

百强学校题集

——三角函数

低头是题海
抬头是前途

信手拈来的从容，都是厚积薄发的沉淀

R E A D A B O O K



练5 (★★★☆☆) (2020·浙江省学军中学高一期末)

已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha \in (0, \pi)$ 则 $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = (\quad)$

A. $\frac{\sqrt{7}}{7}$

B. $-\frac{\sqrt{7}}{7}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

练6 (★★★☆☆) (2020·江苏省南京师大附中高一期末)

设 a, b 是实数, 已知角 θ 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边上有两点 $A(a, 1)$, $B(-2, b)$, 且

$\sin \theta = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{a}{b}$ 的值为 ()

A. -4

B. -2

C. 4

D. ± 4

练7 (★★★☆☆) (2020·新疆维吾尔自治区兵团二中高一期末)

已知 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$, $\theta \in (0, \pi)$, 则 $\tan \theta = (\quad)$

A. $\frac{3}{4}$

B. $-\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $-\frac{4}{3}$

练8 (★★★☆☆) (2020·合肥一六八中学高一期末)

$\sin 570^\circ$ 的值为 ()

A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

练9 (★★★☆☆) (2020·河北省石家庄二中高一期末)

设函数 $f(x) = a \sin(\pi x + \alpha) + b \cos(\pi x + \beta)$ 其中 a, b, α, β 都是非零常数, 且满足 $f(2019) = -\frac{1}{3}$, 则 $f(2020) =$

()

A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

练10 (★★☆☆) (2020·浙江省杭州第二中学高一期末)

函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 ()

- A. 关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称
 B. 关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称
 C. 关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称
 D. 关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称

练11 (★★☆☆) (2020·天津南开中学高三月考)

设函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $\omega > 0$, $|\varphi| < \pi$. 若 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2$, $f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 则 ()

- A. $\omega = \frac{2}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{12}$
 B. $\omega = \frac{2}{3}$, $\varphi = -\frac{11\pi}{12}$
 C. $\omega = \frac{1}{3}$, $\varphi = -\frac{11\pi}{24}$
 D. $\omega = \frac{1}{3}$, $\varphi = \frac{7\pi}{24}$

练12 (★★☆☆) (2020·合肥一六八中学高一期末)

已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减, 则实数 ω 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]$
 B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$
 C. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$
 D. $(0, 2]$

练13 (★★☆☆) (2020·重庆巴蜀中学高一期末)

若 $\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, $x \in \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$ 则 $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ 值为 ()

- A. $\frac{3}{5}$
 B. $\frac{4}{5}$
 C. $-\frac{3}{5}$
 D. $-\frac{4}{5}$

练14 (★★☆☆) (2020·重庆巴蜀中学高一期末)

$\frac{\tan 50^\circ \tan 80^\circ}{\tan 80^\circ - \tan 50^\circ - \tan 30^\circ}$ 的值为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
 B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 C. $-\sqrt{3}$
 D. $\sqrt{3}$

练15 (★★★☆☆) (2020·天津一中高一期末)

将函数 $y = \sqrt{3} \cos x + \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象向左平移 m ($m > 0$) 个单位长度后, 所得到的图象关于 y 轴对称, 则 m 的最小值是 ()

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

练16 (★★★☆☆) (2020·重庆巴蜀中学) (多选)

设 α 是第三象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

练17 (★★★☆☆) (2020·山东省实验中学) (多选)

已知 $x \in \left\{ x \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 则函数 $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{\cos x}{|\cos x|} - \frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值可能为 ()

- A. 3 B. -3 C. 1 D. -1

练18 (★★★☆☆) (2020·山东省青岛二中高一期末) (多选)

在 $\triangle ABC$ 中, 下列关系恒成立的是 ()

- A. $\tan(A+B) = \tan C$ B. $\cos(2A+2B) = \cos 2C$
C. $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin \frac{C}{2}$ D. $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}$

练19 (★★★☆☆) (2020·福建省福州第一中学高一期末) (多选)

以下函数在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上为单调增函数的有 ()

- A. $y = \sin x + \cos x$ B. $y = \sin x - \cos x$
C. $y = \sin x \cos x$ D. $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

