

必备知识 手册



数

函数

完善数学知识体系

夯实基础

查漏补缺

CONTENTS

目录

第 1 讲	二次函数	1
第 2 讲	函数的概念	6
第 3 讲	函数的定义域	11
第 4 讲	函数的值域	14
第 5 讲	函数的表示法	18
第 6 讲	函数的单调性	22
第 7 讲	函数单调性的判断	26
第 8 讲	函数单调性比大小	31

第 9 讲	常见函数最值	33
第 10 讲	利用单调性求最值	36
第 11 讲	函数奇偶性	38
第 12 讲	奇偶性的判断	42
第 13 讲	奇偶性求值	46
第 14 讲	奇偶性求参	48
第 15 讲	对勾函数	51
第 16 讲	幂函数及其性质	54
第 17 讲	幂函数的应用	58
第 18 讲	指数幂运算	61
第 19 讲	指数函数及其性质	66
第 20 讲	指数函数的应用	71

第 21 讲	对数运算	73
第 22 讲	对数函数及其性质	77
第 23 讲	对数函数的应用	82
第 24 讲	指对函数的反函数关系	85
第 25 讲	函数零点	87
第 26 讲	函数零点的应用	90
第 27 讲	二分法	93
第 28 讲	函数应用题	96



第 1 讲

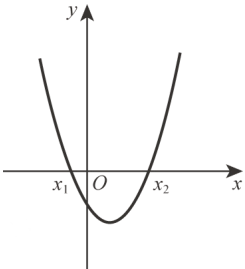
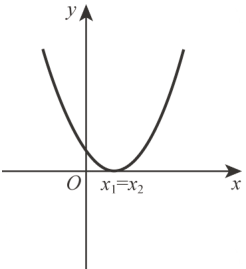
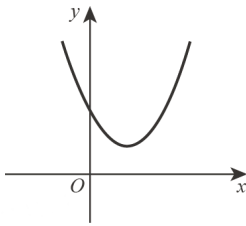
二次函数

知识精讲

二次函数的表达式

1. 一般式: $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.
2. 顶点式: $y = a(x - h)^2 + k (a \neq 0)$, 其中 (h, k) 为抛物线的顶点坐标.
3. 两根式: $y = a(x - x_1)(x - x_2) (a \neq 0)$, 其中 x_1, x_2 为二次函数的零点.

二次函数的图象与性质

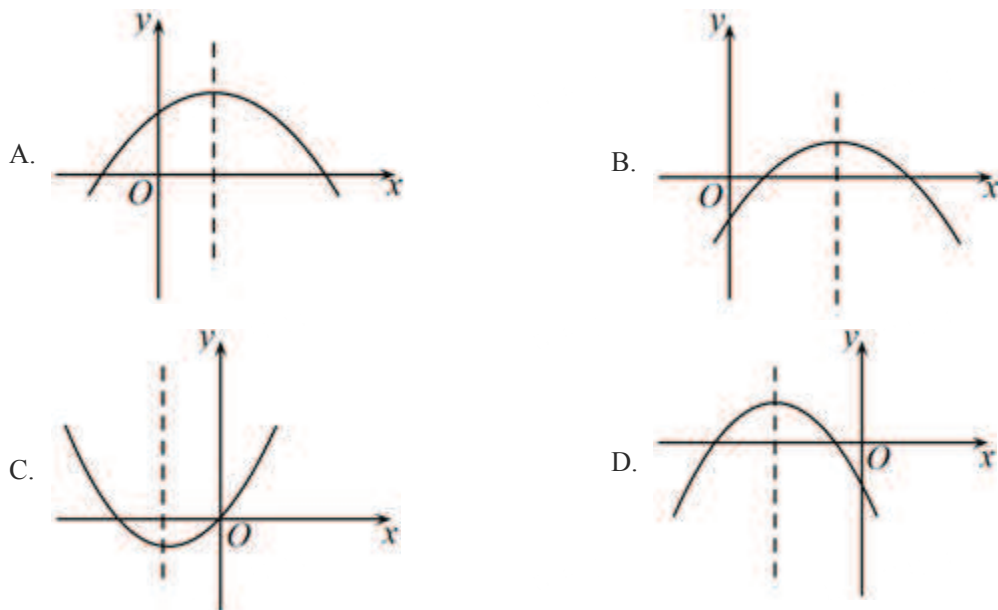
$a > 0$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ 的图象			
$ax^2 + bx + c = 0$ 的根	有两个不相等的实数根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$\{x x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\left\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\right\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集	$\{x x_1 < x < x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

经典例题

考向一 图象判断

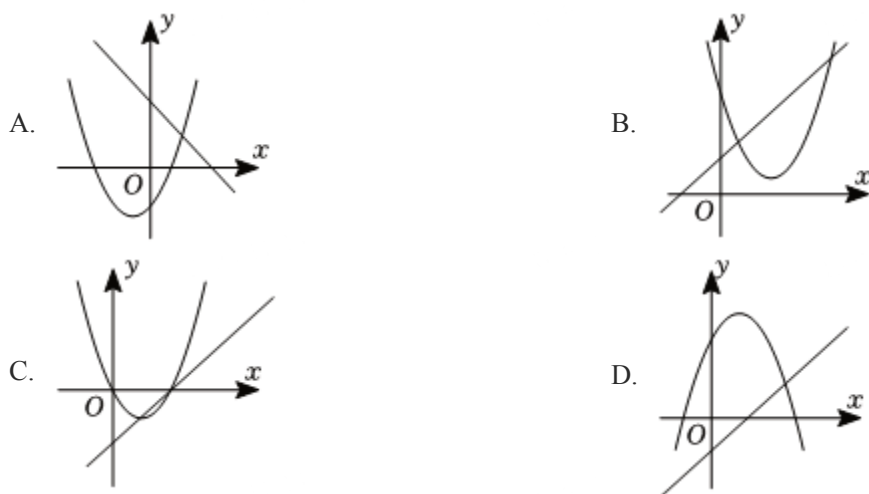
例1 (2022·海南海口市月考)

如图, 若 $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$, 则抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的大致图象为 ()



相似题1_例1 (2022·安徽阜阳市月考)

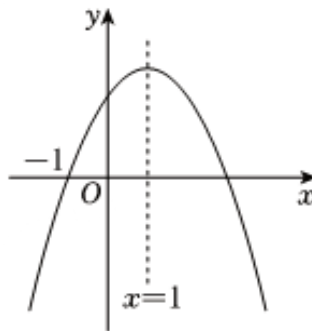
$y = 2x + b$ 和 $y = 2x^2 + bx + c$ 在同一直角坐标系内的图象可以是 ()



相似题2_例1 (2022·新疆同步)

已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $a > 0$
- B. 3是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根
- C. $c < 0$
- D. 当 $x < 1$ 时, y 随 x 的增大而减小



考向二 已知图象位置求参数范围

例2 (2023·黑龙江大庆市月考)

若二次函数 $f(x) = ax^2 + 2ax - 2$ 的图象都在 x 轴下方, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-2, 0)$
- B. $(-\infty, 0)$
- C. $(-\infty, -2)$
- D. $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

相似题1_例2 (2021·陕西渭南市期末【理】)

若二次函数 $f(x) = ax^2 + ax - 1$ 的图象都在 x 轴下方, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 0)$
- B. $(-4, 0)$
- C. $(-\infty, -4)$
- D. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

相似题2_例2 (2022·江苏盐城市月考)

若不等式 $mx^2 - 4mx + 3 \neq 0$ 对任意实数 x 均成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $\left[0, \frac{3}{4}\right)$
- B. $\left(0, \frac{3}{4}\right)$
- C. $\left[0, \frac{3}{4}\right]$
- D. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

考向三 增减性

例3 (2022·江苏苏州市月考)

已知 $y = -(x-1)^2 + h$ 的图象过点 $A(0, y_1)$, $B(-4, y_2)$, $C(3, y_3)$, 则 y_1 , y_2 , y_3 的大小关系是 ()

- A. $y_1 > y_2 > y_3$ B. $y_1 > y_3 > y_2$ C. $y_3 > y_1 > y_2$ D. $y_2 > y_3 > y_1$

相似题1_例3 (2022·浙江宁波市月考)

已知点 $A(-1, y_1)$, $B(-0.5, y_2)$, $C(4, y_3)$ 都在二次函数 $y = -ax^2 + 2ax - 1$ ($a > 0$) 的图象上, 则 y_1 , y_2 , y_3 的大小关系是_____.

相似题2_例3 (2022·北京海淀区期中)

已知 $m < -2$, 点 $(m-1, y_1)$, (m, y_2) , $(m+1, y_3)$ 都在二次函数 $y = -x^2 - 2x$ 的图象上, 则 ()

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_2 < y_3 < y_1$ C. $y_1 < y_3 < y_2$ D. $y_3 < y_1 < y_2$

第 2 讲

函数的概念

 知识精讲

设 A, B 是非空的实数集, 如果对于集合 A 中的任意一个数 x , 按照某种确定的对应关系 f , 在集合 B 中都有唯一确定的数 y 与它对应, 那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数. 记作

$$y = f(x), x \in A$$

其中, x 叫做自变量, x 的取值范围 A 叫做函数的定义域. 与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值, 函数值构成的集合

$$\{y | y = f(x), x \in A\}$$

叫做这个函数的值域.

如果两个函数表达式表示的函数定义域相同, 对应关系也相同, 即对自变量的每一个值, 两个函数表达式得到的函数值都相等, 那么这两个函数是同一个函数.

 经典例题

考向一 根据表达式确定是否为函数

例1 (2022·四川绵阳市月考) (多选)

下列对应关系是从集合 A 到集合 B 的函数的是 ()

- A. $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{N}^*$, 对应关系 f : 对集合 A 中的元素取绝对值与 B 中元素对应
- B. $A = \{-1, 1, 2, -2\}$, $B = \{1, 4\}$, 对应关系 $f: x \rightarrow y = x^2$
- C. $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 对应关系 $f: A$ 中的数开方
- D. $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{0\}$, 对应关系 $f: x \rightarrow y = 0$

相似题1_例1 (2022·河南濮阳市月考)

已知集合 $P = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, $Q = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$, 下列对应关系中, 不能构成从 P 到 Q 的函数的是 ()

A. $f: x \rightarrow y = \frac{1}{2}x$

B. $f: x \rightarrow y = \frac{1}{3}x$

C. $f: x \rightarrow y = \frac{2}{3}x$

D. $f: x \rightarrow y = \frac{1}{8}x^2$

相似题2_例1 (2021·江苏无锡市期中)

下列各式中, 表示 y 是 x 的函数的有 ()

① $y = x - (x - 3)$

② $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{1-x}$

③ $y = \begin{cases} x-1, & x \leq 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$

④ $y = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

A. 4个

B. 3个

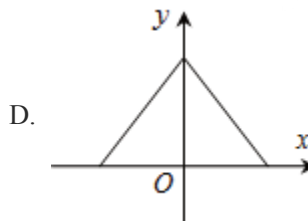
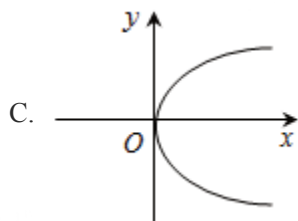
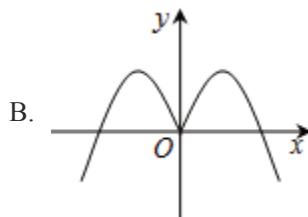
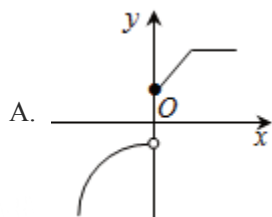
C. 2个

D. 1个

考向二 根据图象判断是否为函数

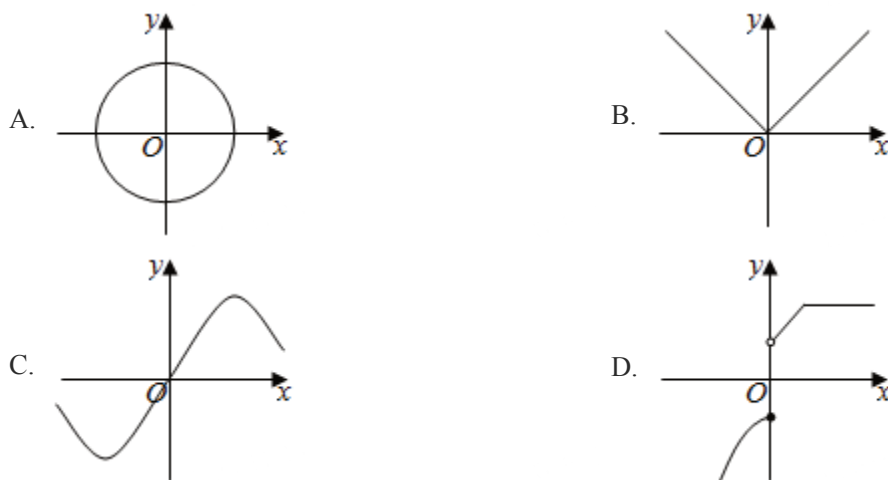
例2 (2022·广东深圳市期末) (多选)

下列是函数图象的是 ()



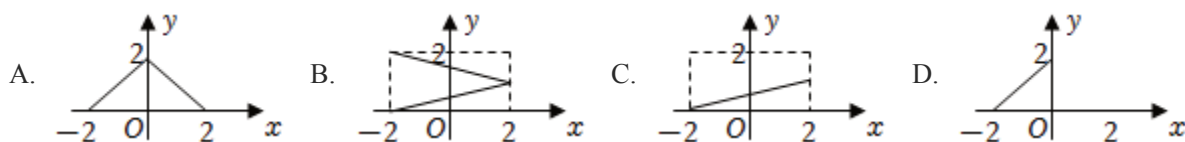
相似题1_例2 (2022·内蒙古赤峰市期末)

下列图象中, 不能表示函数的是 ()



相似题2_例2 (2023·宁夏银川市月考)

设集合 $M = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, $N = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$, 给出下列四个图形, 其中能表示以集合 M 为定义域, N 为值域的函数关系的是 ()



考向三 是否为同一函数

例3 (2023·宁夏银川市期末)

下列函数中与函数 $y = x$ 是同一个函数的是 ()

A. $y = \frac{x^2}{x}$ B. $y = \sqrt{x^2}$ C. $y = (\sqrt{x})^2$ D. $y = \begin{cases} \sqrt{x^2}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{x^2}, & x < 0 \end{cases}$

相似题1_例3 (2023·山东滨州市期中) (多选)

下列各组函数是同一个函数的是 ()

A. $y = \frac{|x|}{x}$ 与 $y = 1$ B. $y = \sqrt{(x-1)^2}$ 与 $y = x-1$

C. $y = \frac{(\sqrt{x})^2}{x}$ 与 $y = \frac{x}{(\sqrt{x})^2}$ D. $y = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ 与 $y = x$

相似题2_例3 (2023·福建莆田市期中)

下列选项中, 表示的不是同一个函数的是 ()

A. $y = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3-x}}$ 与 $y = \sqrt{\frac{x+3}{3-x}}$

B. $y = e^x, x \in \mathbf{R}$ 与 $s = e^t, t \in \mathbf{R}$

C. $y = x^2, x \in \{0, 1\}$ 与 $y = x, x \in \{0, 1\}$

D. $y = 1$ 与 $y = x^0$

第 3 讲

函数的定义域

知识精讲

具体函数定义域求法

(1) 分式函数要求分母不为零, 即: $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$.

(2) 偶次根式函数要求根号内式子大于等于零, 即: $y = \sqrt{x}, x \geq 0$.

(3) 指数为零的幂函数要求底数不为零, 即: $y = x^0, x \neq 0$.

经典例题

考向一 具体函数定义域

例1 (2023·北京西城区二模)

函数 $f(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x-1}$ 的定义域为_____.

相似题1_例1 (2023·上海模拟)

函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ 的定义域是_____.

相似题2_例1 (2021·云南期中)

已知函数 $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}} + (x-2)^0$, 则 $f(x)$ 的定义域为 ()

A. $\{x | x > 1\}$

B. $\{x | x \neq 2\}$

C. $\{x | x > 1 \text{ 且 } x \neq 2\}$

D. $\{x | x > 1 \text{ 或 } x \neq 2\}$

考向二 已知定义域求参

例2

已知函数 $f(x) = \sqrt{ax-2}$ 在区间 $[3, +\infty)$ 上有意义, 则实数 a 的取值范围为_____.

相似题1_例2 (2023·北京延庆区一模)

已知函数 $y = \sqrt{ax+1}$ 的定义域为 A , 且 $-3 \in A$, 则 a 的取值范围是_____.

