ x + \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}.$$

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的最小值是 _____;

(2) 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 则 a 的取值范围是 _____.

练17 (★★★☆☆) (2020届山东省潍坊市高三上期中)

$$\text{已知函数 } f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax + 1.$$

(1) 当 $a = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处有极小值, 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$ 上的最大值.

练18 (★★★☆☆) (2020届江苏省南通市海门中学高三上学期10月检测)

$$\text{已知函数 } f(x) = \begin{cases} m\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2, & x > 0 \\ 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + n, & x < 0 \end{cases} \text{ 是奇函数.}$$

(1) 求实数 m, n 的值;

(2) 若对任意实数 x , 都有 $f(e^{2x}) + \lambda f(e^x) \geq 0$ 成立. 求实数 λ 的取值范围.

练19 (★★★☆☆) (2020届山东省潍坊市高三上期中)

在经济学中, 函数 $f(x)$ 的边际函数 $Mf(x)$ 定义为 $Mf(x) = f(x+1) - f(x)$. 某医疗设备公司生产某医疗器材, 已知每月生产 x 台 ($x \in \mathbf{N}^*$) 的收益函数为 $R(x) = 3000x - 20x^2$ (单位: 万元), 成本函数 $C(x) = 500x + 4000$ (单位: 万元), 该公司每月最多生产 100 台该医疗器材. (利润函数=收益函数-成本函数)

- (1) 求利润函数 $P(x)$ 及边际利润函数 $MP(x)$;
- (2) 此公司每月生产多少台该医疗器材时每台的平均利润最大, 最大值为多少? (精确到 0.1)
- (3) 求 x 为何值时利润函数 $P(x)$ 取得最大值, 并解释边际利润函数 $MP(x)$ 的实际意义.

练20 (★★★☆☆) (2019年北京高三月考)

设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1 \\ 4(x-a)(x-2a), & x \geq 1 \end{cases}$.

- (1) 若 $a = 1$, 则 $f(x)$ 的最小值为 _____;
- (2) 若 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

练21 (★★★☆☆) (2020·山东省淄博实验中学高三上期末)

设函数 $f(x) = \ln(1+ax) + bx$, $g(x) = f(x) - bx^2$.

- ①若 $a = 1$, $b = -1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
 - ②若曲线 $y = g(x)$ 在点 $(1, \ln 3)$ 处的切线与直线 $11x - 3y = 0$ 平行.
- (1) 求 a , b 的值;
 - (2) 求实数 k ($k \leq 3$) 的取值范围, 使得 $g(x) > k(x^2 - x)$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

练22 (★★★☆☆) (江苏省南通市通州区2019-2020学年高三第一次调研抽测)

已知函数 $f(x) = x^2 + (a+1)x - a$, $g(x) = x - b \ln x$ ($a, b \in \mathbf{R}$).

- (1) 当 $b = 2$ 时, 求函数 $g(x)$ 的单调区间;
- (2) 设函数 $h(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 1 \\ g(x), & x > 1 \end{cases}$, 若 $a + b = 0$, 且 $h(x) \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 求 b 的取值范围;
- (3) 设函数 $u(x) = f(x) - g(x) + a$, 若 $a + b \geq -2$, 且 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在零点, 求 b 的取值范围.

参考答案 函数

练1

答案: C

解答: $\because$ 函数 $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 1, & x \geq 1 \\ \log_2(1-x), & x < 1 \end{cases}$

$$\therefore f(4) = -2 \times 4^2 + 1 = -31$$

$$f[f(4)] = f(-31) = \log_2(1+31) = 5$$

故选: C.

练2

答案: C

解答: $\because x < 0$ 时, $f(x) = 2^x$. 当 $x > 0$ 时, $-x < 0$, $f(-x) = 2^{-x}$

由于函数 $y = f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(x) = -f(-x) = -2^{-x}$

因此, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = -2^{-x}$

故选: C.

练3

答案: A

解答: $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^3}$, $f(-x) = \frac{\ln|x|}{-x^3} = -f(x)$, $f(x)$ 为奇函数, 排除B

当 $x > 1$ 时, $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^3} > 0$ 恒成立, 排除CD

故选: A.