练20 (★★★☆☆) (2020·福建省福州第一中学高一期末) (多选)

下列关于函数 $f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的相关性质的命题, 正确的有 ()

- A. $f(x)$ 的定义域是 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$
- B. $f(x)$ 的最小正周期是 π
- C. $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) (k \in \mathbf{Z})$
- D. $f(x)$ 的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$

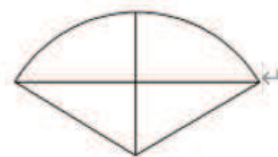
练21 (★★★☆☆) (2020·海南省海南中学高一期末) (多选)

下列化简正确的是 ()

- A. $\cos 82^\circ \sin 52^\circ - \sin 82^\circ \cos 52^\circ = \frac{1}{2}$
- B. $\sin 15^\circ \sin 30^\circ \sin 75^\circ = \frac{1}{4}$
- C. $\frac{\tan 48^\circ + \tan 72^\circ}{1 - \tan 48^\circ \tan 72^\circ} = -\sqrt{3}$
- D. $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

练22 (★★★☆☆) (2020·合肥一六八中学高一期末)

《九章算术》是我国古代数学成就的杰出代表. 其中《方田》章给出试算弧田面积所用的经验公式为: 弧田面积 = $\frac{1}{2}(\text{弦} \cdot \text{矢} + \text{矢}^2)$. 弧田(如图), 由圆弧和其所对弦所围成, 公式中“弦”指圆弧所对弦长, “矢”等于半径长与圆心到弦的距离之差. 现有圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$, 弦长等于9m的弧田. 按照上述经验公式计算所得弧田的面积是_____ m^2 .



练23 (★★★☆☆) (2020·合肥一六八中学高一期末)

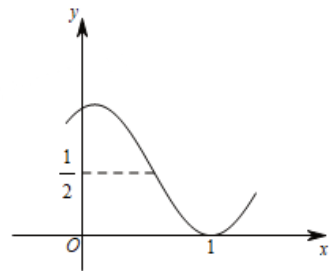
已知 $\tan \alpha = 2$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, 则 $\cos \alpha - \sin \alpha =$ _____.

练24 (★★★☆☆) (2020·福建省福州第一中学高一期末)

已知 $\sin(\pi - \alpha) + 2 \cos(\pi + \alpha) = 0$, 则 $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} =$ _____.

练25 (★★★☆☆) (2020·湖南省长郡中学高一期末)

若存在正整数 ω 和实数 φ 使得函数 $f(x) = \sin^2(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 ω 的值为_____.



练26 (★★★☆☆) (2020·合肥一六八中学高一期末)

设函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{\pi x}{m}$, 存在 x_0 使得 $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ 和 $x_0^2 + [f(x_0)]^2 < m^2$ 成立, 则 m 的取值范围是_____.

练27 (★★★☆☆) (2020·浙江省杭州第二中学高一期末)

已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($0 < \omega < 1$). $f(x)$ 在 $x = \pi$ 处取得最大值, 则 $f(7\pi) - f(6\pi) =$ _____; 函数 $f(x)$ 的周期是 4π , 函数 $|f(x)|$ 的单调增区间是_____.

练28 (★★★☆☆) (2020·长沙市南雅中学高一开学考试【理】)

已知 α, β 都是锐角, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, 求 $\sin \beta$ 的值.

练29 (★★★☆☆) (2020·海南省海南中学高一期末)

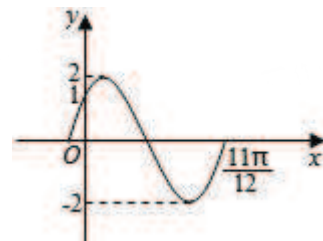
已知设函数 $f(x) = 4\sqrt{3} \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x + 2 \cos x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 最小正周期和值域;

(2) 求函数 $f(x), x \in [-2\pi, 2\pi]$ 的单调递增区间.

练30 (★★★☆☆) (2020·合肥一六八中学高一期末)

已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在一个周期内的图象如图所示.



(1) 求函数的解析式;

(2) 设 $0 < x < \pi$, 且方程 $f(x) = m$ 有两个不同的实数根, 求实数 m 的取值范围和这两个根的和.