相似题2_例2

当 $x \in [-1, 2]$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+t}}$ 恒有意义, 则实数 t 的取值范围为_____.

第 4 讲

函数的值域

函数必备知识28之4 函数的值域

知识精讲

函数的值域：

(1) 值域的概念：在函数中，与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，所有函数值构成的集合 $\{y|y=f(x), x \in A\}$ 叫做这个函数的值域；

(2) 值域的求法：根据自变量的取值范围，求出函数值的取值范围，就求出了函数的值域。

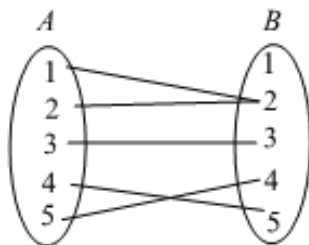
【注】值域要写成集合或区间的形式。

经典例题

考向一 值域的概念

例1

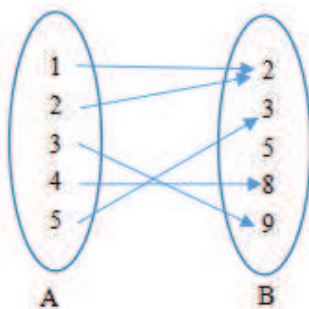
集合 A , B 与对应关系 f 如图所示, $f: A \rightarrow B$ 是否为从集合 A 到集合 B 的函数? 如果是, 那么定义域、值域与对应关系各是什么?



相似题1_例1 (2021·湖北孝感市期中) (多选)

集合 A , B 与对应关系 f 如图所示, 下列说法正确的是 ()

- A. $f: A \rightarrow B$ 是从集合 A 到集合 B 的函数
- B. $f: A \rightarrow B$ 不是从集合 A 到集合 B 的函数
- C. $f: A \rightarrow B$ 的定义域为集合 A , 值域为集合 B
- D. $f(3) = 3f(5)$



相似题2_例1

下列关于函数概念的说法中，正确的选项是（ ）

- A. 函数定义域中的每一个数都有值域中唯一确定的一个数与之对应
- B. 函数的定义域和值域一定是无限集合
- C. 若函数的定义域只有一个元素，则值域也只有一个元素，反之，当值域只有一个元素时，定义域也只有一个元素
- D. 函数的定义域和值域可以是空集

考向二 直接法求值域

例2

函数 $y = 3 - 2x$ ($x \geq 0$) 的值域是（ ）

- A. $(-\infty, 0]$ B. $[0, +\infty)$ C. $(-\infty, 3]$ D. $[3, +\infty)$

相似题1_例2

函数 $f(x) = \sqrt{x} + 5$ 的值域为（ ）

- A. $[5, +\infty)$ B. $(-\infty, 5]$ C. $(5, +\infty)$ D. $\mathbf{R}$

相似题2_例2 (2022·江苏镇江市同步)

函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ($x \in \mathbf{R}$) 的值域是（ ）

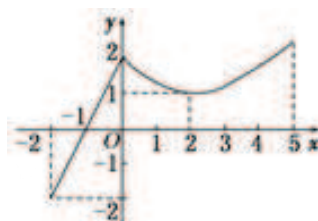
- A. $(0, 1)$ B. $(0, 1]$ C. $[0, 1)$ D. $[0, 1]$

考向三 观察法求值域

例3

函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 5]$ 上的图象如图所示, 则此函数的最小值、最大值分别是 ()

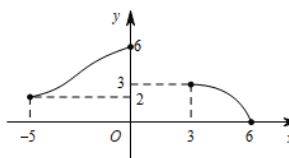
- A. $-2, f(2)$
- B. $2, f(2)$
- C. $-2, f(5)$
- D. $2, f(5)$



相似题1_例3

已知函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示, 则函数的值域是 ()

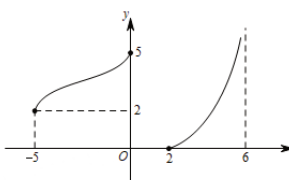
- A. $[-5, 6]$
- B. $[2, 6]$
- C. $[0, 6]$
- D. $[2, 3]$



相似题2_例3 (2021·安徽合肥市期中)

函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示. 观察图象可知函数 $y = f(x)$ 的定义域、值域分别是 ()

- A. $[-5, 0] \cup [2, 6), [0, 5]$
- B. $[-5, 6), [0, +\infty)$
- C. $[-5, 0] \cup [2, 6), [0, +\infty)$
- D. $[-5, +\infty), [2, 5]$



第 5 讲

函数的表示法

知识精讲

函数有三种表示法：解析法、列表法和图象法.

(1) 解析法：就是用数学表达式表示两个变量之间的对应关系.

(2) 列表法：就是列出表格来表示两个变量之间的对应关系.

(3) 图象法：就是用图象表示两个变量之间的对应关系.

经典例题

考向一 解析法

例1

已知正方形的周长为 x ，它的外接圆的半径为 y ，则 y 关于 x 的解析式为（ ）

A. $y = \frac{\sqrt{2}}{8}x$

B. $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x$

C. $y = \frac{1}{2}x$

D. $y = \frac{\sqrt{2}}{16}x$

相似题1_例1

将一条长为10cm的铁丝剪成两段，并以每一段铁丝的长度为周长各做一个正方形. 试表示出两个正方形的面积和 S 与其中一段铁丝长 x 的函数关系. (x 属于正整数)

相似题2_例1

一个面积为100的等腰梯形，上底长为 x ，下底长为上底长的3倍，则它的高 y 与 x 的函数关系式是_____.

考向二 图象法

例2

作出下列函数的大致图象：

$$y = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq 0 \\ x^2 - x, & x < 0 \end{cases}$$

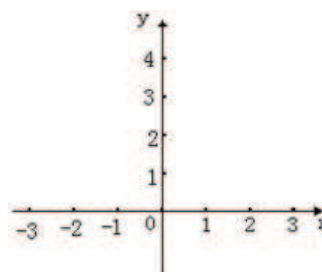
相似题1_例2

市场上土豆的价格是3.2元/kg, 应付款 y (元) 是购买土豆质量 x (单位: kg) 的一次函数, 请分别用解析法和图象法表示这个函数.

相似题2_例2 (2012·广东江门市月考)

已知函数 $y = |x + 1| + |1 - x|$.

- (1) 用分段函数形式写出函数的解析式;
- (2) 画出该函数的大致图象.



考向三 列表法

例3 (2021·江西抚州市月考)

已知函数 $y = f(x)$ 用列表法表示如表, 则 $f[f(2)] =$ _____.

x	1	2	3	4	5
y	3	4	2	1	3

相似题1_例3 (2020·福建厦门市期中)

已知函数 $y = f(x)$, 用列表法表示如下:

x	-2	-1	0	1	2
y	1	0	-2	2	-1

则 $f(-2) + f[f(-2)] =$ ()

- A. -4 B. 0 C. 2 D. 3

相似题2_例3（2023·湖北恩施土家族苗族自治州期中）

已知函数 $f(x)$ 可用列表法表示如下，则 $f\left[10f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ 的值是_____.

x	$x \leqslant 1$	$1 < x < 2$	$x \geqslant 2$
$f(x)$	1	2	3

第 6 讲

函数的单调性

知识精讲

设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ，区间 $D \subseteq I$ 。

1. 如果 $\forall x_1, x_2 \in D$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增。

特别地，当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递增时，我们就称它是增函数。

2. 如果 $\forall x_1, x_2 \in D$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减。

特别地，当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递减时，我们就称它是减函数。

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上单调递增或单调递减，那么就说函数 $y = f(x)$ 在这一区间具有（严格的）单调性，区间 D 叫做 $y = f(x)$ 的单调区间。

【注】：函数的单调性描述的是函数的局部性质。

经典例题

考向一 单调性的概念

例1

下列说法中正确的是（ ）

- A. 设函数 $f(x)$ 的定义域 I 为 (a, b) ，若存在 $x_1, x_2 \in I$ ，使得 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则 $f(x)$ 是增函数
- B. 设函数 $f(x)$ 的定义域 I 为 (a, b) ，若有无穷多对 $x_1, x_2 \in I$ ，使得 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则 $f(x)$ 是增函数
- C. $f(x)$ 在区间 I_1 上是增函数， $f(x)$ 在区间 I_2 上是增函数，则在 $f(x)$ 区间 $I_1 \cup I_2$ 上也是增函数
- D. 设函数 $f(x)$ 的定义域 I 为 (a, b) ，若任给 $x_1, x_2 \in I$ ，使得 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则 $f(x)$ 是增函数

相似题1_例1 (2021·甘肃兰州市期中)

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 对任意两个不相等的实数 a, b , 总有 $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} > 0$ 成立, 则必有 ()

- A. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数
B. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数
C. 函数 $f(x)$ 先单调递增后单调递减
D. 函数 $f(x)$ 先单调递减后单调递增

相似题2_例1 (2021·陕西安康市月考)

函数 $f(x)$ 的定义域为 (a, b) , 且对其定义域内任意实数 x_1, x_2 均有: $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上是 ()

- A. 增函数
B. 减函数
C. 奇函数
D. 偶函数

考向二 定义法证明单调性

例2 (2022·陕西宝鸡市期中)

证明函数 $f(x) = 3x + 2$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

相似题1_例2 (2019·广西南宁市期末)

利用函数单调性的定义, 证明函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

相似题2_例2

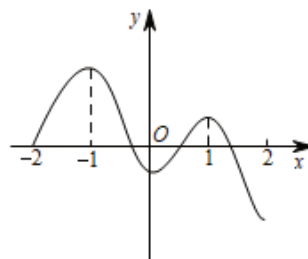
求证: $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$ 在 $(0, 1]$ 上是减函数.

考向三 单调性图象特征

例3 (2019·北京)

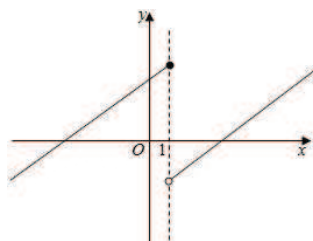
如图是函数 $y = f(x)$ 的图象, 则函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 ()

- A. $(-1, 0)$
- B. $(1, +\infty)$
- C. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
- D. $(-1, 0), (1, +\infty)$



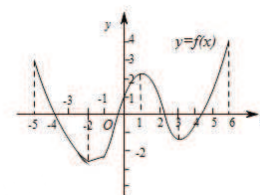
相似题1_例3

函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示, 则函数 $y = f(x)$ 的单调递增区间是_____.



相似题2_例3

如图是定义在区间 $[-5, 6]$ 上的函数 $y = f(x)$, 根据图象说出函数的单调区间, 以及在每一个单调区间上, 它是增函数还是减函数?



第 7 讲

函数单调性的判断

知识精讲

一、单调性的概念

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ，区间 $D \subseteq I$ 。

如果 $\forall x_1, x_2 \in D$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增。

特别地，当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递增时，我们就称它是增函数。

如果 $\forall x_1, x_2 \in D$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减。

特别地，当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递减时，我们就称它是减函数。

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上单调递增或单调递减，那么就说函数 $y = f(x)$ 在这一区间具有（严格的）单调性，区间 D 叫做 $y = f(x)$ 的单调区间。

【注】函数的单调性描述的是函数的局部性质。

二、判断单调性的方法

1. 定义法：

对 $\forall x_1, x_2 \in D$ （ D 为 $f(x)$ 的定义域）且 $x_1 \neq x_2$ ，则有

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ 单调递增.}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ 单调递减.}$$

2. 四则运算：

(1) $f(x)$ 与 $f(x) + C$ (C 为常数) 具有相同的单调性。

(2) $f(x)$ 与 $kf(x)$ ：当 $k > 0$ 时具有相同的单调性；当 $k < 0$ 时具有相反的单调性。

(3) 在 $f(x)$ ， $g(x)$ 的公共单调区间上，有如下结论：

①若 $f(x)$ ， $g(x)$ 均为增（减）函数，则 $f(x) + g(x)$ 也为增（减）函数。

②若 $f(x)$ 为增函数， $g(x)$ 为减函数，则 $f(x) - g(x)$ 为增函数。

三、单调性的证明

定义法证明函数单调性的步骤：

1. 任取 $x_1, x_2 \in D$ ，且 $x_1 < x_2$ ；

2. 作差（作比值），即计算 $f(x_1) - f(x_2)$ 或 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}$ ($f(x_2) \neq 0$)；
3. 变形，通常是因式分解、通分、提公因式、配方；
4. 定号，即判断 $f(x_1) - f(x_2)$ 的正负或判断 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}$ 与 1 的大小关系；
5. 得出 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 的大小关系，指出 $f(x)$ 在给定区间 D 上的单调性.

经典例题

考向1 简单函数单调性

例1 (2022·海南期中)

下列函数中是减函数的为 ()

- A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = 1 - x^2$ C. $y = -x$ D. $y = |x|$

相似题1_例1 (2022·广东深圳市期中) (多选)

下列函数中，在区间 $(-\infty, 0)$ 上为增函数的是 ()

- A. $y = x$ B. $y = -x^2$ C. $y = -\frac{1}{x}$ D. $y = 1 - x$

相似题2_例1 (2022·天津西青区月考)

下列函数在 $(0, +\infty)$ 上不是增函数的是 ()

- A. $y = 3x + 5$ B. $y = x^2 + 4$ C. $y = 3 - x$ D. $y = x^2 + 2x + 4$

考向2 单调性加减法

例2

判断下列函数的单调性.

- (1) $f(x) = x^3 + x$;
- (2) $f(x) = x - \frac{3}{x}$.

相似题1_例2 (2022·内蒙古呼和浩特市期中)

函数 $y = x^3 + x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的图象是_____ (填“单调递增”或“单调递减”) 的.

相似题2_例2

若 $f(x)$, $g(x)$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的单调函数, 有如下命题:

- ①若 $f(x)$, $g(x)$ 都单调递增, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递增
- ②若 $f(x)$, $g(x)$ 都单调递减, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递减
- ③若 $f(x)$, $g(x)$ 都单调递增, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 单调递增
- ④若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递增
- ⑤若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增, $f(x) - g(x)$ 单调递减

其中正确的是 ()

- A. ①② B. ②③④ C. ③④⑤ D. ④⑤

考向3 分段函数单调性

例3 (2018·河北邢台市月考)

函数 $g(x) = |x|$ 的单调递增区间是 ()

- A. $[0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0]$ C. $(-\infty, -2]$ D. $[-2, +\infty)$

相似题1_例3 (2017·陕西渭南市月考)

函数 $f(x) = |x - 1|$ 的单调递增区间是 ()

- A. $[1, +\infty)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[0, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$

相似题2_例3 (2017·河南三门峡市月考)

函数 $f(x) = -|x - 2|$ 的单调递减区间为 ()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[2, +\infty)$ C. $[0, 2]$ D. $[0, +\infty)$

考向4 单调性求参

例4 (2021·河南南阳市月考)

函数 $f(x) = (k - 2)x + 3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(-\infty, 6)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

相似题1_例4 (2020·山东日照市期中)

设关于 x 的函数 $y = (k - 2)x + 1$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则实数 k 的取值范围是_____.

相似题2_例4 (2021·江苏徐州市同步)

已知函数 $f(x) = (2a - 1)x + b$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 则 a 的取值范围为 ()

第 8 讲

函数单调性比大小

知识精讲

函数单调性的应用

1. 比较大小

比较函数值的大小应将自变量转化到同一单调区间内，然后利用函数的单调性解决.

2. 解含“ f ”的不等式

(1) 根据函数的性质把不等式转化为 $f(g(x)) > f(h(x))$ 的形式;

(2) 根据函数的单调性去掉 f ，转化为具体的不等式.

【注】 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的取值应在外层函数的定义域内.

经典例题

考向1 单调性比大小

例1 (2020·陕西西安市中考模拟)

设函数 $f(x)$ 满足：对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ ，则 $f(-3)$ 与 $f(-\pi)$ 的大小关系是_____.

相似题1_例1 (2021·江西抚州市月考)

已知对任意的 $0 < x_1 < x_2$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ，设 $a = f(\pi)$ ， $b = f(2)$ ，则 ()

A. $a = b$

B. $a < b$

C. $a > b$

D. a, b 大小关系不能确定

相似题2_例1 (2022·新疆乌鲁木齐市期中)

已知函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，则 $f(0)$ ， $f(3)$ ， $f(-4)$ 的大小关系是_____。(从小到大排序)

第 9 讲

常见函数最值

 经典例题

考向1 二次函数最值

例1 (2023·上海模拟)

函数 $y = x^2 - 6x + 3$, $x \in [-1, 4]$ 的值域是_____.