练4

答案: D

解答: 设 $v = k \log_3 \frac{Q}{100}$, 则 $1 = k \log_3 \frac{900}{100}$, 解得 $k = \frac{1}{2}$

所以 $v = \frac{1}{2} \log_3 \frac{Q}{100}$, 解得 $Q = 8100$

故选: D.

练5

答案: C

解答: $\because 9 > 8$, $\therefore 3 > 2^{\frac{3}{2}}$, 故 $\log_2 3 > \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

从而有 $a = \log_4 9 = \log_2 3 > \frac{3}{2} = c > 1 > 2^{-1.2} = b$

故选: C.

练6

答案: B

解答: 根据奇函数 $f(x)$, 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 可知函数的周期为 4

$$\therefore f\left(\frac{93}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2} + 48\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\log_2 4 = -2$$

故选: B.

练7

答案: B

解答: $x \geq 1$ 时, $f(x) = \ln x = 1, x = e$

所以函数 $y = f(x) - 1$ 在 $x \geq 1$ 时有一个零点

从而在 $x < 1$ 时无零点, 即 $f(x) = 1$ 无解

而当 $x < 1$ 时, $2 - x > 1, f(x) = f(2 - x) + k = \ln(2 - x) + k$

它是减函数, 值域为 $(k, +\infty)$, 要使 $f(x) = 1$ 无解, 则 $k \geq 1$

故选: B.

练8

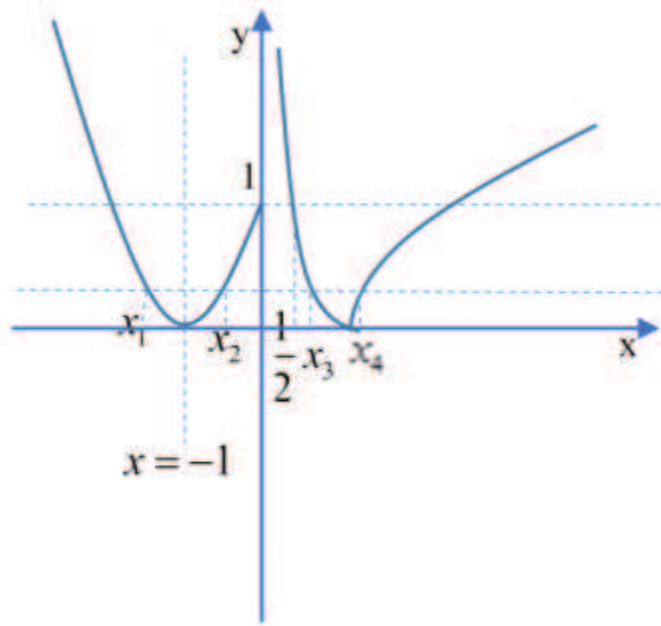
答案: A

解答: 先作 $f(x)$ 图象, 由图象可得 $x_1 + x_2 = -2, x_3 x_4 = 1, x_3 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$

因此 $x_3 \cdot (x_1 + x_2) + \frac{1}{x_3^2 \cdot x_4} = -2x_3 + \frac{1}{x_3}$ 为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ 单调递减函数

从而 $x_3 \cdot (x_1 + x_2) + \frac{1}{x_3^2 \cdot x_4} \in (-1, 1]$

故选: A.



练9

答案: AD

解答: 对于A选项, $y = 2^{|x|}$ 为偶函数, 且当 $x < 0$ 时, $y = 2^{-x} = \frac{1}{2^x}$ 为减函数, 符合题意

对于B选项, $y = x^{-\frac{2}{3}}$ 为偶函数, 根据幂函数单调性可知 $y = x^{-\frac{2}{3}}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递增, 不符合题意

对于C选项, $y = \frac{1}{x} - x$ 为奇函数, 不符合题意

对于D选项, $y = \ln(x^2 + 1)$ 为偶函数, 根据复合函数单调性同增异减可知

$y = \ln(x^2 + 1)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 符合题意

故选: AD.