参考答案 三角函数

练1

答案: C

解答: 钟表的秒针经过25s走过的角度为 $\alpha = -\frac{5}{12} \times 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$

又秒针长12cm

所以秒针的端点所走的路线长为

$$L = \left| -\frac{5\pi}{6} \right| \times 12 = 10\pi \text{ (cm)}$$

故选: C.

练2

答案: C

解答: $\because \sin \alpha = -\frac{5}{13}$, 且 α 为第三象限角

$$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{12}{13}$$

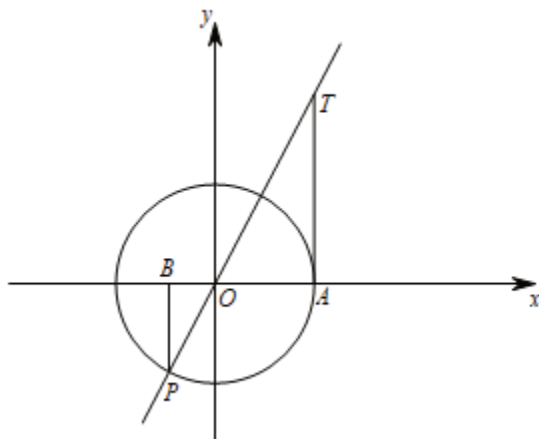
$$\text{则 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{12}$$

故选: C.

练3

答案: D

解答: 如图作单位圆



$$\therefore \frac{5\pi}{4} < 4 < \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \tan 4 = AT > 0, \sin 4 = BP < 0, \cos 4 = OB < 0$$

$$\text{故 } BP < OB < AT$$

$$\text{故 } \sin 4 < \cos 4 < \tan 4$$

故选: D.

练4

答案: A

解答: $\therefore$ 角 α 的终边与单位圆的交点为 $P\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

$$\therefore \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

故选: A.

练5

答案: B

解答: 由 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$ 平方得 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$

$$\text{即 } 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\text{又 } \alpha \in (0, \pi)$$

$$\text{则 } \sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$$

$$\text{所以 } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}, \text{ 即 } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{所以 } \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{7}$$

故选: B.

练6

答案: A

解答: 由三角函数的定义, 可得 $\frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{b}{\sqrt{4+b^2}}$, 且 $a < 0$, $b > 0$

$$\text{解得 } b = \frac{\sqrt{2}}{2}, a = -2\sqrt{2}$$

$$\text{所以 } \frac{a}{b} = -4$$

故选: A.

练7

答案: B

解答: 由题意, $\cos \theta = -\frac{4}{5}$, $\theta \in (0, \pi)$

$$\text{所以 } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\text{则 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

故选: B.

练8

答案: A

解答: $\sin 570^\circ = \sin(360^\circ + 210^\circ) = \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

故选: A.

练9

答案: B

解答: 由题 $f(2019) = a \sin(2019\pi + \alpha) + b \cos(2019\pi + \beta) = -a \sin \alpha - b \cos \beta = -\frac{1}{3}$

$$\therefore a \sin \alpha + b \cos \beta = \frac{1}{3}$$

$$\therefore f(2020) = a \sin(2020\pi + \alpha) + b \cos(2020\pi + \beta) = a \sin \alpha + b \cos \beta = \frac{1}{3}$$

故选: B.

练10

答案: B

解答: 令 $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $x = \frac{1}{2}k\pi - \frac{\pi}{6}$

所以对称点为 $\left(\frac{1}{2}k\pi - \frac{\pi}{6}, 0\right)$

$k=1$ 为 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$

故B正确

令 $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$

则对称轴为 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$

因此直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $x = \frac{\pi}{3}$ 均不是函数的对称轴

故选: B.

练11

答案: A

解答: 由 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 得 $\frac{T}{4} > \frac{\pi}{2}$

又 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2$, $f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 0$, 得 $\frac{T}{4} = \frac{11\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$

$\therefore T = 3\pi$, 则 $\frac{2\pi}{\omega} = 3\pi$, 即 $\omega = \frac{2}{3}$

$\therefore f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x + \varphi\right)$

由 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2\sin\left(\frac{2}{3} \times \frac{5\pi}{8} + \varphi\right) = 2$, 得 $\sin\left(\varphi + \frac{5\pi}{12}\right) = 1$

$\therefore \varphi + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

取 $k=0$, 得 $\varphi = \frac{\pi}{12} < \pi$

$\therefore \omega = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{\pi}{12}$

故选: A.