相似题1_例1 (2023·甘肃武威市月考)

函数 $f(x) = x^2 + x - 2$ ($x \in [0, 2]$) 的值域是 ()

- A. $[-2, 4]$ B. $\left[-\frac{9}{4}, 4\right]$ C. $\left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$ D. $\left[-\frac{7}{4}, 4\right]$

相似题2_例1 (2022·广东阳江市月考)

函数 $f(x) = -2x^2 + 4x$, $x \in [-1, 2]$ 的值域为 ()

- A. $[-6, 2]$ B. $[-6, 1]$ C. $[0, 2]$ D. $[0, 1]$

考向2 反比例型最值

例2 (2022·广东广州市期中)

函数 $y = \frac{3x+1}{x}$ ($x > 1$) 的值域是 ()

- A. $(4, +\infty)$ B. $(3, 4)$ C. $(3, +\infty)$ D. $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

相似题1_例2 (2021·新疆喀什地区月考【文】)

求函数 $y = \frac{2x+3}{3x-2}$ 的值域_____.

相似题2_例2 (2022·黑龙江哈尔滨市月考)

函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ 值域是 ()

- A. $(-\infty, 1]$ B. $[1, +\infty)$ C. $[0, +\infty)$ D. $(0, 1]$

考向3 一次函数最值

例3 (2021·四川眉山市期中)

函数 $y = ax + 1$ ($a < 0$) 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值、最小值分别是 ()

- A. $1, 2a + 1$ B. $2a + 1, 1$ C. $1 + a, 1$ D. $1, 1 + a$

相似题1_例3 (2022·江苏无锡市月考)

若函数 $f(x) = ax + 1$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值与最小值的差为2, 则实数 a 的值为 ()

- A. 2 B. 2或-2 C. 3 D. 3或-3

第 10 讲

利用单调性求最值

 经典例题

例1

定义在区间 $[0, 3]$ 上的函数 $y = f(x)$ 是减函数，则它的最大值是（ ）

- A. $f(0)$ B. $f(3)$ C. 0 D. 3

相似题1_例1

函数 $f(x) = x + \sqrt{x}$, $x \in [0, 9]$ 的最大值为（ ）

- A. 0 B. 2 C. 6 D. 12

相似题2_例1

函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 的值域为_____.

第 11 讲

函数奇偶性

知识精讲

一、奇偶性的概念

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ，如果 $\forall x \in I$ ，都有 $-x \in I$ ，且 $f(-x) = f(x)$ ，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数.

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ，如果 $\forall x \in I$ ，都有 $-x \in I$ ，且 $f(-x) = -f(x)$ ，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数.

【注】函数的奇偶性描述的是函数整体的性质.

二、奇偶函数的特点

特点	奇函数	偶函数
函数解析式	$f(-x) = -f(x)$	$f(-x) = f(x)$
函数图象	关于坐标原点对称	关于 y 轴对称
$x = 0$ 处	若 $0 \in I$ ，则 $f(0) = 0$	无

经典例题

考向1 奇偶性的概念

例1 (2021·青海西宁市期末)

下列说法不正确的是 ()

- A. 奇函数的图象关于原点对称，但不一定过原点
- B. 偶函数的图象关于 y 轴对称，但不一定和轴相交
- C. 若偶函数的图象与 x 轴有且仅有两交点，且横坐标分别为 x_1, x_2 ，则 $x_1 + x_2 = 0$
- D. 若奇函数的图象与 y 轴相交，交点不一定是原点

相似题1_例1 (2011·江苏月考【文】)

下面四个结论中, 正确命题的序号是_____.

- ①偶函数的图象一定与 y 轴相交. ②奇函数的图象一定通过原点. ③偶函数的图象关于 y 轴对称.
④既是奇函数, 又是偶函数的函数一定是 $f(x) = 0$ ($x \in \mathbf{R}$).

考向2 奇偶性的图象特征

例2 (2022·辽宁铁岭市期中)

$f(x) = x - \frac{1}{x}$ 的图象 ()

- A. 关于原点对称 B. 关于 x 轴对称 C. 关于 y 轴对称 D. 关于直线 $y = x$ 对称

相似题1_例2 (2012·广东梅州市月考)

函数 $f(x) = \frac{2012}{x} + x$ 的图象关于 () 对称.

- A. x 轴 B. y 轴 C. 原点 D. 直线 $y = x$

相似题2_例2 (2017·内蒙古乌兰察布市期中【理】)

在直角坐标系中, 函数 $y = |x|$ 的图象 ()

- A. 关于 $y = x$ 对称 B. 关于原点对称 C. 关于 x 轴对称 D. 关于 y 轴对称

考向3 定义法证明奇偶性

例3 (2018·北京海淀区期中)

判别并证明函数 $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ 的奇偶性.

相似题1_例3 (2021·云南文山壮族苗族自治州期中)

已知函数 $f(x) = 2x - \frac{a}{x}$, 且 $f(2) = \frac{9}{2}$.

- (1) 求实数 a 的值;
(2) 判断该函数的奇偶性.

相似题2_例3

已知函数 $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的定义域;
- (2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性并证明.

第 12 讲

奇偶性的判断

知识精讲

判断奇偶性的方法

1. 定义法:

(1) 判断函数定义域是否关于原点对称, 若不对称, 则是非奇非偶函数;

(2) 若定义域关于原点对称, 计算 $f(-x)$ 并确定其与 $f(x)$ 的关系, 若 $f(-x) = f(x)$, 则是偶函数, 若 $f(-x) = -f(x)$, 则是奇函数, 否则是非奇非偶函数.

2. 图象法:

若图象关于原点对称, 则函数为奇函数; 若图象关于 y 轴对称, 则函数为偶函数.

3. 性质法:

若 $f(x)$, $g(x)$ 在相同定义域上具有奇偶性, 则

(1) 奇 $\pm$ 奇 = 奇; (2) 奇 $\times$ 奇 = 偶; (3) 偶 $\pm$ 偶 = 偶; (4) 偶 $\times$ 偶 = 偶; (5) 奇 $\times$ 偶 = 奇.

经典例题

考向1 常见函数奇偶性判断

例1 (2022·安徽芜湖市期中)

下列函数中为偶函数的是 ()

A. $y = \sqrt{x}$

B. $y = x - 1$

C. $y = x^2$

D. $y = x^3$

相似题1_例1 (2018·江苏宿迁市期中)

下列函数中是偶函数的是 ()

A. $y = x^4 (x > 0)$

B. $y = |x + 2|$

C. $y = \frac{1}{x^2}$

D. $y = 2x - 1$

考向2 奇偶性的性质

例2 (2022·江苏连云港市同步)

函数 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 在公共定义域内, 下列结论一定正确的是 ()

- A. $f(x) + g(x)$ 为奇函 数 B. $f(x) + g(x)$ 为偶函 数 C. $f(x)g(x)$ 为奇函数 D. $f(x)g(x)$ 为偶函数

相似题1_例2 (2017·浙江金华市月考)

若函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 是奇函数, 函数 $g(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 是偶函数, 则 ()

- A. 函数 $f[g(x)]$ 是奇函数
- B. 函数 $g[f(x)]$ 是奇函数
- C. 函数 $f(x) \cdot g(x)$ 是奇函数
- D. 函数 $f(x) + g(x)$ 是奇函数

相似题2 例2 (2020·山东济宁市期中) (多选)

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $f(x)g(x)$ 是奇函数
- B. $|f(x)|g(x)$ 是奇函数
- C. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数
- D. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

考向3 分段函数奇偶性

例3 (2021·上海徐汇区月考)

函数 $f(x) = \begin{cases} x(x+2), & x \geq 0 \\ x(2-x), & x < 0 \end{cases}$ 的奇偶性为_____.

相似题1_例3 (2022·湖北武汉市期末) (多选)

若函数 $f(x)$ 在其定义域内是奇函数或偶函数, 则称 $f(x)$ 具有奇偶性. 以下函数中, 具有奇偶性的函数是 ()

A. $f_1(x) = (x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

B. $f_2(x) = \frac{\sqrt{3-x^2}}{|x-3|-3}$

C. $f_3(x) = \frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2}$

D. $f_4(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x \leq 1 \\ -x+1, & x > 1 \end{cases}$

相似题2_例3 (2021·吉林松原市期末【理】)

判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2};$

(2) $f(x) = \begin{cases} x^2+x, & x < 0 \\ -x^2+x, & x > 0 \end{cases}.$

第 13 讲

奇偶性求值



经典例题

考向1 知半解析式求值

例1 (2023·山东潍坊市期末)

已知函数 $f(x)$ 是奇函数, 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$, 则 $f(7)$ 的值等于 ()

- A. 66 B. -66 C. 88 D. -88

相似题1_例1 (2021·上海松江区期末)

已知 $y = f(x)$ 是奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x - 2$, 则 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 的值为_____.

相似题2_例1 (2023·宁夏石嘴山市模拟【文】)

已知函数 $f(x)$ 是奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 + x$, 则 $f(-1) =$ _____.

考向2 奇偶加减求值

例2 (2023·河北保定市月考)

已知函数 $f(x) = ax^5 + bx^3 + 3$ 且 $f(2023) = 16$, 求 $f(-2023)$ 的值为_____.

相似题1_例2 (2020·内蒙古乌兰察布市期中)

已知 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$, 且 $f(-2) = 10$, 那么 $f(2)$ 等于 ()

- A. -26 B. -18 C. -10 D. 10

相似题2_例2 (2020·陕西西安市中考模拟)

已知函数 $f(x) = ax^5 - bx^3 + cx - 3$, $f(-3) = 7$, 则 $f(3)$ 的值为 ()

- A. 13 B. -13 C. 7 D. -7

第 14 讲

奇偶性求参

 奇偶性求参

考向1 利用定义域的对称性

例1 (2018·云南楚雄彝族自治州月考【文】)

如果定义在区间 $[3-a, 5]$ 上的函数 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

相似题1_例1 (2022·上海徐汇区月考)

偶函数 $f(x)$ 的定义域为 (a^2-2, a) , 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

相似题2_例1 (2020·湖北荆门市期末)

已知一个奇函数的定义域为 $\{1, 2, a, b\}$, 则 $a+b = (\quad)$

- A. -3 B. 3 C. 0 D. 1

考向2 利用奇函数的特点

例2 (2023·宁夏石嘴山市期末【理】)

已知函数 $f(x) = \frac{2^x \cdot m - 1}{2^x + 1}$ 是奇函数, 则 $m = (\quad)$

- A. 1 B. -1 C. ± 1 D. 0

相似题1_例2 (2022·浙江温州市期末)

已知函数 $f(x) = \frac{a \cdot 2^x + 1}{2^x + 1}$ 是奇函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

相似题2_例2 (2023·湖南长沙市期中)

已知 $f(x) = 2^{-x} + a \cdot 2^x$ 为奇函数, 则 $f(1)$ 的值为 $(\quad)$

- A. $-\frac{3}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

考向3 利用奇偶性的对称特征

例3 (2023·江苏南京市一模)

若 $f(x) = x(x+1)(x+a)$ ($a \in \mathbf{R}$) 为奇函数, 则 a 的值为 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. -1或1

相似题1_例3

若函数 $f(x) = \frac{(2x+1)(x-a)}{x}$ 为奇函数, 则 $a =$ _____.

相似题2_例3 (2021·甘肃庆阳市期中)

函数 $f(x) = \frac{(x+2)(x+a)}{x^2}$ 为偶函数, 则实数 a 的值 _____.

例4 (2023·上海期中)

若函数 $f(x) = a \cdot 3^x + \frac{1}{3^x}$ 为偶函数, 则实数 $a =$ _____.

相似题1_例4 (2023·湖北黄冈市模拟)

已知函数 $f(x) = \frac{4^x + a}{2^x}$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

相似题2_例4 (2021·江西宜春市月考)

已知函数 $f(x) = ax^3 + (b-1)x^2 + 2ax$ 是定义域为 $[2a+1, -a]$ 的奇函数, 则 $a+b =$ _____.

第 15 讲

对勾函数

 经典例题

考向1 对勾函数的应用

例1 (2023·贵州黔西南布依族苗族自治州期末)

函数 $y = x + \frac{4}{x} - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值是 ()

- A. -2 B. 1 C. 2 D. 3

相似题1_例1 (2020·江苏宿迁市期中)

函数 $f(x) = 2x + \frac{1}{x} - 1$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上 ()

- A. 有最大值, 无最小值 B. 有最小值, 无最大值
C. 既有最大值, 又有最小值 D. 既无最大值, 又无最小值

相似题2_例1 (2023·贵州毕节市期末)

已知 $x > 0$, 则 $\sqrt{3} - 4x - \frac{3}{x}$ 的最大值为 _____.

例2 (2023·新疆哈密市期末)

若 $x > 4$, 则 $y = x + \frac{1}{x-4}$ 的最值情况是 ()

- A. 有最大值-6 B. 有最小值6 C. 有最大值-2 D. 有最小值2

相似题1_例2 (2022·甘肃白银市期末)

若 $x > 3$, 则 $4x + \frac{1}{x-3}$ 的最小值为 ()

- A. 4 B. 5 C. 16 D. 17

相似题2_例2 (2023·西藏林芝市期中)

函数 $y = x + \frac{1}{x+1}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值是 ()

- A. -2 B. 1 C. 2 D. 3

考向2 对勾函数的性质证明

例3 (2013·陕西榆林市月考)

用定义证明：已知函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

- (1) 证明函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是增函数,
(2) 求函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在区间 $[2, 6]$ 上的最大值和最小值.

相似题1_例3 (2022·贵州六盘水市月考)

已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

- (1) 判断函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上的单调性，并用定义给出证明；
(2) 若 $x \in [2, 3]$ ，求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值.

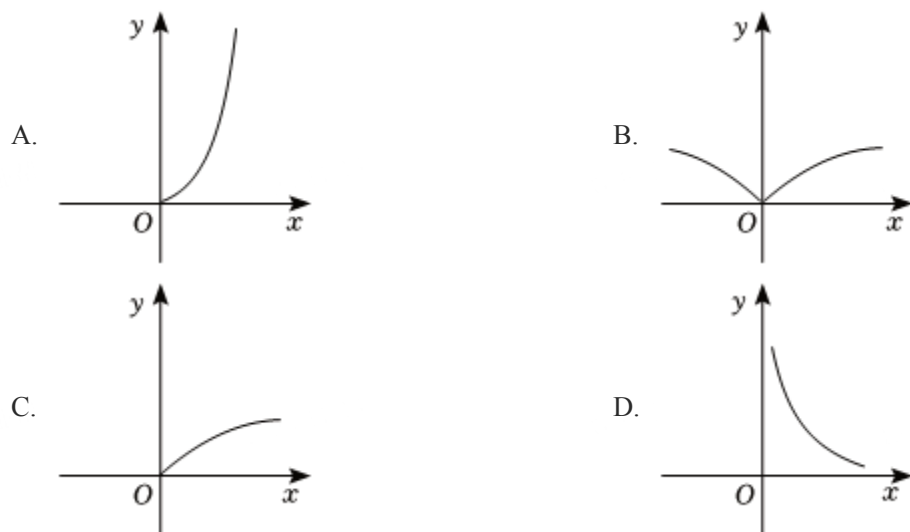
第 16 讲

幂函数及其性质

考向2 幂函数图象

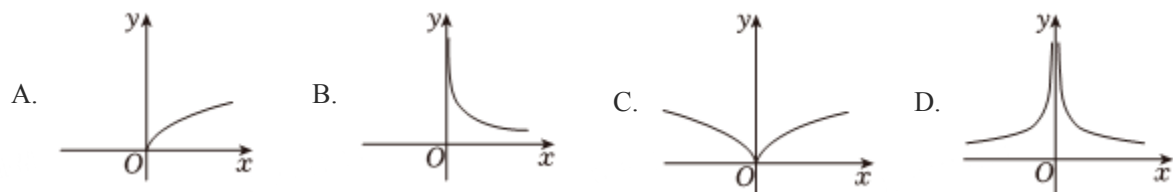
例2 (2023·陕西安康市期末)

已知幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $(16, 4)$ ，则函数 $f(x)$ 的图象是 ()



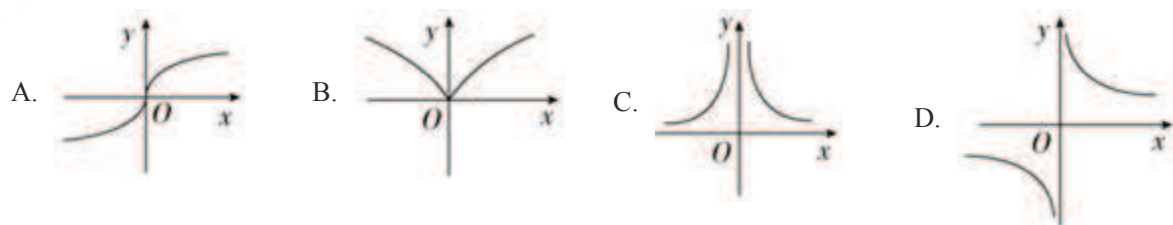
相似题1_例2 (2022·广西桂林市期末)

幂函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的大致图象是 ()



相似题2_例2

幂函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 的大致图象为 ()



考向3 幂函数性质

例3 (2023·四川成都市模拟【理】)

幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m - 3)x^m$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则下列说法正确的是 ()

- A. $m = 4$ B. $f(x)$ 是减函数 C. $f(x)$ 是奇函数 D. $f(x)$ 是偶函数

相似题1_例3 (2023·江苏镇江市月考)

已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 2m - 2)x^{m^2+m-2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 则 $f(m)$ 的值为 ()

- A. 3 B. 1 C. -3 D. -1

相似题2_例3 (2023·黑龙江哈尔滨市同步)

已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 2m - 2)x^m$ 满足 $f(2) < f(3)$, 则 $m =$ _____.