练10

答案: AC

解答: 选项B满足 $f(x) \geq g(x)$, 故不成立

选项D, $F(x) = f(x) - g(x)$ 存在两个非零的零点, 故不成立

故选: AC.

练11

答案: BD

解答: 根据题意, 由函数 $y = xf'(x)$ 的图象可知

当时 $x < -2$, $xf'(x) < 0$, $f'(x) > 0$, 此时为增函数

当时 $-2 < x < 0$, $xf'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, 此时为减函数

当时 $0 < x < 2$, $xf'(x) < 0$, $f'(x) < 0$, 此时为减函数

当时 $x > 2$, $xf'(x) > 0$, $f'(x) > 0$, 此时为增函数

据此分析选项: 函数 $f(x)$ 的增区间是 $(-\infty, -2)$, $(2, +\infty)$, 则B正确, A错误

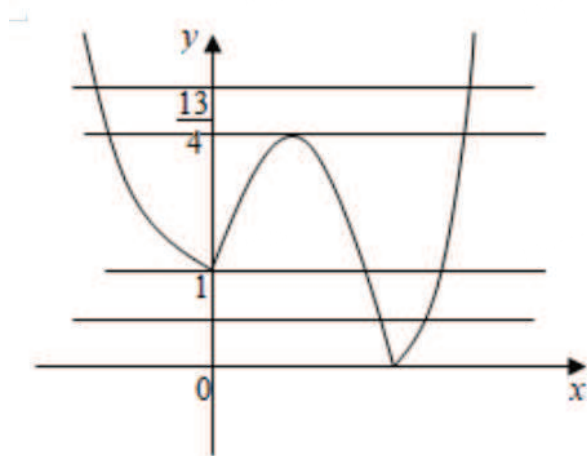
$x = -2$ 是函数的极大值点, $x = 2$ 是函数的极小值点, 则D正确, C错误

故选: BD.

练12

答案: BC

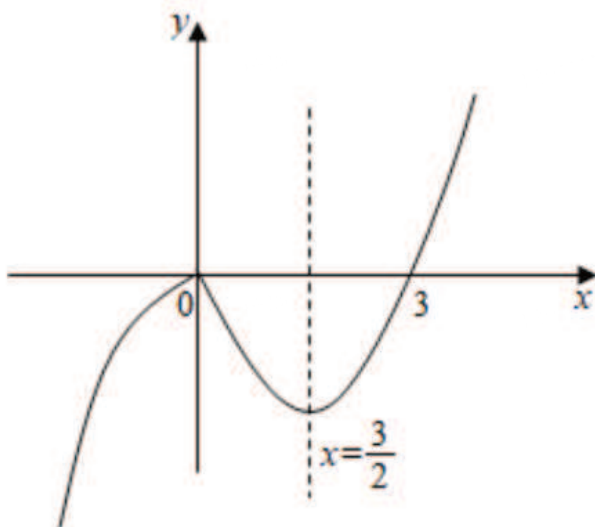
解答: 函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示



显然函数 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x = \frac{3}{2}$ 对称, 故选项A错误

由有图象可知函数 $f(x)$ 在区间 $(3, +\infty)$ 上单调递增, 故选项B正确

函数 $y = |f(x) - 1|$ 的大致图象如图所示



当 $m \in (1, 2)$ 时, $0 < 2 - m < 1$, 此时函数 $y = 2 - m$ 与函数 $y = |f(x) - 1|$ 的图象有2个交点

∴方程 $|f(x) - 1| = 2 - m$ 有 2 个不同的实数根，故选项 C 正确

当 $m \in (-1, 0)$ 时， $2 < 2 - m < 3$ ，此时函数 $y = 2 - m$ 与函数 $y = |f(x) - 1|$ 的图象有 4 个交点

∴方程 $|f(x) - 1| = 2 - m$ 有 4 个不同的实数根，故选项 D 错误

故选：BC.