练12

答案: A

解答: $\because x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 且 $\omega > 0$

$\therefore \omega x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}, \pi\omega + \frac{\pi}{4}\right)$

由 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减

易得: $\left(\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}, \pi\omega + \frac{\pi}{4}\right) \subseteq \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \pi\omega + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{解得: } \frac{1}{2} + 4k \leq \omega \leq \frac{5}{4} + 2k$$

$$\text{又} \because \omega > 0 \text{ 且 } \frac{T}{2} \geq \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 0 < \omega < 2$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq \omega \leq \frac{5}{4}$$

$$\therefore \text{实数 } \omega \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right]$$

故选: A.

练13

答案: A

$$\text{解答: } \because \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{10}, \quad x \in \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$$

$$\text{则 } x + \frac{\pi}{12} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

$$\therefore \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) &= \cos\left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{12} + x\right)\right] = \cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{12} + x\right) + \sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{12} + x\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

故选: A.

练14

答案: D

$$\text{解答: } \frac{\tan 50^\circ \tan 80^\circ}{\tan 80^\circ - \tan 50^\circ - \tan 30^\circ} = \frac{\tan 50^\circ \tan 80^\circ}{\tan 30^\circ (1 + \tan 80^\circ \tan 50^\circ) - \tan 30^\circ} = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$$

故选: D.

练15

答案: B

$$\text{解答: } y = \sqrt{3}\cos x + \sin x$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)$$

$$= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$\therefore$ 图象向左平移 m ($m > 0$) 个单位长度得到,

$$y = 2\sin\left[\left(x + m\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2\sin\left(x + m + \frac{\pi}{3}\right)$$

∴所得的图象关于 y 轴对称

$$\therefore m + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z})$$

则 m 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

故选: B.

练16

答案: BD

解答: ∵ α 是第三象限角

$$\therefore k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{则 } k \cdot 180^\circ + 90^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 135^\circ, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{令 } k = 2n, \quad n \in \mathbf{Z}$$

$$\text{有 } n \cdot 360^\circ + 90^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 135^\circ, \quad n \in \mathbf{Z}, \text{ 在二象限, } k = 2n + 1, \quad n \in \mathbf{Z}$$

$$\text{有 } n \cdot 360^\circ + 270^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 315^\circ, \quad n \in \mathbf{Z}, \text{ 在四象限}$$

故选: BD.

练17

答案: BC

$$\text{解答: } x \in \left\{ x \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$$

$$\text{当 } x \text{ 在第一象限时: } y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{\cos x}{|\cos x|} - \frac{\tan x}{|\tan x|} = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$\text{当 } x \text{ 在第二象限时: } y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{\cos x}{|\cos x|} - \frac{\tan x}{|\tan x|} = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$\text{当 } x \text{ 在第三象限时: } y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{\cos x}{|\cos x|} - \frac{\tan x}{|\tan x|} = -1 - 1 - 1 = -3$$

$$\text{当 } x \text{ 在第四象限时: } y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{\cos x}{|\cos x|} - \frac{\tan x}{|\tan x|} = -1 + 1 + 1 = 1$$

故选: BC.

练18

答案: BD

解答: A选项: $\tan(A+B) = \tan(\pi-C) = -\tan C$, 不正确

B选项: $\cos(2A+2B) = \cos(2(\pi-C)) = \cos(-2C) = \cos 2C$, 正确

C选项: $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi-C}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}$, 不正确

D选项: $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi-C}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}$, 正确

故选: BD.

练19

答案: BD

解答: 对于A选项, $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 所以, 函数 $y = \sin x + \cos x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上不单调对于B选项, $y = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $x - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 所以, 函数 $y = \sin x - \cos x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增对于C选项, $y = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $2x \in (0, \pi)$ 所以, 函数 $y = \sin x \cos x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上不单调对于D选项, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $y = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ 所以, 函数 $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

故选: BD.