第 17 讲

幂函数的应用



经典例题

考向1 幂函数求值域

例1

设幂函数 $y = x^a$ 的图象经过点 $(8, 4)$, 则函数 $y = x^a$ 的值域为_____.

相似题1_例1 (2022·河南郑州市期中)

函数 $y = x^{-2}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上的最大值是 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. -1 C. 4 D. -4

相似题2_例1 (2019·北京)

函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 在 $[1, 4]$ 上的最大值与最小值之和为 ()

- A. 6 B. 3 C. 4 D. 5

考向2 幂函数不等式

例2 (2020·辽宁朝阳市月考)

已知函数 $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$, 则 $f(3x-1) < f(1+x^2)$ 的解集是_____.

相似题1_例2 (2009·湖北黄冈市月考)

若 $(a+1)^{\frac{1}{2}} < (3-2a)^{\frac{1}{2}}$, 试求 a 的取值范围.

相似题2_例2 (2021·上海宝山区期中)

已知实数 a 满足 $(2a-1)^{-\frac{3}{2}} > (a+1)^{-\frac{3}{2}}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

考向3 幂函数比大小

例3 (2021·新疆乌鲁木齐市期末)

设 $a = \left(\frac{2021}{2022}\right)^{\frac{2019}{2022}}$, $b = \left(\frac{2019}{2022}\right)^{\frac{2021}{2022}}$, $c = \left(\frac{2019}{2022}\right)^{\frac{2019}{2022}}$, 则 a , b , c 的大小关系是 ()

A. $a > b > c$

B. $a > c > b$

C. $c > a > b$

D. $b > c > a$

相似题1_例3 (2012·广西桂林市期中)

已知 $T_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, $T_2 = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$, $T_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, 则下列关系式正确的是 ()

A. $T_1 < T_2 < T_3$

B. $T_3 < T_1 < T_2$

C. $T_2 < T_3 < T_1$

D. $T_2 < T_1 < T_3$

相似题2_例3 (2022·福建泉州市期中)

下列比较大小正确的是 ()

A. $\sqrt{\pi}^{-\frac{4}{3}} > 3^{-\frac{1}{3}} > 2^{-\frac{2}{3}}$

B. $3^{-\frac{1}{3}} > \sqrt{\pi}^{-\frac{4}{3}} > 2^{-\frac{2}{3}}$

C. $3^{-\frac{1}{3}} > 2^{-\frac{2}{3}} > \sqrt{\pi}^{-\frac{4}{3}}$

D. $2^{-\frac{2}{3}} > 3^{-\frac{1}{3}} > \sqrt{\pi}^{-\frac{4}{3}}$

第 18 讲

指数幂运算

知识精讲

一、 n 次方根

一般地, 如果 $x^n = a$, 那么 x 叫做 a 的 n 次方根, 其中 $n > 1$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$.

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式, 这里 n 叫做根指数, a 叫做被开方数.

n 次方根有以下特点:

1. 负数没有偶次方根;
2. 0 的任何次方根都是 0, 记作 $\sqrt[n]{0} = 0$;
3. n 为奇数时, $\sqrt[n]{a^n} = a$; n 为偶数时 $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$.

二、有理指数幂

形如 a^x 的式子称为幂, 其中 a 称为幂的底数, x 称为幂的指数, 当 x 取有理数时, 式子 a^x 称为有理指数幂.

正数的正分数指数幂的意义是:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, n > 1).$$

正数的负分数指数幂的意义是:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, n > 1).$$

对于任意有理数 r, s , 有理数指数幂均有下面的运算性质 (实数指数幂也适用).

1. $a^r a^s = a^{r+s} \quad (a > 0)$
2. $(a^r)^s = a^{rs} \quad (a > 0)$
3. $(ab)^r = a^r b^r \quad (a > 0, b > 0)$

经典例题

考向1 公式化简

例1 (2022·福建厦门市期中)

设 $a > 0$, 则下列运算中正确的是 ()

- A. $a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{3}{2}} = a$ B. $a \div a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{2}}$ C. $a^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}} = 0$ D. $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = a$

相似题1_例1 (2022·广西桂林市期末)

设 $a > 0$, 则下列等式恒成立的是 ()

- A. $a^m + a^n = a^{m+n}$ B. $a^m \cdot a^n = a^{m-n}$ C. $(a^m)^n = a^{m+n}$ D. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

相似题2_例1 (2022·江苏镇江市同步)

下列根式、分数指数幂的互化中, 正确的是 ()

- A. $-\sqrt{x} = (-x)^{-\frac{1}{2}}$ ($x \neq 0$) B. $x^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$
C. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{y}{x}\right)^3}$ ($xy \neq 0$) D. $\sqrt[4]{y^2} = \frac{1}{y^2}$ ($y < 0$)

例2 (2023·江西抚州市期末)

$$\sqrt[3]{(\pi-2)^3} = (\quad)$$

- A. $\pi - 4$ B. $\pi - 3$ C. $\pi - 2$ D. $\pi - 1$

相似题1_例2 (2022·湖南娄底市期末) (多选)

下列运算正确的是 ()

- A. $\sqrt[3]{(-8)^3} = -8$ B. $\sqrt{(-10)^2} = -10$ C. $\sqrt[4]{(3-\pi)^4} = \pi - 3$ D. $\sqrt{(a-b)^2} = a - b$

相似题2_例2 (2022·河南洛阳市期中)

(1) 计算 $(0.1)^{-2} + \pi^0 + \left(\frac{1}{36}\right)^{-\frac{1}{2}} + 32^{\frac{3}{5}}$;

(2) 化简 $(\sqrt[3]{4-\pi})^3 + \sqrt{(3-\pi)^2}$.

例3 (2022·江苏南京市期中)

计算 $8^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} - (\sqrt{2} + 1)^0$ 的值为 ()

- A. $\frac{19}{8}$ B. $\frac{27}{8}$ C. $\frac{11}{8} - \sqrt{2}$ D. 0

相似题1_例3 (2023·陕西西安市月考)

计算: (1) $7\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{24} - 6\sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}$;

$$(2) 0.0081^{-0.25} - \left[3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^0\right]^{-1} \times \left[\left(81^{-0.25} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-0.5} - 10 \times 0.027^{\frac{1}{3}}\right];$$

$$(3) (\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3})^6 + \left(\sqrt{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{4}{3}} - 4 \times \left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} - (\sqrt[4]{2}) \times 8^{0.25} - (-2016)^0.$$

相似题2_例3 (2022·新疆期中)

计算下列各式的值.

$$(1) 2\sqrt{3} \times \sqrt[3]{1.5} \times \sqrt[6]{12};$$

$$(2) \left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - (-9.6)^0 - \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + (1.5)^{-2}.$$

考向2 指数幂的整体运算特征

例4 (2019·江西吉安市期中)

已知 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 5$, 则 $x + \frac{1}{x}$ 的值为 ()

- A. 5 B. 23 C. 25 D. 27

相似题1_例4 (2021·甘肃白银市期中)

计算:

$$(1) \left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - (-9.5)^0 - \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2};$$

$$(2) \text{若 } a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 2, \text{ 求 } a + a^{-1} \text{ 及 } a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} \text{ 的值.}$$

相似题2_例4 (2019·山东济宁市期中)

分别计算下列数值.

(1) $0.064^{-\frac{1}{3}} - (-\pi)^0 + 16^{\frac{3}{4}} + \sqrt{(3-\pi)^2}$;

(2) 已知 $x + x^{-1} = 4$, $(0 < x < 1)$, 求 $\frac{x^2 - x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}$.

第 19 讲

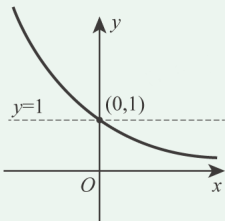
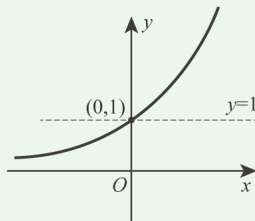
指数函数及其性质

知识精讲

一、指数函数的概念

一般地，函数 $y = a^x$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$) 叫做指数函数，其中指数 x 是自变量，定义域为 $\mathbf{R}$ 。

二、指数函数的图象和性质

	$0 < a < 1$	$a > 1$
图象		
定义域	$\mathbf{R}$	
值域	$(0, +\infty)$	
定点	过定点 $(0, 1)$ ，即 $x = 0$ 时， $y = 1$	
单调性	减函数	增函数

经典例题

考向1 指数函数概念

例1 (2022·上海徐汇区期末)

若指数函数的图像经过点 $\left(\frac{3}{2}, 27\right)$ ，则其解析式为 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

相似题1_例1 (2023·新疆巴音郭楞蒙古自治州期末)

指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 图像经过点 $(3, 27)$, 则 $f(2) = (\quad)$

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

相似题2_例1 (2022·黑龙江大庆市期末)

已知指数函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{1}{2}, 2)$, 则 $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

考向2 指数函数图象特征

例2 (2023·云南红河哈尼族彝族自治州模拟)

函数 $f(x) = a^{x-2} + 1$ (其中 $a > 0$, $a \neq 1$) 的图象恒过的定点是 ()

- A. $(2, 1)$ B. $(2, 2)$ C. $(1, 1)$ D. $(1, 2)$

相似题1_例2 (2023·黑龙江大庆市月考)

函数 $f(x) = a^{x+2} + 1$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图像过定点 P , 则点 P 的坐标是 .

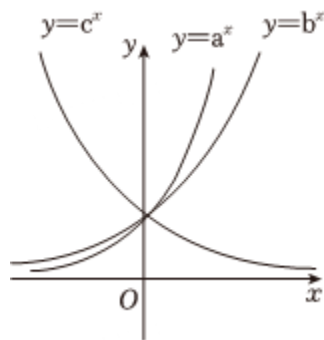
相似题2_例2 (2022·福建福州市期中)

函数 $f(x) = a^{x+5} - 1$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 P , 则点 P 的坐标为 .

例3 (2020·福建会考试题)

已知函数 $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ 的图象如图所示, 则实数 a , b , c 的大小关系是 ()

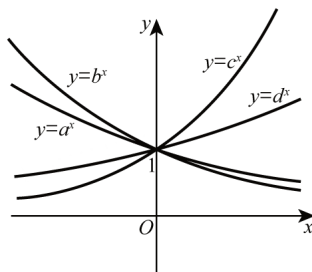
- A. $a < b < c$
B. $b < a < c$
C. $b < c < a$
D. $c < b < a$



相似题1_例3 (2022·江苏常州市月考)

函数① $y = a^x$; ② $y = b^x$; ③ $y = c^x$; ④ $y = d^x$ 的图象如图所示, a, b, c, d 分别是下列四个数: $\frac{5}{4}, \sqrt{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ 中的一个, 则 a, b, c, d 的值分别是 ()

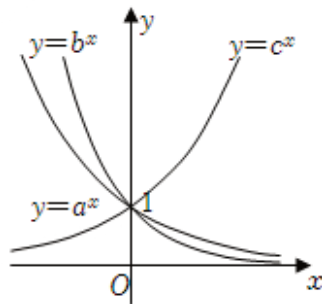
- A. $\frac{5}{4}, \sqrt{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$
- B. $\sqrt{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$
- C. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{3}, \frac{5}{4}$
- D. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \sqrt{3}$



相似题2_例3 (2021·山东济宁市月考)

若指数函数 $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ (其中 a, b, c 均为不等于1的正实数)的图象如图所示, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a > b > c$
- B. $c > a > b$
- C. $c > b > a$
- D. $b > a > c$



考向3 指数函数性质

例4 (2021·陕西榆林市一模【理】)

若指数函数 $y = (1 - 3a)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调递增函数, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$
- B. $(1, +\infty)$
- C. $\mathbf{R}$
- D. $(-\infty, 0)$

相似题1_例4 (2021·陕西西安市期中)

函数 $y = a^x - (b + 1)$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图像单调递增且过第四象限, 则必有 ()

A. $0 < a < 1, b > 0$

B. $0 < a < 1, b < 0$

C. $a > 1, b < 1$

D. $a > 1, b > 0$

相似题2_例4 (2016·江苏南通市期中)

已知指数函数 $f(x) = (a - 1)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是_____.

第 20 讲

指数函数的应用

 经典例题

考向1 指数不等式

例1 (2020·上海奉贤区月考)

不等式 $3^x > \frac{1}{27}$ 的解集为_____.

相似题1_例1 (2010·四川绵阳市期中)

不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} > 3^{1-x}$ 的解集为_____.

相似题2_例1 (2021·新疆乌鲁木齐市二模【文】)

不等式 $2^{x^2-3x+1} < \frac{1}{2}$ 的解集是_____.

考向2 指数函数值域

例2 (2023·山西大同市期末)

函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ($-3 \leq x \leq 1$) 的值域是_____.

相似题1_例2 (2022·上海青浦区月考)

函数 $y = 3^x + 2$ 的值域是_____.

相似题2_例2 (2022·广西南宁市月考)

已知 $y = 2^{x^2-2x}$, 当 $x \in [0, 3]$ 时, 其值域是_____.

第 21 讲

对数运算

知识精讲

一、对数的概念

1. 如果 $a^x = N$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数, 记作 $x = \log_a N$, 其中 a 叫做对数的底数, N 叫做真数.

2. 指对互换: 当 $a > 0$, 且 $a \neq 1$ 时, $a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$.

3. 对数恒等式: $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0 \Rightarrow a^{\log_a N} = N$.

4. 自然对数: 我们把以自然底数 e 为底的对数称为自然对数, 并把 $\log_e N$ 简记为 $\ln N$.

5. 常用对数: 以10为底的对数称为常用对数, 并把 $\log_{10} N$ 记为 $\lg N$.

【注】负数和零没有对数.

二、对数的运算法则

如果 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, 那么

1. $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$;

2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;

3. $\log_a M^n = n \log_a M$ ($n \in \mathbf{R}$).

三、对数换底公式

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$; $b > 0$; $c > 0$, 且 $c \neq 1$).

拓展式: 1. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$; $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;

2. $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$;

3. $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$.

经典例题

考向1 对数概念

例1 (多选)

对于下列说法, 其中错误说法为 ()

- A. 零和负数没有对数
- B. 任何一个指数式都可以化成对数式
- C. 以10为底的对数叫做自然对数
- D. 以e为底的对数叫做常用对数

相似题1_例1 (2014·上海高考真题)

若 $4^x = 16$, 则 $x =$ _____.

相似题2_例1 (2012·湖北黄石市期中)

在 $b = \log_{a-2}(5-a)$ 中, 实数 a 的取值范围是 _____.

考向2 对数运算

例2 (2023·贵州六盘水市期末)

$\lg 20 + \lg 5 + 2^{\log_2 3} =$ _____.

相似题1_例2 (2023·北京顺义区月考)

计算: $\log_3 15 - \log_3 5 - 2^{\log_2 3} + \ln \sqrt{e} =$ _____.

相似题2_例2 (2023·湖南长沙市期中)

化简: $8^{\frac{2}{3}} + \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 6 =$ _____.

考向3 换底公式

例3 (2014·福建宁德市期中)

$\log_3 7 \cdot \log_2 9 \cdot \log_{49} 2$ 的值是 _____.

相似题1_例3 (2022·浙江杭州市期末)

计算: $\log_3 \frac{1}{2} \times \log_4 9 + [(-2)^6]^{\frac{1}{2}} =$ _____.