练 13

答案：1

解答：函数 $f(x) = ax - \ln x$ ，可得 $f'(x) = a - \frac{1}{x}$ ，切线的斜率为： $k = f'(1) = a - 1$

切点坐标 $(1, a)$ ，切线方程 l 为： $y - a = (a - 1)(x - 1)$

l 在 y 轴上的截距为： $a + (a - 1)(-1) = 1$

故答案为：1.

练 14

答案： $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

解答：∵ $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $[0, +\infty)$ 上是减函数， $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

则不等式 $f\left(\log_{\frac{1}{8}} x\right) > 0$ 等价于不等式 $f\left(\left|\log_{\frac{1}{8}} x\right|\right) > f\left(\frac{1}{3}\right)$

$$\text{即 } \left|\log_{\frac{1}{8}} x\right| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{8}} x < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 2$$

即不等式的解集为 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

故答案为： $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

练 15

答案： $(-\infty, -1)$

解答：根据已知条件：当 $x_1 \neq x_2$ 时，有 $[f(x_1) - f(x_2)](x_1 - x_2) < 0$ 恒成立

得函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数，又因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数

所以 $-f(2) = f(-2)$ ，故 $f(3x + 1) + f(2) > 0$ 等价于 $f(3x + 1) > -f(2) = f(-2)$

所以 $3x + 1 < -2$ ，即 $x < -1$

故答案为： $(-\infty, -1)$.

练16

答案: $\frac{1}{4}; [0, \sqrt{2}]$

解答: (1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号

则函数的最小值为 $\frac{1}{4}$

(2) 由 (1) 知, 当 $x > 0$ 时, 函数 $f(x) \geq 2$, 此时的最小值为 2

若 $a < 0$, 则当 $x = a$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(a) = 0$, 此时 $f(0)$ 不是最小值, 不满足条件

若 $a \geq 0$, 则当 $x \leq 0$ 时, 函数 $f(x) = (x - a)^2$ 为减函数

则当 $x \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(0) = a^2$

要使 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 则 $f(0) = a^2 \leq 2$, 即 $0 \leq a \leq \sqrt{2}$

即实数 a 的取值范围是 $[0, \sqrt{2}]$

故答案为: $\frac{1}{4}; [0, \sqrt{2}]$.

练17

解答: (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - x + 2$

所以 $f'(0) = 2$, 又 $f(0) = 1$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处切线方程为 $y - 1 = 2x$, 即 $2x - y + 1 = 0$

(2) 因为 $f'(x) = 3x^2 - x + a$, 因为函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处有极小值

所以 $f'(1) = 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2$, 所以 $f'(x) = 3x^2 - x - 2$

由 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\frac{2}{3}$ 或 $x = 1$

当 $x < -\frac{2}{3}$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $-\frac{2}{3} < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 上是增函数, 在 $\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$ 上是减函数

因为 $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{49}{27}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$, 所以 $f(x)$ 的最大值为 $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{49}{27}$

练18

解答: (1) 当 $x > 0$ 时, $f(-x) = 2\left[(-x) + \frac{1}{(-x)}\right] + n$

因为 $f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x)$

$\therefore f(-x) = 2\left[(-x) + \frac{1}{(-x)}\right] + n = -\left[m\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\right]$

即 $(m-2)\left(x + \frac{1}{x}\right) + (n-2) = 0$ 总成立, $\therefore \begin{cases} m-2=0 \\ n-2=0 \end{cases}$, $\therefore \begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases}$

又当 $x < 0$ 时, 同理可得 $\begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases}$, 综上 $\begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases}$

(2) $\because e^{2x} > 0, e^x > 0$, 原不等式化为 $2\left(e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}}\right) - 2 + 2\lambda\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) - 2\lambda \geq 0$

令 $t = e^x + \frac{1}{e^x}$, 则 $t \geq 2$, 原不等式进一步化为 $t^2 + \lambda t - \lambda - 3 \geq 0$ 在 $t \geq 2$ 上恒成立

记 $g(t) = t^2 + \lambda t - \lambda - 3, t \in [2, +\infty)$

① 当 $-\frac{\lambda}{2} \leq 2$ 时, 即 $\lambda \geq -4$ 时, $g(t)_{\min} = g(2) = \lambda + 1 \geq 0, \therefore \lambda \geq -1$ 合理