练20

答案: AC

解答: 对于A选项, 令 $2x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 解得 $x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} (k \in \mathbf{Z})$ 则函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, A选项正确对于B选项, 函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, B选项错误对于C选项, 令 $k\pi - \frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 解得 $\frac{k\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} < x < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} (k \in \mathbf{Z})$ 则函数 $y = f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) (k \in \mathbf{Z})$, C选项正确对于D选项, 令 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 解得 $x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8} (k \in \mathbf{Z})$ 则函数 $y = f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$, D选项错误

故选: AC.

练21

答案: CD

解答: A中, $\cos 82^\circ \sin 52^\circ - \sin 82^\circ \cos 52^\circ = \sin(52^\circ - 82^\circ) = \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$, 则A错误

B中, $\sin 15^\circ \sin 30^\circ \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{4} \sin 30^\circ = \frac{1}{8}$, 则B错误

C中, $\frac{\tan 48^\circ + \tan 72^\circ}{1 - \tan 48^\circ \tan 72^\circ} = \tan(48^\circ + 72^\circ) = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$, 则C正确

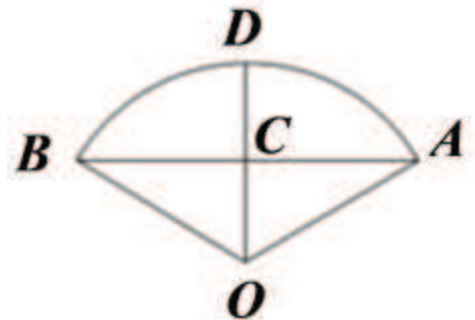
D中, $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则D正确

故选: CD.

练22

答案: $\frac{27\sqrt{3}}{4} + \frac{27}{8}$

解答:



设弧田的圆心为 O , 弦为 AB , C 为 AB 中点, 连接 OC 交弧为 D

则 $OC \perp AB$

所以矢长为 CD

在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, $AC = \frac{9}{2}$, $\angle AOC = \frac{\pi}{3}$

所以 $OA = \frac{\frac{9}{2}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3}$, $OC = \frac{1}{2}OA = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $CD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

所以弧田的面积为 $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + CD^2) = \frac{1}{2}\left(9 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = \frac{27\sqrt{3}}{4} + \frac{27}{8}$

故答案为: $\frac{27\sqrt{3}}{4} + \frac{27}{8}$.

练23

答案: $\frac{\sqrt{5}}{5}$

解答: 由 $\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2, \text{ 以及 } \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$

$$\text{得出 } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \cos \alpha - \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} - \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

故答案为: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

练24

答案: $\frac{5}{2}$

解答: $\because \sin(\pi - \alpha) + 2\cos(\pi + \alpha) = 0$

$$\therefore \sin \alpha - 2\cos \alpha = 0$$

$$\therefore \tan \alpha = 2$$

$$\therefore \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha + 1}{\tan \alpha} = \frac{2^2 + 1}{2} = \frac{5}{2}$$

故答案为: $\frac{5}{2}$.

练25

答案: 2

解答: $f(x) = \sin^2(\omega x + \varphi) = \frac{1 - \cos(2\omega x + 2\varphi)}{2}$

$$\text{该函数的最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$$

$$\text{由图象知: } \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\omega} < 1, \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{\omega} > 1$$

$$\therefore \frac{4}{3} < \frac{\pi}{\omega} < 2$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < \omega < \frac{3\pi}{4}$$

又 ω 为正整数

$$\therefore \omega = 2$$

故答案为: 2.

练26

答案: $m < -2$ 或 $m > 2$

解答: 由函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{\pi x}{m}$, 存在 x_0 使得 $|f(x)| \leq |f(x_0)|$

所以 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的对称轴

$$\text{所以 } \frac{\pi x_0}{m} = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{解得 } x_0 = mk + \frac{m}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{由 } x_0^2 + [f(x_0)]^2 < m^2 \text{ 成立}$$

$$\text{得 } m^2 \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 + 3 < m^2$$

$$\text{所以 } k^2 + k - \frac{3}{4} < -\frac{3}{m^2}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{所以 } k^2 + k - \frac{3}{4} \quad (k \in \mathbf{Z}) \text{ 的最小值为 } -\frac{3}{4} \quad (\text{此时 } k = 0 \text{ 或 } k = -1)$$

$$\text{所以 } -\frac{3}{4} < -\frac{3}{m^2}, \text{ 即 } m^2 > 4, \text{ 解得 } m < -2 \text{ 或 } m > 2$$

所以 m 的取值范围是 $m < -2$ 或 $m > 2$

故答案为: $m < -2$ 或 $m > 2$.