相似题2_例3 (2019·北京)

$\log_2 25 \cdot \log_3 4 \cdot \log_5 9$ 的值为 ()

- A. 6 B. 8 C. 15 D. 30

例4 (2022·广西桂林市一模【文】)

已知 $\ln 2 = a$, $\ln 3 = b$, 那么 $\log_3 2$ 用含 a , b 的代数式表示为 ()

- A. $a + b$ B. $a - b$ C. ab D. $\frac{a}{b}$

相似题1_例4 (2022·上海月考)

已知 $3^x = 4^y = 6$, 则 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} =$ _____.

相似题2_例4 (2019·安徽蚌埠市月考)

如果 $\lg 2 = m$, $\lg 3 = n$, 则 $\frac{\lg 12}{\lg 15}$ 等于 ()

- A. $\frac{2m+n}{1+m+n}$ B. $\frac{m+2n}{1+m+n}$ C. $\frac{2m+n}{1-m+n}$ D. $\frac{m+2n}{1-m+n}$

第 22 讲

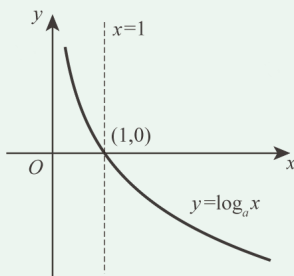
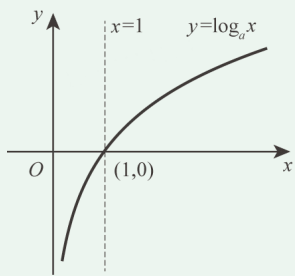
对数函数及其性质

知识精讲

一、对数函数的概念

一般地，函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$) 叫做**对数函数**，其中 x 是自变量，定义域是 $(0, +\infty)$ 。

二、对数函数的图象和性质

	$0 < a < 1$	$a > 1$
图象		
定义域	$(0, +\infty)$	
值域	$\mathbf{R}$	
性质	过定点 $(1, 0)$ ，即 $x = 1$ 时， $y = 0$	
	减函数	增函数

经典例题

考向1 对数函数概念

例1

若函数 $f(x) = (a^2 + a - 5) \log_a x$ 是对数函数，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

相似题1_例1

对数函数的图象过点 $M(125, 3)$, 则此对数函数的解析式为 ()

- A. $y = \log_5 x$ B. $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ C. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ D. $y = \log_3 x$

相似题2_例1 (2021·江苏徐州市同步)

若函数 $f(x) = \log_a x + (a^2 - 4a - 5)$ 是对数函数, 则实数 $a =$ _____.

考向2 对数函数定义域

例2 (2023·浙江杭州市模拟)

函数 $f(x) = \ln(2 - x)$ 的定义域是 ()

- A. $(2, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(-\infty, 2)$ D. $(-\infty, 2]$

相似题1_例2 (2023·上海三模)

函数 $y = \lg(1 + x) - \lg(x - 1)$ 的定义域是 _____.

相似题2_例2 (2023·海南海口市期中)

函数 $f(x) = \log_{\sqrt{5}}(-x^2 + x + 2)$ 的定义域为 _____.

考向3 对数函数图象特征

例3 (2023·浙江月考)

函数 $f(x) = \log_n(x + m)$ 恒过定点 $(-2, 0)$, 则 m 的值 ()

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

相似题1_例3 (2023·上海三模)

函数 $f(x) = 2 \log_a(2x - 1) + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 P , 则点 P 的坐标为 _____.

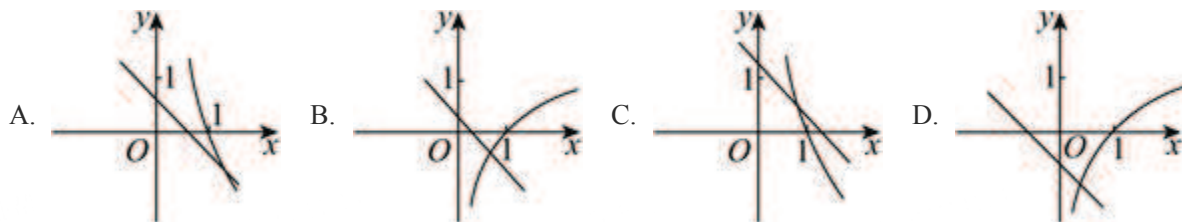
相似题2_例3 (2022·广西桂林市同步)

若 $b > a > 1$, 则函数 $y = \log_a(x + b)$ 的图象不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

例4 (2022·山东淄博市期末)

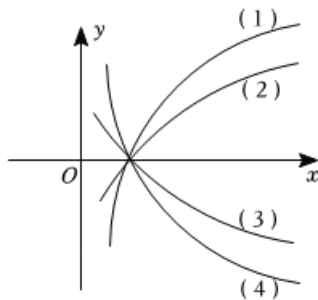
在同一直角坐标系中的函数 $y = \log_a x$ 与 $y = -x + a$ 的图象可能是 ()



相似题1_例4 (2022·四川泸州市期末)

如图 (1), (2), (3), (4) 中, 不属于函数 $y = \log_{\frac{1}{5}} x$, $y = \log_{\frac{1}{7}} x$, $y = \log_5 x$ 的一个是 ()

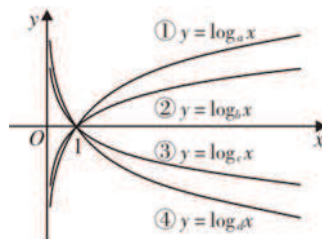
- A. (1)
B. (2)
C. (3)
D. (4)



相似题2_例4 (2022·广东广州市期末)

已知函数 ① $y = \log_a x$, ② $y = \log_b x$, ③ $y = \log_c x$, ④ $y = \log_d x$ 的大致图象如图所示, 则 ()

- A. $a + c < b + d$
B. $a + d < b + c$
C. $b + c < a + d$
D. $b + d < a + c$



考向4 对数函数性质

例5 (2012·福建三明市期中)

函数 $y = \log_{0.6} x$ 的单调减区间是 ()

- A. $\mathbf{R}$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $[0, +\infty)$

相似题1_例5 (2018·新疆喀什地区月考)

函数 $f(x) = \log_5(2x + 1)$ 的单调增区间是_____.

相似题2_例5 (2009·广东深圳市月考)

函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(1 - x)$ 的单调递增区间是 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, 1)$

第 23 讲

对数函数的应用



经典例题

考向1 对数不等式

例1 (2017·辽宁阜新市月考)

若 $\lg(2x-4) \leq 1$, 则 x 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 7]$ B. $(2, 7]$ C. $[7, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

相似题1_例1

设函数 $f(x) = \log_2(3x-1)$, 则使得 $2f(x) > f(x+2)$ 成立的 x 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$
 C. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ D. $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

相似题2_例1 (2019·安徽合肥市同步【文】)

已知函数 $f(x) = \ln x$, 若 $f(x-1) < 1$, 则实数 x 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, e+1)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(1, e+1)$ D. $(e+1, +\infty)$

考向2 对数函数值域

例2 (2013·新疆塔城地区期中)

函数 $f(x) = \log_2 x$ 在 $[1, 8]$ 上的值域是 ()

- A. $\mathbf{R}$ B. $[0, +\infty)$ C. $(-\infty, 3]$ D. $[0, 3]$

相似题1_例2 (2021·内蒙古呼伦贝尔市期中)

已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的定义域、值域;
 (2) 若 $x \in \left[1, \frac{9}{2}\right]$, 求函数 $f(x)$ 的值域.

相似题2_例2 (2023·安徽滁州市期中)

函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 11)$ 的值域为 _____.

第 24 讲

指对函数的反函数关系

 经典例题

例1 (2020·陕西榆林市期中)

在同一坐标系中, 函数 $y = 10^x$ 与 $y = \lg x$ 的图象之间的关系是 ()

- A. 关于 y 轴对称 B. 关于 x 轴对称 C. 关于原点对称 D. 关于直线 $y = x$ 对称

相似题1_例1 (2023·河南模拟【文】)

已知函数 $y = f(x)$ 的图象与 $y = \log_2(x + a)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 且满足 $f(1) + f(2) = 2$, 则 $a =$ ()

- A. 4 B. 2 C. 1 D. -1

相似题2_例1 (2023·陕西西安市月考)

已知函数 $f(x)$ 是函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的反函数, 且 $f(x)$ 的图像过点 $(6, 2)$, 则 $a =$ _____.

第 25 讲

函数零点

知识精讲

一、函数的零点

对于一般的函数 $y = f(x)$ ，我们把使 $f(x) = 0$ 的实数 x 叫做函数 $y = f(x)$ 的零点.

二、函数的零点与方程的解

函数 $y = f(x)$ 的零点就是方程 $f(x) = 0$ 的实数解，也就是函数 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴的公共点的横坐标.

方程 $f(x) = 0$ 有实数解

$\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 有零点

$\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴有公共点.

三、函数零点存在定理

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是一条连续不断的曲线，且有 $f(a)f(b) < 0$ ，那么，函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内至少有一个零点，即存在 $c \in (a, b)$ ，使得 $f(c) = 0$ ，这个 c 也就是方程 $f(x) = 0$ 的解.

经典例题

考向1 零点概念

例1 (2023·浙江期中)

函数 $f(x) = |x - 1| - x$ 的零点是_____.

相似题1_例1 (2022·山东淄博市期末)

函数 $f(x) = x^2 - 3x - 4$ 的零点是 ()

A. 1, -4

B. 4, -1

C. 1, 3

D. 不存在

相似题2_例1 (2023·黑龙江鸡西市期中)

函数 $f(x) = \ln(x - 2)$ 的零点为_____.

考向2 零点存在性定理

例2 (2022·宁夏银川市月考)

函数 $f(x) = \frac{4}{x} - 2^x$ 的零点所在区间是 ()

- A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 3)$

相似题1_例2 (2021·云南红河哈尼族彝族自治州期中)

函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x + 2$ 的零点所在区间为 ()

- A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 3)$

相似题2_例2 (2023·江西九江市期末)

函数 $f(x) = \sqrt{x} + x - 3$ 的零点所在区间是 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, 3)$ D. $(3, 4)$

考向3 函数零点与方程的根

例3 (2023·福建福州市期末)

方程 $x + \ln x - 3 = 0$ 的根所在区间为 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, 3)$ D. $(3, 4)$

相似题1_例3 (2022·江西宜春市同步)

方程 $\lg x + x = 2$ 的解所在的区间为 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, 3)$ D. $(3, 4)$

相似题2_例3 (2023·甘肃期末)

若 x_0 是方程 $2^x = 12 - 3x$ 的解, 则 $x_0 \in$ ()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, 3)$ D. $(3, 4)$

第 26 讲

函数零点的应用



经典例题

考向1 零点个数直接求解

例1 (2020·福建会考试题)

函数 $f(x) = x^2 + x$ 的零点个数为_____.

相似题1_例1 (2021·黑龙江鸡西市期中【理】)

函数 $f(x) = \ln|x|$ 的零点个数为_____.

相似题2_例1 (2017·贵州遵义市期末【文】)

函数 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 的零点的个数为 ()

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

考向2 单调性估计零点个数

例2 (2012·浙江杭州市期中【文】)

函数 $f(x) = e^x + 2x - 5$ 的零点个数是 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

相似题1_例2 (2020·北京海淀区期末)

函数 $f(x) = \ln x + x + \sqrt{2}$ 的零点个数是_____.

相似题2_例2 (2020·安徽淮南市一模【文】)

函数 $f(x) = 3 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 零点的个数是 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

考向3 零点与图象

例3 (2021·江苏徐州市单元测试)

函数 $f(x) = x^2 - 2^x$ 的零点个数是_____个.

相似题1_例3 (2021·河北邯郸市期末) (多选)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x + 3, & x \leq 0 \end{cases}$ 则 ()

- A. $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$
- B. $f(x) = 2$ 的解集为 $\{1\}$
- C. 若 $f(x) = a$ 有三个不同的根, 则实数 $a \in (2, 3]$
- D. $f(x)$ 存在最大值3和最小值2

相似题2_例3 (2023·山东滨州市期中)

已知 $f(x) = \begin{cases} -x(x+4), & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$.

- (1) 求 $f(f(-2))$;
- (2) 若 $f(a) > 3$, 求 a 的取值范围;
- (3) 若其图像与 $y = b$ 有三个交点, 求 b 的取值范围.

第 27 讲

二分法

知识精讲

二分法

对于在区间 $[a, b]$ 上图象连续不断且 $f(a)f(b) < 0$ 的函数 $y = f(x)$ ，通过不断地把它的零点所在区间一分为二，使所得区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫做二分法。

给定精确度 ε ，用二分法求函数 $y = f(x)$ 零点 x_0 的近似值的一般步骤如下：

1. 确定零点 x_0 的初始区间 $[a, b]$ ，验证 $f(a)f(b) < 0$ 。
2. 求区间 (a, b) 的中点 c 。
3. 计算 $f(c)$ ，并进一步确定零点所在的区间：
 - (1) 若 $f(c) = 0$ （此时 $x_0 = c$ ），则 c 就是函数的零点。
 - (2) 若 $f(a)f(c) < 0$ （此时 $x_0 \in (a, c)$ ），则令 $b = c$ 。
 - (3) 若 $f(c)f(b) < 0$ （此时 $x_0 \in (c, b)$ ），则令 $a = c$ 。
4. 判断是否达到精确度 ε ：若 $|a - b| < \varepsilon$ ，则得到零点近似值 a （或 b ）；否则重复步骤 2~4。

经典例题

考向1 二分法

例1（2022·广西桂林市期末）

用二分法研究函数 $f(x) = x^3 + 2x - 1$ 的零点时，第一次计算，得 $f(0) < 0$ ， $f(0.5) > 0$ ，第二次应计算 $f(x_1)$ ，则 x_1 等于（ ）

- A. 1 B. -1 C. 0.25 D. 0.75

相似题1_例1（2023·浙江杭州市期中）

下列函数中不能用二分法求零点的是（ ）

- A. $y = 3x - 1$ B. $y = x^3$ C. $y = |x|$ D. $y = \ln x$

相似题2_例1 (2023·内蒙古呼和浩特市月考)

根据表格中的数据, 可以判定方程 $e^x - (x + 3) = 0$, $e \approx 2.72$ 的一个根所在的区间是 ()

X	-1	0	1	2	3
e^x	0.37	1	2.72	7.40	20.12
$x + 3$	2	3	4	5	6

- A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 3)$

考向2 二分法精确度

例2 (2021·湖北武汉市期末) (多选)

用二分法求函数 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$ 的一个正零点的近似值 (精确度为 0.1) 时, 依次计算得到如下数据: $f(1) = -2$, $f(1.5) = 0.625$, $f(1.25) \approx -0.984$, $f(1.375) \approx -0.260$, 关于下一步的说法不正确的是 ()

- A. 已经达到精确度的要求, 可以取 1.4 作为近似值
B. 已经达到精确度的要求, 可以取 1.375 作为近似值
C. 没有达到精确度的要求, 应该接着计算 $f(1.4375)$
D. 没有达到精确度的要求, 应该接着计算 $f(1.3125)$

相似题1_例2 (2020·江苏月考)

用二分法求方程 $x^2 = 2$ 的正实根的近似解 (精确度 0.001) 时, 如果我们选取初始区间是 $[1.4, 1.5]$, 则要达到精确度至少需要计算的次数是 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

相似题2_例2 (2022·四川成都市期末)

用二分法求函数 $f(x) = \ln(x + 1) + x - 1$ 在区间 $(0, 1)$ 上近似解, 要求精确度为 0.01 时, 所需二分区间次数最少为 _____ 次.