② 当 $-\frac{\lambda}{2} > 2$ 时, 即 $\lambda < -4$ 时, $g(t)_{\min} = g\left(-\frac{\lambda}{2}\right) = -\frac{\lambda^2}{4} - \lambda - 3 \geq 0$, 显然矛盾

综上实数 λ 的取值范围为: $\lambda \geq -1$

练19

解答: (1) 由题意知: $x \in [1, 100]$ 且 $x \in \mathbf{N}^*$

$$P(x) = R(x) - C(x) = 3000x - 20x^2 - (500x + 4000) = -20x^2 + 2500x - 4000$$

$$MP(x) = P(x+1) - P(x) = -20(x+1)^2 + 2500(x+1) - 4000$$

$$- (20x^2 + 2500x - 4000) = 2480 - 40x$$

$$(2) \text{ 每台医疗器材的平均利润 } \frac{P(x)}{x} = -\left(20x + \frac{4000}{x}\right) + 2500 \leq -400\sqrt{2} + 2500$$

当且仅当 $x = 10\sqrt{2}$ 时等号成立

因为 $x \in \mathbf{N}^*$, 当每月生产14台机器时, 每台平均约为1934.3万元, 每月生产15台时, 每台平均约为1933.3万元

故每月生产14台时, 每台医疗器材的平均利润最大为1934.3万元

$$(3) P(x) = -20x^2 + 2500x - 4000 = -20(x - 62.5)^2 + 74125$$

由 $MP(x) = 2480 - 40x \geq 0$, 得 $x \leq 62$, 此时 $P(x)$ 随 x 增大而增大

由 $MP(x) = 2480 - 40x \leq 0$ 得 $x \geq 62$, 此时 $P(x)$ 随 x 增大而减小

$\therefore x = 62$ 或 63 时, $P(x)$ 取得最大值

$MP(x)$ 反映了产量与利润增量的关系, 从第二台开始, 每多生产一台医疗器材利润增量在减少

练20

答案: $-1; \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup [2, +\infty)$

解答: (1) $a = 1$ 时, $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1 \\ 4(x-a)(x-2a), & x \geq 1 \end{cases}$

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上为增函数且 $f(x) > -1$, 函数 $f(x)$ 在 $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ 为减函数, 在 $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 为增函数

当 $x = \frac{3}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最小值为 -1

(2) ① 若函数 $g(x) = 2^x - a$ 在 $x < 1$ 时与 x 轴有一个交点, 则 $a > 0$, $g(1) = 2 - a > 0$, 则 $0 < a < 2$

函数 $h(x) = 4(x-a)(x-2a)$ 与 x 轴有一个交点, 所以 $2a \geq 1a < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq a < 1$

②若函数 $g(x) = 2^x - a$ 与 x 轴有无交点, 则函数 $h(x) = 4(x-a)(x-2a)$ 与 x 轴有两个交点

当 $a \leq 0$ 时 $g(x)$ 与 x 轴有无交点, $h(x) = 4(x-a)(x-2a)$ 在 $x \geq 1$ 与 x 轴有无交点, 不合题意

当 $a \geq 2$ 时 $g(x)$ 与 x 轴有无交点, $h(x)$ 与 x 轴有两个交点, $x = a$ 和 $x = 2a$

由于 $a \geq 2$, 两交点横坐标均满足 $x \geq 1$

综上所述 a 的取值范围 $\frac{1}{2} \leq a < 1$ 或 $a \geq 2$

故答案为: $-1; \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup [2, +\infty)$.