练27

答案: $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1; \left(2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3} \right), (k \in \mathbf{Z})$

解答: 由 $f(x)$ 在 $x = \pi$ 处取得最大值, 得 $\omega\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad \omega = \frac{1}{6} + 2k$

$$\because 0 < \omega < 1$$

$$\therefore \omega = \frac{1}{6}, \quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{6}x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore f(7\pi) - f(6\pi) = \sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的周期是 4π

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi$$

$$\therefore \omega = \frac{1}{6}, \quad \therefore f(x) = \sin\left(\frac{1}{6}x + \frac{\pi}{3}\right), \quad |f(x)| \text{ 的周期为 } 2\pi$$

$$\text{由 } 0 < \frac{1}{6}x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore -\frac{2\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$$

$$\text{函数 } |f(x)| \text{ 的单调增区间是 } \left(2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3} \right), \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{3}}{2} - 1; \left(2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3} \right), \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

练28

解答: $\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$

$$\therefore 0 < \alpha + \beta < \pi$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} \\ &= \sqrt{1 - \frac{25}{169}} \\ &= \frac{12}{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin \beta &= \sin[(\alpha + \beta) - \alpha] \\ &= \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha \\ &= \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{16}{65}\end{aligned}$$

练29

解答: (1) $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x = 4 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$f(x)$ 的最小正周期 $T = 2\pi$, 值域为 $[-4, 4]$

$$(2) \text{ 令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{解得 } 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$$

$$\therefore f(x) \text{ 单调递增区间为 } \left[2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right], k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{令 } k = -1, \text{ 则 } 2k\pi - \frac{2\pi}{3} = -\frac{8\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$$

$$\therefore \left[-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right] \text{ 为单调递增区间}$$

$$\text{令 } k = 0, \text{ 则 } 2k\pi - \frac{2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ 为单调递增区间}$$

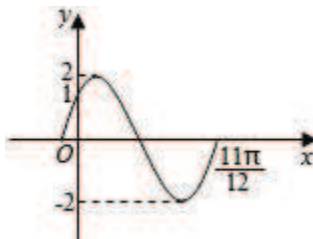
$$\text{令 } k = 1, \text{ 则 } 2k\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$$

$$\therefore \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right] \text{ 为单调递增区间}$$

综上所述, 函数 $f(x), x \in [-2\pi, 2\pi]$ 的单调递增区间为 $\left[-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right], \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$.

练30

解答：(1) 显然 $A = 2$



又图象过 $(0, 1)$ 点

$$\therefore f(0) = 1$$

$$\therefore \sin \varphi = \frac{1}{2}$$

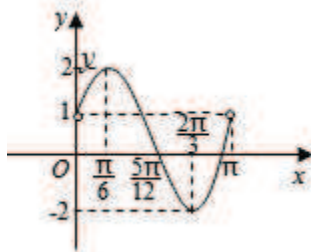
$$\therefore |\varphi| < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$$

由图象结合“五点法”可知， $\left(\frac{11\pi}{12}, 0\right)$ 对应函数 $y = \sin x$ 图象的点 $(2\pi, 0)$

$$\therefore \omega \cdot \frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = 2\pi, \text{ 得 } \omega = 2$$

所以所求的函数的解析式为： $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$



(2) 如图所示，在同一坐标系中画出 $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 和 $y = m$ ($m \in \mathbf{R}$) 的图象

由图可知，当 $-2 < m < 1$ 或 $1 < m < 2$ 时，直线 $y = m$ 与曲线有两个不同的交点，即原方程有两个不同的实数根

$\therefore m$ 的取值范围为： $-2 < m < 1$ 或 $1 < m < 2$

当 $-2 < m < 1$ 时，两根和为 $\frac{4\pi}{3}$

当 $1 < m < 2$ 时，两根和为 $\frac{\pi}{3}$