第 28 讲

函数应用题

经典例题

考向1 指对函数的应用

例1 (2023·辽宁葫芦岛市一模)

艾萨克·牛顿，英国皇家学会会长，英国著名的物理学家，著有《自然哲学的数学原理》、《光学》为太阳中心说提供了强有力的理论支持，推动了科学革命. 牛顿曾经提出了常温环境下的温度冷却模型： $\theta = (\theta_1 - \theta_0)e^{-kt} + \theta_0$ ，其中 t 为时间（单位：min， θ_0 为环境温度， θ_1 为物体初始温度， θ 为冷却后温度），假设在室内温度为 20°C 的情况下，一桶咖啡由 100°C 降低到 60°C 需要20 min，则 k 的值为（ ）

- A. $\frac{\ln 2}{20}$
- B. $\frac{\ln 3}{20}$
- C. $-\frac{\ln 2}{10}$
- D. $-\frac{\ln 3}{10}$



相似题1_例1 (2023·湖北武汉市期末)

某地GDP的年平均增长率为6.5%，按此增长率，（ ）年后该地GDP会翻两番（ $\lg 1.065 \approx 0.0273$ ， $\lg 2 \approx 0.301$ ，结果精确到整数）

- A. 20
- B. 21
- C. 22
- D. 23

相似题2_例1 (2023·黑龙江鹤岗市同步)

北京时间2023年2月10日0时16分, 经过约7小时的出舱活动, 神舟十五号航天员费俊龙、邓清明、张陆密切协同, 圆满完成出舱活动全部既定任务, 出舱活动取得圆满成功. 载人飞船进入太空需要搭载运载火箭, 火箭在发射时会产生巨大的噪声, 已知声音的声强级 $d(x)$ (单位: dB) 与声强 x (单位: W/m^2) 满足关系式: $d(x) = 10 \lg \frac{x}{10^{-12}}$, 若某人交谈时的声强级约为 $60dB$, 且火箭发射时的声强与此人交谈时的声强的比值约为 $10^{7.8}$, 则火箭发射时的声强级约为 ()

- A. $125dB$ B. $132dB$ C. $138dB$ D. $156dB$

考向2 生活中的最值

例2 (2022·湖南长沙市期末)

某小型服装厂生产一种风衣, 日销售量 x (件) 与单价 P (元) 之间的关系为 $P = 160 - 2x$, 生产 x 件所需成本为 C (元), 其中 $C = (500 + 30x)$ 元, 若要求每天获利不少于1300元, 则日销售量 x 的取值范围是 ()

- A. $\{x | 20 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*\}$ B. $\{x | 15 \leq x \leq 45, x \in \mathbf{N}^*\}$
C. $\{x | 15 \leq x < 30, x \in \mathbf{N}^*\}$ D. $\{x | 20 \leq x \leq 45, x \in \mathbf{N}^*\}$

相似题1_例2 (2023·四川绵阳市模拟【理】)

一种在恒温大棚里种植的蔬菜的株高 y (单位: cm) 与温度 x (单位: $^{\circ}C, 0 < x \leq 30$) 满足关系式 $y = 111.54 - \frac{10}{x}$, 市场中一吨这种蔬菜的利润 z (单位: 百元) 与 x, y 的关系为 $z = 10y - x$, 则 z 的最大值为 ()

- A. 1095.4 B. 995.4 C. 990.4 D. 895.4

相似题2_例2 (2022·广东深圳市期末)

某公司带来了高端智能家属产品参展，供购商洽谈采购，并决定大量投放中国市场已知该产品年固定研发成本50万元，每生产一台需另投入60元．设该公司一年内生产该产品 x 万台且全部售完，

每万台的销售收入为 $G(x)$ 万元， $G(x) = \begin{cases} 240 - 3x, & 0 < x \leq 20 \\ 50 + \frac{3000}{x+1} - \frac{6000}{x(x+1)}, & x > 20 \end{cases}$ ．

- (1) 求年利润 s （万元）关于年产量 x （万台）的函数解析式；（利润=销售收入-成本）
- (2) 当年产量为多少万台时，该公司获得的利润最大？并求出最大利润．

第1讲

例1

答案：B

解答：若 $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$, 则有：二次函数开口向下，对称轴 $x = -\frac{b}{2a} > 0$ ，与 y 轴的交点位于 x 轴下方
符合条件的图象只有选项B

故选：B.

相似题1_例1

答案：C

解答：对于A，直线方程为 $y = 2x + b$, $2 > 0$

则直线方程过一三象限，故A错误

对于B，直线方程 $y = 2x + b$, $b > 0$

二次函数的对称轴为 $-\frac{b}{2} > 0$ ，解得 $b < 0$ ，故B错误

对于C，直线方程 $y = 2x + b$, $b < 0$

二次函数的对称轴为 $-\frac{b}{2} > 0$ ，解得 $b < 0$ ，故C正确

对于D， $y = 2x^2 + bx + c$ 开口向下，故D错误

故选：C.

相似题2_例1

答案：B

解答：二次函数开口向下， $a < 0$ ，A选项错误

由图可知，二次函数对称轴为 $x = 1$ ， $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根是 -1

根据对称性可知另一个根是 3 ，B选项正确

由图可知，当 $x = 0$ 时， $y = c > 0$ ，C选项错误

由图可知，当 $x < 1$ 时， y 随 x 的增大而增大，D选项错误

故选：B.

例2

答案: A

解答: 由于 $f(x)$ 是二次函数, 则二次项系数 $a \neq 0$

依题意, $f(x) < 0$ 对于 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则二次函数开口必然向下, 且和 x 轴没有交点

$$\text{即} \begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 4a^2 + 8a < 0 \end{cases}, \text{解得 } -2 < a < 0$$

故选: A.

相似题1_例2

答案: B

解答: 因为二次函数的图象都在 x 下方

$$\text{所以} \begin{cases} a < 0 \\ a^2 + 4a < 0 \end{cases}, \text{故 } -4 < a < 0$$

故选: B.

相似题2_例2

答案: A

解答: 当 $m = 0$ 时, 方程为 $3 \neq 0$, 满足题意

当 $m \neq 0$ 时, 若不等式 $mx^2 - 4mx + 3 \neq 0$ 对任意实数 x 均成立

$$\text{则} \begin{cases} m \neq 0 \text{ ①} \\ \Delta < 0 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\text{由②得, } \Delta = (-4m)^2 - 4 \times 3 \cdot m = 16m^2 - 12m < 0$$

$$\text{解得 } 0 < m < \frac{3}{4}$$

$$\text{综上所述, } m \in \left[0, \frac{3}{4}\right)$$

故选: A.

例3

答案: B

解答: 根据题意 $y = -(x-1)^2 + h$ 的图象抛物线开口向下, 对称轴为 $x = 1$

$\therefore$ 当 $x \leq 1$ 时, 函数 $y = -(x-1)^2 + h$ 单调递增

当 $x \geq 1$ 时, 函数 $y = -(x-1)^2 + h$ 单调递减

$$\text{又} \because |1-0| < |3-1| < |-4-1|$$

$$\therefore y_1 > y_3 > y_2$$

故选: B.

相似题1_例3

答案: $y_3 < y_1 < y_2$

解答: $\because y = -ax^2 + 2ax - 1 \ (a > 0)$

$\therefore$ 其图象的开口向下, 对称轴为直线 $x = -\frac{2a}{2 \times (-a)} = 1$

$\therefore$ 当 $x < 1$ 时, y 随着 x 的增大而增大

而点 $C(4, y_3)$ 关于直线 $x = 1$ 的对称点是 $(-2, y_3)$

$\therefore -2 < -1 < -0.5$

$\therefore y_3 < y_1 < y_2$

故答案为: $y_3 < y_1 < y_2$.

相似题2_例3

答案: A

解答: 二次函数 $y = -x^2 - 2x$ 的对称轴为 $x = -1$, 开口向下, 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增

由于 $m < -2$, 则 $m - 1 < -3$, $m < -2$, $m + 1 < -1$, 又 $m - 1 < m < m + 1$

所以 $y_1 < y_2 < y_3$

故选: A.

第2讲

例1

答案: BD

解答: 对于A选项, 对于A中的元素0, 由对应关系 f 的作用下得0

但0不属于B, 即A中的元素0在B中没有元素与之对应, 不是函数, 故A错误

对于B选项, 对于A中的元素 ± 1 , 在对应关系 f 的作用下

与B中的元素1对应; 对于A中的元素 ± 2 , 在对应关系 f 的作用下

与B中的元素4对应. 所以满足A中任意元素与B中唯一元素对应

是“多对一”的对应, 所以是函数, 故B正确

对于C选项, 对于A中的元素1, 由对应关系 f 的作用下与B中元素1, -1对应

不满足A中任意元素与B中唯一元素对应, 不是函数, 故C错误

对于D选项, 对于A中的任意元素, 在对应关系 f 的作用下, B中都有唯一元素与之对应, 所以是函数

故选: BD.

相似题1_例1

答案: C

解答: 因为集合 $P = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, 集合 $Q = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$

$f: x \rightarrow y = \frac{1}{2}x$, $\therefore$ 若 $0 \leq x \leq 4$, 可得 $0 \leq y \leq 2$, 故能构成从P到Q的函数, 选项A错误

$f: x \rightarrow y = \frac{1}{3}x$, $\therefore$ 若 $0 \leq x \leq 4$, 可得 $0 \leq y \leq \frac{4}{3} < 2$, 故能构成从P到Q的函数, 选项B错误

$f: x \rightarrow y = \frac{2}{3}x$, $\therefore$ 若 $x = 4$, 可得 $y = \frac{8}{3} > 2$, 故不能构成从P到Q的函数, 选项C正确

$f: x \rightarrow y = \frac{1}{8}x^2$, $\therefore$ 若 $0 \leq x \leq 4$, 可得 $0 \leq y \leq 2$, 故能构成从P到Q的函数, 选项D错误

故选: C.

相似题2_例1

答案: C

解答: 根据函数的定义, 当自变量 x 在它的允许取值范围内任意取一个值

y 都有唯一确定的值与之对应, 故①④表示 y 是 x 的函数

在②中由 $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$, 知 $x \in \emptyset$, 因为函数定义域不能是空集

所以②不表示 y 是 x 的函数

在③中, 当 $x = 0$ 时, y 对应的两个值, 故不表示 y 是 x 的函数

故选: C.

例2

答案: ABD

解答: 根据函数的定义可知, 定义域内的每一个 x 只有一个 y 它对应

因此不能出现一对多的情况, 所以C不是函数图象, ABD是函数图象

故选: ABD.

相似题1_例2

答案: A

解答: 由函数的定义, 一个自变量对应一个函数值

故A错

故选: A.

相似题2_例2

答案: A

解答: 对于A, 是函数关系, 定义域为 $[-2, 2]$, 值域为 $[0, 2]$, 符合题意

对于B, 当 $x \in [-2, 2]$ 时, 1个 x 的值对应2个 y 的值, 不是函数关系, 不符合题意

对于C, 是函数关系, 定义域为 $[-2, 2]$, 值域不是 $[0, 2]$, 不符合题意

对于D, 是函数关系, 定义域为 $[-2, 0]$, 值域是 $[0, 2]$, 不符合题意

故选: A.

例3

答案: D

解答: 函数 $y = x$ 的定义域 $x \in \mathbf{R}$, 值域 $y \in \mathbf{R}$

对于A, $y = \frac{x^2}{x}$ 中, $x \neq 0$, A错误

对于B, $y = \sqrt{x^2} = |x|$, B错误

对于C, $y = (\sqrt{x})^2$, $x \geq 0$, C错误

对于D, 当 $x < 0$ 时, $y = -|x| = x$, 当 $x \geq 0$ 时, $y = |x| = x$

与函数 $y = x$ 是同一个函数, D正确

故选: D.

相似题1_例3

答案: CD

解答: 对于A, 函数 $y = \frac{|x|}{x}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$

函数 $y = 1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 两函数定义域不同, A错误

对于B, 函数 $y = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$, 定义域为 $\mathbf{R}$

与 $y = x-1$ 解析式不同, B错误

对于C, 函数 $y = \frac{(\sqrt{x})^2}{x} = 1$ 的定义域为 $\{x | x > 0\}$

函数 $y = \frac{x}{(\sqrt{x})^2} = 1$ 的定义域为 $\{x | x > 0\}$, C正确

对于D, 函数 $y = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = x$, 定义域为 $\mathbf{R}$, D正确

故选: CD.

相似题2_例3

答案: D

解答: 对于A选项, $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3-x}} = \sqrt{\frac{x+3}{3-x}}$, 两个函数的定义域相同, 对应法则相同, 所以是同一函数

对于B选项, $y = e^x$, $s = e^t$, 两个函数的定义域相同, 都是 $\mathbf{R}$, 对应法则也相同, 所以是同一函数

对于C选项, 两个函数的定义域相同, 当 $x = 0$ 与 $x = 1$ 时, $x^2 = x$, 故两个函数对应法则也相同
所以是同一函数

对于D选项, $y = 1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, $y = x^0$ 的定义域是 $\{x | x \neq 0\}$, 两个函数的定义域不同

所以不是同一函数

故选: D.

第3讲

例1

答案: $[1, 2) \cup (2, +\infty)$

解答: 由题意得

$$\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}, \text{解得: } x \geq 1 \text{ 且 } x \neq 2$$

故函数的定义域是 $[1, 2) \cup (2, +\infty)$

故答案为: $[1, 2) \cup (2, +\infty)$.

相似题1_例1

答案: $(-4, 1)$

解答: 函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 - 3x + 4}}$ 中

$$\text{由 } -x^2 - 3x + 4 > 0$$

$$\text{整理得 } x^2 + 3x - 4 < 0$$

$$\text{解得 } -4 < x < 1$$

所以函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-4, 1)$

故答案为: $(-4, 1)$.

相似题2_例1

答案: C

解答: 由题意得: $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$, 解得: $x > 1$ 且 $x \neq 2$

故函数的定义域是 $\{x \mid x > 1 \text{ 且 } x \neq 2\}$

故选: C.

例2

解答: 由题意可知, 当 $x \geq 3$ 时, $ax - 2 \geq 0$ 恒成立

$$\text{所以 } \begin{cases} a > 0 \\ 3a - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } a \geq \frac{2}{3}$$

所以 a 的取值范围是 $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$

故答案为: $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

相似题1_例2

答案: $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$

解答: 由题意, $ax + 1 \geq 0$

当 $a = 0$ 时, 把 $x = -3$ 代入, 不等式成立

当 $a > 0$ 时, 得 $x \geq -\frac{1}{a}$, 则 $-\frac{1}{a} \leq -3$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{3}$

当 $a < 0$ 时, 把 $x = -3$ 代入, 不等式成立

综上所述, a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$

故答案为: $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$.

相似题2_例2

答案: $(3, +\infty)$

解答: 要使 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+t}}$ 有意义, 则 $x > -\frac{t}{3}$

$\because x \in [-1, 2]$ 时, $f(x)$ 恒有意义

$\therefore -\frac{t}{3} < -1$

$\therefore t > 3$

$\therefore$ 实数 t 的取值范围为 $(3, +\infty)$

故答案为: $(3, +\infty)$.

第4讲

例1

解答：由图形得， A 中任意元素在 B 中都有唯一的元素与之对应

故对应 $f: A \rightarrow B$ 是从集合 A 到集合 B 的函数

其中，定义域是： $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，值域是： $\{2, 3, 4, 5\}$

对应关系是图形中的对应： $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 4$

相似题1_例1

答案：AD

解答：对于集合 A 的每一个数都有唯一的数对应，满足函数的定义

则 $f: A \rightarrow B$ 是从集合 A 到集合 B 的函数，故A正确

函数的定义域为 A ，值域为 $\{2, 3, 8, 9\}$ ，是 B 的真子集

$f(3) = 9, f(5) = 3$ ，则 $f(3) = 3f(5)$ ，故D正确

故选：AD.

相似题2_例1

答案：A

解答：由函数的定义可知函数定义域中的每一个元素在值域中一定有唯一确定的元素与之对应，故A正确

函数的定义域和值域可以为有限集合，如 $f(x) = x + 1, x \in \{1, 2, 3\}$ ，则 $y \in \{2, 3, 4\}$ ，故B不对

根据函数定义可知，当定义域中只有一个元素时，值域也只有一个元素

但当值域只有一个元素时，定义域却不一定只有一个元素，如 $f(x) = 1, x \in \mathbf{R}$ ，C不对

由函数定义可知定义域和值域均是非空数集，D不对

故选：A.

例2

答案：C

解答：当 $x = 0$ 时， $y = 3 - 2 \times 0 = 3$

$\therefore$ 函数 $y = 3 - 2x$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减

$\therefore y \leq 3$

$\therefore$ 函数 $y = 3 - 2x (x \geq 0)$ 的值域是 $(-\infty, 3]$

故选：C.

相似题1_例2

答案: A

解答: 因为 $\sqrt{x} \geq 0$, $\sqrt{x} + 5 \geq 5$

所以函数 $f(x) = \sqrt{x} + 5$ 的值域为 $[5, +\infty)$

故选: A.

相似题2_例2

答案: B

解答: $\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ($x \in \mathbf{R}$)

$\therefore 1+x^2 \geq 1$

所以原函数的值域是 $(0, 1]$

故选: B.

例3

答案: C

解答: 由函数图象可知 $f(x)$ 的最小值为 -2 , 最大值为 $f(5)$

故选: C.

相似题1_例3

答案: C

解答: 由已知中函数的图象可得: 函数 $y = f(x)$ 的值域是 $[0, 6]$

故选: C.

相似题2_例3

答案: C

解答: 函数的定义域即自变量 x 的取值范围, 由图可知此函数的定义域为 $[-5, 0] \cup [2, 6)$

函数的值域即为函数值的取值范围, 由图可知此函数的值域为 $[0, +\infty)$

故选: C.