练21

解答: (1) 当 $a = 1, b = -1$ 时, $f(x) = \ln(1+x) - x (x > -1)$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

当 $f'(x) > 0$ 时, $-1 < x < 0$; 当 $f'(x) < 0$ 时, $x > 0$

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-1, 0)$, 单调减区间为 $(0, +\infty)$

(2) ①因为 $g(x) = f(x) - bx^2 = \ln(1+ax) + b(x-x^2)$

$$\text{所以 } g'(x) = \frac{a}{1+ax} + b(1-2x)$$

$$\text{依题设有 } \begin{cases} g(1) = \ln(1+a) \\ g'(1) = \frac{11}{3} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \ln(1+a) = \ln 3 \\ \frac{a}{1+a} - b = \frac{11}{3} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$\text{② } g(x) = \ln(1+2x) - 3(x-x^2), x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$g(x) > k(x^2 - x)$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 即 $g(x) - k(x^2 - x) > 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立

$$\text{令 } F(x) = g(x) - k(x^2 - x), \text{ 则有 } F'(x) = \frac{4(3-k)x^2 + k - 1}{1+2x}$$

当 $1 \leq k \leq 3$ 时, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

所以 $F(x) > F(0) = 0$, 即当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x) > k(x^2 - x)$

当 $k < 1$ 时, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-k}{3-k}}\right)$ 时, $F'(x) < 0$

所以 $F(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-k}{3-k}}\right)$ 上单调递减, 故当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-k}{3-k}}\right)$ 时, $F(x) < F(0) = 0$

即当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x) > k(x^2 - x)$ 不恒成立

综上, $k \in [1, 3]$

练22

解答: (1) 当 $b = 2$ 时, $g(x) = x - 2\ln x, \therefore g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$

令 $g'(x) = 0$ 得: $x = 2$. $\therefore$ 函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$

$\therefore$ 当 $x \in (0, 2)$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 的单调减区间为 $(0, 2)$, 单调增区间为 $(2, +\infty)$

$$(2) \text{ 由 } a+b=0 \text{ 得: } h(x) = \begin{cases} x^2 - (b-1)x + b, & x \leq 1 \\ x - b \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

当 $x \leq 1$ 时, $h(x) = x^2 - (b-1)x + b \geq 0$ 恒成立

当 $\frac{b-1}{2} \geq 1$, 即 $b \geq 3$ 时, $h(x)_{\min} = h(1) = 2 \geq 0$ 恒成立

当 $\frac{b-1}{2} < 1$, 即 $b < 3$ 时, $h(x)_{\min} = h\left(\frac{b-1}{2}\right) = \frac{-b^2 + 6b - 1}{4} \geq 0$

解得: $3 - 2\sqrt{2} \leq b < 3$

综上所述: $b \geq 3 - 2\sqrt{2}$

当 $x > 1$ 时, 由 $h(x) = x - b \ln x \geq 0$ 恒成立得: $b \leq \frac{x}{\ln x}$ 恒成立

设 $m(x) = \frac{x}{\ln x}$ ($x > 1$), 则 $m'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

令 $m'(x) = 0$ 得: $x = e$

当 $x \in (1, e)$ 时, $m'(x) < 0$; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $m'(x) > 0$

$\therefore m(x)_{\min} = m(e) = e$, $\therefore b \leq e$

综上所述: b 的取值范围为: $[3 - 2\sqrt{2}, e]$

$$(3) u(x) = x^2 + ax + b \ln x$$

$\because u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在零点, $\therefore x^2 + ax + b \ln x = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解

即 $a = -x - b \cdot \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解

又 $a + b \geq -2$, 即 $a \geq -b - 2$, $\therefore -x - b \cdot \frac{\ln x}{x} \geq -b - 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解

设 $t(x) = \ln x - x$, 则 $t'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

令 $t'(x) = 0$ 得: $x = 1$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $t'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $t'(x) < 0$

$\therefore t(x) \leq t(1) = -1 < 0$, 即 $\ln x < x$, $\therefore b \geq \frac{x^2 - 2x}{x - \ln x}$

设 $F(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - \ln x}$, 则 $F'(x) = \frac{(x-1)(x-2\ln x+2)}{(x-\ln x)^2}$

同理可证: $\ln x < \frac{x}{2}$, $\therefore x - 2\ln x + 2 > 0$

则 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增

$\therefore F(x)_{\min} = F(1) = -1$, 故 $b \geq -1$

$\therefore b$ 的取值范围为: $[-1, +\infty)$