第5讲

例1

答案: A

解答: 正方形的边长为 $\frac{x}{4}$

$$\therefore \text{圆的直径 } 2y = \frac{\sqrt{2}x}{4}$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{2}x}{8}$$

故选: A.

相似题1_例1

解答: 由题意可得, 此函数定义域为: $\{x \mid 1 \leq x < 10, x \in \mathbf{N}^*\}$

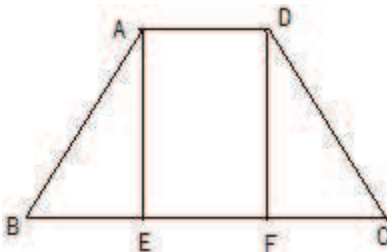
$$\text{所以 } S = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2$$

$$\text{整理得 } S = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{4}, \quad x \in \{x \mid 1 \leq x < 10, x \in \mathbf{N}^*\}$$

相似题2_例1

答案: $y = \frac{50}{x}, x \in (0, +\infty)$

解答: 如图等腰梯形 $ABCD$, 分别过 A 和 D 点作 $AE \perp BC$ 、 $DF \perp BC$, 垂足分别是 E 和 F



由题意知, $AD = x$, $BC = 3x$, 高 $AE = y$

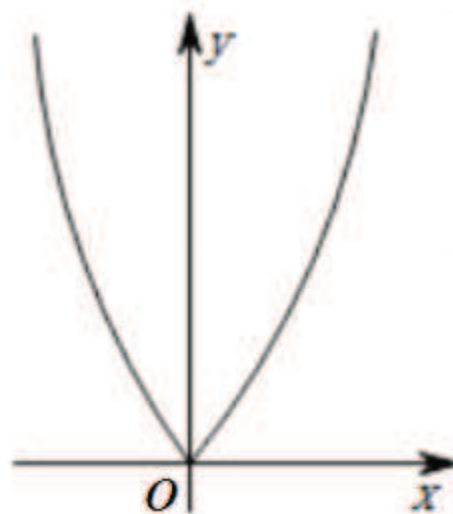
则等腰梯形 $ABCD$ 的面积 $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \times AE$

$$\text{即 } 100 = \frac{1}{2} \times 4xy, \text{ 解得 } y = \frac{50}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

故答案为: $y = \frac{50}{x}, x \in (0, +\infty)$.

例2

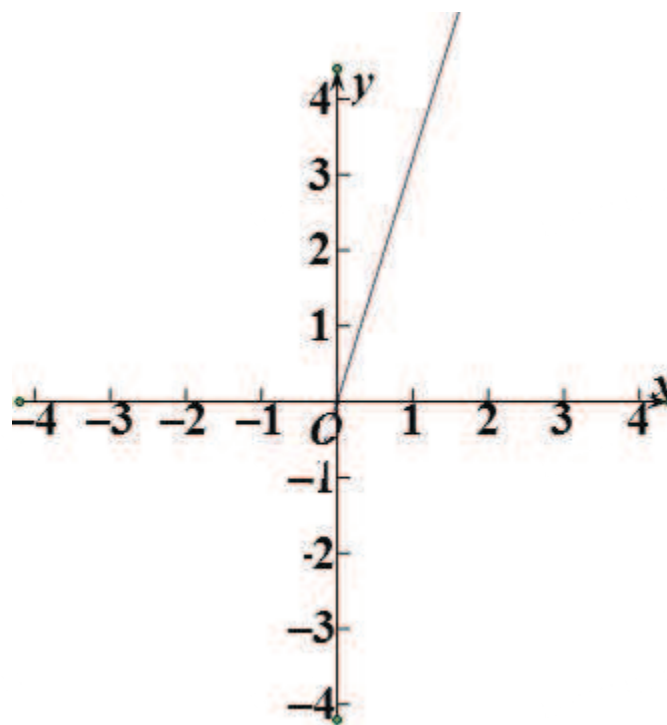
解答：函数 $y = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq 0 \\ x^2 - x, & x < 0 \end{cases}$ 的图象如图所示



相似题1_例2

解答：根据题意得出函数的解析式： $y = 3.2x, x \geq 0$

函数的图象表示如图所示

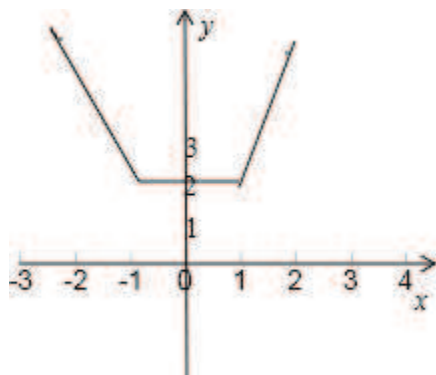


相似题2_例2

解答：

(1) 函数 $y = |x + 1| + |1 - x| = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$

(2) 据 (1) 的函数的解析式画出图象如图所示



例3

答案：1

解答：由表格可得 $f(2) = 4$, $f(4) = 1$

$$\therefore f[f(2)] = f(4) = 1$$

故答案为：1.

相似题1_例3

答案：D

解答：由已知可得 $f(-2) = 1$, $f[f(-2)] = f(1) = 2$

$$\text{所以 } f(-2) + f[f(-2)] = 1 + 2 = 3$$

故选：D.

相似题2_例3

答案：3

解答：由表可知 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $f(10) = 3$

$$\text{则 } f\left[10f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = f(10) = 3$$

故答案为：3.

第6讲

例1

答案: D

解答: 增函数的定义: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量 x_1, x_2 , $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数. 可判定 A, B 错, D 正确

对于 C, 比如 $y = \frac{1}{x}$ 不能叙述为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上是单调函数, 故错

故选: D.

相似题1_例1

答案: A

解答: 因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 对任意两个不相等的实数 a, b , 总有 $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} > 0$ 成立

即对任意两个不相等实数 a, b

若 $a < b$, 总有 $f(a) < f(b)$ 成立

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

故选: A.

相似题2_例1

答案: B

解答: $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$

则当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) > f(x_2)$

当 $x_1 > x_2$ 时, $f(x_1) < f(x_2)$

故函数 $f(x)$ 在定义域 (a, b) 上为减函数, 无法判断函数的奇偶性

故选: B.

例2

解答: 设 x_1, x_2 是 $\mathbf{R}$ 上的任意两个实数, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_1) - f(x_2) = (3x_1 + 2) - (3x_2 + 2) = 3(x_1 - x_2)$$

由 $x_1 < x_2$, 得 $x_1 - x_2 < 0$

于是 $f(x_1) - f(x_2) < 0$

即: $f(x_1) < f(x_2)$

$\therefore f(x) = 3x + 2$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

相似题1_例2

解答: 设 $x_2 > x_1 \geq 0$, 由于 $f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$

由题设可得 $x_1 - x_2 < 0$, 故有 $f(x_1) - f(x_2) < 0$

即 $f(x_1) < f(x_2)$

所以函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数

相似题2_例2

解答: 设 $x_1, x_2 \in (0, 1]$ 且 $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{1+x_1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1+x_2}{\sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt{x_2} + x_1\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} - x_2\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}} \\ &= \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} + \sqrt{x_1x_2}(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}} = \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(1 - \sqrt{x_1x_2})}{\sqrt{x_1x_2}} \end{aligned}$$

因为 $x_1, x_2 \in (0, 1]$ 且 $x_1 < x_2$

所以 $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} > 0$, $1 - \sqrt{x_1x_2} > 0$

所以 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$

所以 $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$ 在 $(0, 1]$ 上是减函数

例3

答案: D

解答: 若函数单调递减, 则对应图象为下降的

由图象知, 函数在 $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$ 上分别下降

则对应的单调递减区间为 $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$

故选: D.

相似题1_例3

答案: $(-\infty, 1], (1, +\infty)$

解答: 由图象得函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上递增, 在 $(1, +\infty)$ 上递增

故答案为: $(-\infty, 1], (1, +\infty)$.

相似题2_例3

解答: 在 $[-5, -2]$, $[1, 3]$ 上单调递减, 在 $[-2, 1]$, $[3, 6]$ 上单调递增

第7讲

例1

答案: C

解答: 选项A, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 但是在定义域上不是单调递减, 故A错误

选项B, 函数 $y = 1 - x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故B错误

选项C, $y = -x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 故C正确

选项D, $y = |x|$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故D错误

故选: C.

相似题1_例1

答案: ABC

解答: 对于A, $y = x$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上为增函数, 满足题意

对于B, $y = -x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上为增函数, 满足题意

对于C, $y = -\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上为增函数, 满足题意

对于D, $y = 1 - x$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上为减函数, 不满足题意

故选: ABC.

相似题2_例1

答案: C

解答: 对于A, $y = 3x + 5$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 故A不符合题意

对于B, $y = x^2 + 4$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 故B不符合题意

对于C, $y = 3 - x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 故C符合题意

对于D, $y = x^2 + 2x + 4$ 的图象开口向上, 对称轴为 $x = -1$

故函数在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 故D不符合题意

故选: C.

例2

解答: (1) 由于函数 $y = x$ 和 $y = x^3$ 均在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

因此 $f(x) = x^3 + x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

(2) 由于函数 $y = x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $y = \frac{3}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减

因此 $f(x) = x - \frac{3}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递增

相似题1_例2

答案：单调递增

解答：∵ $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增

$y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增

∴ $y = x^3 + x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增

故图象是单调递增的

故答案为：单调递增.

相似题2_例2

答案：D

解答： $f(x)$ ， $g(x)$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的单调函数

当单调性相同时， $f(x) + g(x)$ 的单调性与 $f(x)$ ， $g(x)$ 的单调性相同

$f(x) - g(x)$ 可能是增函数，也可能是减函数，也可能是常函数

如 $f(x) = x$ ， $g(x) = x$ ，故①，②错误

对于③，必须保证 $f(x)$ ， $g(x)$ 的值是正值，才有 $f(x) \cdot g(x)$ 单调递增，错误

对于④， $g(x)$ 单调递减，则 $-g(x)$ 单调递增， $f(x)$ 与 $-g(x)$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数

则 $f(x) - g(x)$ 单调递增，正确

对于⑤， $g(x)$ 单调递增，则 $-g(x)$ 单调递减， $f(x)$ 与 $-g(x)$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的单调减函数

则 $f(x) - g(x)$ 单调递减，正确

综合可得正确的是④⑤

故选：D.

例3

答案：A

解答： $x \geq 0$ 时， $g(x) = x$ ， $x < 0$ 时， $g(x) = -x$

故函数在 $[0, +\infty)$ 上递增

故选：A.

相似题1_例3

答案：A

解答：由题意 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$

故 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 递增

故选：A.

相似题2_例3

答案: B

解答: $\because y = |x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ -x + 2, & x < 2 \end{cases}$

$\therefore$ 函数 $y = |x - 2|$ 的单调递增区间是 $[2, +\infty)$

$\therefore f(x) = -|x - 2|$ 的单调递减区间是 $[2, +\infty)$

故选: B.

例4

答案: D

解答: 由题意, 函数 $f(x) = (k - 2)x + 3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

根据一次函数的图象与性质, 可得 $k - 2 > 0$, 即 $k > 2$

所以实数 k 的取值范围是 $(2, +\infty)$

故选: D.

相似题1_例4

答案: $(2, +\infty)$

解答: 关于 x 的函数 $y = (k - 2)x + 1$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数

所以: $k - 2 > 0$

解得: $k > 2$

所以实数 k 的取值范围为: $(2, +\infty)$

故答案为: $(2, +\infty)$.

相似题2_例4

解答: $\because f(x) = (2a - 1)x + b$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数

$\therefore 2a - 1 < 0$, 解得 $a < \frac{1}{2}$

故答案为: $a < \frac{1}{2}$.

第8讲

例1

答案: $f(-3) > f(-\pi)$

解答: $\because$ 函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1, x_2 \in R$ 都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是增函数

$\because -3 > -\pi$

$\therefore f(-3) > f(-\pi)$

故答案为: $f(-3) > f(-\pi)$.

相似题1_例1

答案: C

解答: $\because$ 对任意的 $0 < x_1 < x_2$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

$\therefore f(2) < f(\pi)$, 即 $a > b$

故选: C.

相似题2_例1

答案: $f(0) < f(3) < f(-4)$

解答: $\because$ 二次函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

$\therefore f(-4) = f(4)$

$\because f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数

$\therefore f(0) < f(3) < f(4)$

$\therefore f(0) < f(3) < f(-4)$

故答案为: $f(0) < f(3) < f(-4)$.

第9讲

例1

答案: $[-6, 10]$

解答: 根据题意, 设 $f(x) = x^2 - 6x + 3$

$$\text{则 } f(x) = x^2 - 6x + 3 = (x - 3)^2 - 6$$

由于 $x \in [-1, 4]$, 则函数的最大值为 $f(-1) = 16 - 6 = 10$, 最小值为 $f(3) = -6$

故函数的值域为 $[-6, 10]$

故答案为: $[-6, 10]$.

相似题1_例1

答案: A

解答: 函数 $f(x) = x^2 + x - 2$ 的对称轴为 $x = -\frac{1}{2}$

故函数 $f(x) = x^2 + x - 2$ 在 $[0, 2]$ 上单调递增

$$\text{又 } f(0) = -2, \quad f(2) = 4$$

所以函数 $f(x) = x^2 + x - 2$ ($x \in [0, 2]$) 的值域是 $[-2, 4]$

故选: A.

相似题2_例1

答案: A

解答: 函数 $f(x) = -2x^2 + 4x$ 的开口向下, 对称轴为 $x = 1$

所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增, 在 $[1, 2]$ 上单调递减

$$\text{所以 } f(x)_{\max} = f(1) = 2, \quad f(x)_{\min} = f(-1) = -6$$

所以函数 $f(x) = -2x^2 + 4x$, $x \in [-1, 2]$ 的值域为 $[-6, 2]$

故选: A.

例2

答案: B

解答: $y = \frac{3x+1}{x} = 3 + \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减

$$\text{所以 } 3 < 3 + \frac{1}{x} < 3 + 1 = 4$$

即函数的值域为 $(3, 4)$

故选: B.

相似题1_例2

答案: $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

解答: $\because y = \frac{2x+3}{3x-2}, \therefore 3xy - 2y = 2x + 3, x = \frac{2y+3}{3y-2}$
 $\therefore y \neq \frac{2}{3}$, 即函数的值域为 $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

相似题2_例2

答案: D

解答: 因为 $x^2 + 1 \geq 1$, 所以 $0 < \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$

即函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ 值域是 $(0, 1]$

故选: D.

例3

答案: A

解答: 因为已知函数是一次函数, 且 $a < 0$

所以函数在区间 $[0, 2]$ 上单调递减, 则当 $x = 0$ 时, 函数有最大值为 1

当 $x = 2$ 时, 函数有最小值为 $2a + 1$

故选: A.

相似题1_例3

答案: B

解答: $a > 0$ 时, 函数 $f(x) = ax + 1$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增

最大值与最小值的差为 $f(2) - f(1) = (2a + 1) - (a + 1) = 2$

解得 $a = 2$

$a < 0$ 时, 函数 $f(x) = ax + 1$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减

最大值与最小值的差为 $f(1) - f(2) = (a + 1) - (2a + 1) = 2$

解得 $a = -2$

$a = 0$ 时, 函数 $f(x) = ax + 1$ 在区间 $[1, 2]$ 上是常数, 不满足题意

所以实数 a 的值为 2 或 -2

故选: B.

第 10 讲

例1

答案: A

解答: 由题意可知, 因为定义在区间 $[0, 3]$ 上的函数 $y = f(x)$ 是减函数

所以函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 上取得最大值, 则它的最大值为 $f(0)$

故选: A.

相似题1_例1

答案: D

解答: $f(x) = x + \sqrt{x}$ 单调递增

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(9) = 12$

故选: D.

相似题2_例1

答案: $\left[-\frac{3}{2}, \frac{8}{3}\right]$

解答: 函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 时, $f(x)$ 单调递增

所以 $x = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最小值为 $-\frac{3}{2}$, $x = 3$ 时, $f(x)$ 取得最大值为 $\frac{8}{3}$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{3}{2}, \frac{8}{3}\right]$

故答案为: $\left[-\frac{3}{2}, \frac{8}{3}\right]$.

第 11 讲

例1

答案: D

解答: 奇函数的图象关于原点对称, 但不一定过原点, 正确, 比如 $f(x) = \frac{1}{x}$

偶函数的图象关于 y 轴对称, 但不一定和轴相交, 正确, 比如函数 $f(x) = \log_2 |x|$

若偶函数的图象与 x 轴有且仅有两交点, 且横坐标分别为 x_1, x_2 , 则交点关于 y 轴对称, 则 $x_1 + x_2 = 0$,

正确

若奇函数的图象与 y 轴相交, 则当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$ 恒成立, 则与 y 轴的交点一定是原点, 故D错误

则不正确的是D

故选: D.

相似题1_例1

答案: ③

解答: 对于①例如 $y = x^{-2}$ 是偶函数, 其图象不与 y 轴相交故①错

对于②例如 $y = x^{-1}$ 是奇函数, 但其图象不通过原点故②错

对于③偶函数的图象关于 y 轴对称是偶函数图象的特点, 故③对

对于④例如 $f(x) = 0$ ($x \in (-1, 1)$) 既是奇函数

又是偶函数但与 $f(x) = 0, x \in \mathbf{R}$ 不是同一个函数故④错

故答案为: ③.

例2

答案: A

解答: $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$

且 $f(-x) = -x + \frac{1}{x} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 图像关于原点对称

故选: A.

相似题1_例2

答案: C

解答: 函数的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$

$$\text{则 } f(-x) = -\frac{2012}{x} - x = -\left(\frac{2012}{x} + x\right) = -f(x)$$

故函数 $f(x)$ 是奇函数, 则对应的图象关于原点对称

故选：C.

相似题2_例2

答案：D

解答： $y = |x|$ 的对称轴是 y 轴

故函数关于 y 轴对称

故选：D.

例3

解答： $f(x)$ 是奇函数，证明如下

$f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid -2 \leq x \leq 2, \text{ 且 } x \neq 0\}$

$$f(-x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{-x} = -f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数

相似题1_例3

解答： (1) 根据题意，函数 $f(x) = 2x - \frac{a}{x}$ ，且 $f(2) = \frac{9}{2}$

则有 $f(2) = 4 - \frac{a}{2} = \frac{9}{2}$ ，解可得 $a = -1$

(2) 由 (1) 得函数 $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ ，其定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$ ，关于原点对称

$$\text{又由 } f(-x) = 2(-x) + \frac{1}{-x} = -2x - \frac{1}{x} = -\left(2x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

则函数 $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ 为奇函数

相似题2_例3

解答： (1) 解 $1 - x^2 \neq 0$ 得， $x \neq \pm 1$

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq \pm 1\}$

(2) $f(x)$ 为偶函数，证明如下

由 (1) 知 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq \pm 1\}$ ，定义域关于原点对称

$$\text{又 } f(-x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} = f(x)$$

$\therefore f(x)$ 为偶函数

第 12 讲

例1

答案: C

解答: 对A选项, $\because$ 该函数的定义域为 $[0, +\infty)$

$\therefore$ 该函数不是偶函数, A选项错误

对B选项, $\because y = x - 1$ 的图象不关于 y 轴对称

$\therefore y = x - 1$ 不是偶函数, B选项错误

对C选项, $\because y = x^2$ 的图象关于 y 轴对称

$\therefore$ 该函数为偶函数, C选项正确

对D选项, $\because y = x^3$ 的图象关于原点对称

$\therefore$ 该函数为奇函数, D选项错误

故选: C.

相似题1_例1

答案: C

解答: 对于A, 函数 $y = x^4 (x > 0)$, 定义域不关于原点对称, 为非奇非偶函数, 不符合题意

对于B, 函数 $y = |x + 2|$ 为非奇非偶函数, 不符合题意

对于C, 函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 为偶函数, 符合题意

对于D, $y = 2x - 1$ 为非奇非偶函数, 不符合题意

故选: C.

例2

答案: C

解答: 根据题意, 函数 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 则 $f(x)$, $g(x)$ 公共定义域必定关于原点对称

依次分析选项

对于A, 对于 $f(x) + g(x)$, $f(-x) + g(-x) = -f(x) + g(x)$, 不是奇函数, A错误

对于B, 对于 $f(x) + g(x)$, $f(-x) + g(-x) = -f(x) + g(x)$, 不是偶函数, B错误

对于C, 对于 $f(x)g(x)$, $f(-x)g(-x) = -f(x)g(x)$, 是奇函数, C正确

对于D, 对于 $f(x)g(x)$, $f(-x)g(-x) = -f(x)g(x)$, 是奇函数, D错误

故选: C.

相似题1_例2

答案: C

解答: 令 $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$\because$ 函数 $f(x)$ 是奇函数, 函数 $g(x)$ 是偶函数

$$\therefore f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = g(x)$$

$$\therefore h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x) \cdot g(x) = -h(x)$$

$\therefore h(x) = f(x) \cdot g(x)$ 是奇函数

故选: C.

相似题2_例2

答案: AC

解答: 根据题意可得: $f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot g(x) = -f(x) \cdot g(x)$ 所以

$f(x)g(x)$ 是奇函数, 选项 A 正确

同理可以得到: $|f(-x)| \cdot |g(-x)| = |-f(x)| \cdot |g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|$ 所以

$|f(x)|g(x)$ 是偶函数, 选项 B 错误

$$f(-x) \cdot |g(-x)| = (-f(x)) \cdot |g(x)| = -f(x) \cdot |g(x)| \text{ 所以}$$

$f(x)|g(x)|$ 是奇函数, 选项 C 正确

选项 D: $|f(-x) \cdot g(-x)| = |-f(x) \cdot g(x)| = |f(x) \cdot g(x)|$ 所以

$|f(x)g(x)|$ 是偶函数, 选项 D 错误

故选: AC.

例3

答案: 奇函数

解答: 根据题意, 函数 $f(x) = \begin{cases} x(x+2), & x \geq 0 \\ x(2-x), & x < 0 \end{cases}$

当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$

当 $x > 0$ 时, $-x < 0$, 有 $f(x) = x(x+2)$, $f(-x) = -x(x+2)$, 满足 $f(-x) = -f(x)$

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 有 $f(x) = x(2-x)$, $f(-x) = -x(2-x)$, 满足 $f(-x) = -f(x)$

故 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数

故答案为: 奇函数.

相似题1_例3

答案: BCD

解答: 选项A, 函数 $f_1(x)$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 不关于原点对称, 故不具有奇偶性

选项B, 为使函数 $f_2(x)$ 的分子有意义, $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, 于是 $x - 3 < 0$ 恒成立

所以函数的定义域为 $[-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3}]$, 此时 $f_2(x) = \frac{\sqrt{3-x^2}}{-x}$

因为 $f_2(-x) = \frac{\sqrt{3-x^2}}{x} = -\frac{\sqrt{3-x^2}}{-x} = -f_2(x)$, 所以 $f_2(x)$ 是奇函数

选项C, 函数 $f_3(x)$ 的定义域是 $\{x | x \neq 0\}$, 且 $f_3(x) = \frac{2+2^x-1}{2(2^x-1)} = \frac{2^x+1}{2(2^x-1)}$

所以 $f_3(-x) = \frac{2^{-x}+1}{2(2^{-x}-1)} = \frac{1+2^x}{2(1-2^x)} = -f_3(x)$, 所以 $f_3(x)$ 是奇函数

选项D, 定义域关于原点对称

当 $x > 1$ 时, $f_4(-x) = -x+1 = f_4(x)$

同理可得当 $x < -1$ 时, $f_4(-x) = f_4(x)$

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f_4(-x) = f_4(x)$, 所以 $f_4(x)$ 是偶函数

故选: BCD.

相似题2_例3

解答: (1) 根据题意, $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$

必有 $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ |x+2|-2 \neq 0 \end{cases}$ 解可得: $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \neq 0 \text{ 且 } x \neq -4 \end{cases}$

故 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$, 关于原点对称, 且有 $x+2 > 0$

从而有 $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2-2} = \frac{1-x^2}{x}$

这时有 $f(-x) = \frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{-x} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -f(x)$

故 $f(x)$ 为奇函数

(2) 根据题意, 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

并且当 $x < 0$ 时, $-x > 0$

有 $f(-x) = -(-x)^2 + (-x) = -(x^2+x) = -f(x)$ ($x < 0$)

同理: 当 $x > 0$ 时, $-x < 0$

有 $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = -(x^2+x) = -f(x)$ ($x > 0$)

故函数 $f(x)$ 为奇函数

第 13 讲

例1

答案: B

解答: 因为当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$

$$\text{所以 } f(-7) = 2 \times (-7)^2 + 5 \times (-7) + 3 = 66$$

又函数 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(7) = -f(-7) = -66$

故选: B.

相似题1_例1

答案: $\frac{3}{2}$

解答: 因为 $y = f(x)$ 是奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x - 2$

$$\text{所以 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{则 } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

故答案为: $\frac{3}{2}$.

相似题2_例1

答案: -2

解答: $\because$ 函数 $f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(-1) = -f(1)$

$$\because x \geq 0 \text{ 时, } f(x) = x^2 + x$$

$$\therefore f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$\therefore f(-1) = -2$$

故答案为: -2.

例2

答案: -10

解答: 因为 $f(x) = ax^5 + bx^3 + 3$, 所以 $f(2023) = a \times 2023^5 + b \times 2023^3 + 3 = 16$

$$\text{所以 } a \times 2023^5 + b \times 2023^3 = 13$$

$$\text{所以 } f(-2023) = a \times (-2023)^5 + b \times (-2023)^3 + 3$$

$$= -(a \times 2023^5 + b \times 2023^3) + 3$$

$$= -13 + 3 = -10$$

故答案为：-10.

相似题1_例2

答案：A

解答：令 $g(x) = x^5 + ax^3 + bx$ ，由函数奇偶性的定义，易得其为奇函数

$$\text{则 } f(x) = g(x) - 8$$

$$\text{所以 } f(-2) = g(-2) - 8 = 10$$

$$\text{得 } g(-2) = 18$$

$$\text{又因为 } g(x) \text{ 是奇函数, 即 } g(2) = -g(-2)$$

$$\text{所以 } g(2) = -18$$

$$\text{则 } f(2) = g(2) - 8 = -18 - 8 = -26$$

故选：A.

相似题2_例2

答案：B

解答：∵ 函数 $f(x) = ax^5 - bx^3 + cx - 3$, $f(-3) = 7$

$$\text{令 } g(x) = ax^5 - bx^3 + cx, \text{ 则 } g(-3) = 10$$

$$\text{又 } g(x) \text{ 为奇函数, } \therefore g(3) = -10, \text{ 故 } f(3) = g(3) - 3 = -13$$

故选：B.

第 14 讲

例1

答案：8

解答：∵函数 $f(x)$ 为奇函数

∴函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称

又∵函数 $f(x)$ 定义在区间 $[3-a, 5]$ 上

$$\therefore 3-a+5=0$$

$$\therefore a=8$$

故答案为：8.

相似题1_例1

答案：1

解答：因为函数 $f(x)$ 为偶函数，且定义域为 (a^2-2, a)

则 $a^2-2+a=0$ ，解得 $a=1$ 或 $a=-2$ （舍），故 $a=1$

故答案为：1.

相似题2_例1

答案：A

解答：根据奇函数的定义域关于原点对称可知， $a+b=-(1+2)=-3$

故选：A.

例2

答案：A

解答： $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f(x)$ 是奇函数

$$\therefore f(0) = \frac{m-1}{2} = 0, \text{ 解得 } m=1$$

故选：A.

相似题1_例2

答案：-1

解答：因为函数 $f(x)$ 为奇函数

由 $2^x+1 \neq 0$ ，解得 $x \in \mathbf{R}$

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$

$$\text{所以 } f(0) = \frac{a+1}{2} = 0$$

$$\text{解得 } a = -1$$

故答案为: -1 .

相似题2_例2

答案: A

解答: $f(x) = 2^{-x} + a \cdot 2^x$ 为奇函数, 则 $f(0) = 1 + a = 0$

$$\text{则 } a = -1$$

$$\text{则 } f(1) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

故选: A.

例3

答案: A

解答: 由题意得 $f(-1) + f(1) = 0$

$$\text{即 } 0 + 2(1 + a) = 0$$

$$\text{故 } a = -1$$

经检验 $a = -1$ 符合题意

故选: A.

相似题1_例3

$$\text{答案: } \frac{1}{2}$$

解答: $f(x) = 2x + \frac{-a}{x} + (1 - 2a)$

由奇+奇=奇, 可知 $1 - 2a = 0$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{2}$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{2}.$$

相似题2_例3

答案: -2

解答: $\because f(x) = \frac{(x+2)(x+a)}{x^2}$ 为偶函数

$$\therefore f(x) = f(-x), \text{ 即 } \frac{(-x+2)(-x+a)}{x^2} = \frac{(x+2)(x+a)}{x^2}$$

$$\therefore a = -2$$

故答案为：-2.

例4

答案：1

解答： $f(x) = a \cdot 3^x + \frac{1}{3^x}$ 是偶函数

$\therefore$ 由偶函数的定义可知

$$f(-x) = a \cdot 3^{-x} + \frac{1}{3^{-x}} = a \cdot 3^x + \frac{1}{3^x} = f(x)$$

解得 $a = 1$

故答案为：1.

相似题1_例4

答案：1

解答： 由题设， $f(-x) = \frac{4^{-x} + a}{2^{-x}} = 2^x(4^{-x} + a) = f(x) = \frac{4^x + a}{2^x}$

所以 $4^x(4^{-x} + a) = 4^x + a$ ，得 $1 + a \cdot 4^x = 4^x + a$

得 $(a - 1)(4^x - 1) = 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 均成立

所以 $a - 1 = 0$ ，解得 $a = 1$

经检验， $a = 1$ 满足要求

故答案为：1.

相似题2_例4

答案：0

解答： 由 $f(x) = ax^3 + (b - 1)x^2 + 2ax$ 是奇函数可得

$b = 1$ ，再由定义域为 $[2a + 1, -a]$ 得定义域关于原点对称

可得 $2a + 1 - a = 0$ ，所以 $a = -1$

所以 $a + b = 0$

故答案为：0.

第15讲

例1

答案: D

解答: 因为 $x \in (0, +\infty)$

$$\text{所以 } y = x + \frac{4}{x} - 1 \geqslant 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} - 1 = 3$$

当且仅当 $x = \frac{4}{x}$, 即 $x = 2$ 时取等号

所以函数 $y = x + \frac{4}{x} - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值是 3

故选: D.

相似题1_例1

答案: A

解答: 因为函数 $f(x) = 2x + \frac{1}{x} - 1, x < 0$

$$\therefore f(x) = 2x + \frac{1}{x} - 1 = - \left[(-2x) + \frac{1}{-x} \right] - 1 \leqslant -2\sqrt{(-2x) \cdot \frac{1}{-x}} - 1 = -2\sqrt{2} - 1$$

当且仅当 $-2x = \frac{1}{-x}$ 即 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立

$\therefore$ 函数 $f(x) = 2x + \frac{1}{x} - 1$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上有最大值: $-2\sqrt{2} - 1$, 无最小值

故选: A.

相似题2_例1

答案: $-3\sqrt{3}$

解答: 因为 $x > 0$

$$\text{则 } \sqrt{3} - 4x - \frac{3}{x} = \sqrt{3} - \left(4x + \frac{3}{x} \right) \leqslant \sqrt{3} - 2\sqrt{4x \cdot \frac{3}{x}} = -3\sqrt{3}$$

当且仅当 $4x = \frac{3}{x}$, 即 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等号

故答案为: $-3\sqrt{3}$.

例2

答案: B

解答: 若 $x > 4$, 则 $y = x + \frac{1}{x-4} = x - 4 + \frac{1}{x-4} + 4 \geqslant 2\sqrt{(x-4) \cdot \frac{1}{x-4}} + 4 = 6$

当且仅当 $x - 4 = \frac{1}{x-4}$ 即 $x = 5$ 等号成立

所以若 $x > 4$ 时, $y = x + \frac{1}{x-4}$ 有最小值为 6, 无最大值

故选: B.

相似题1_例2

答案: C

解答: 因为 $x > 3$, 所以 $x - 3 > 0$

$$\text{所以 } 4x + \frac{1}{x-3} = 4(x-3) + \frac{1}{x-3} + 12 \geq 2\sqrt{4(x-3) \cdot \frac{1}{x-3}} + 12 = 16$$

当且仅当 $4(x-3) = \frac{1}{x-3}$, 即 $x = \frac{7}{2}$ 时, 等号成立

所以 $4x + \frac{1}{x-3}$ 的最小值为 16

故选: C.

相似题2_例2

答案: B

解答: 因为 $x \in [0, +\infty)$, 所以

$$y = x + \frac{1}{x+1} = (x+1) + \frac{1}{x+1} - 1 \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{1}{x+1}} - 1 = 1$$

当且仅当 $x+1 = \frac{1}{x+1}$, 即 $x = 0$ 时, 等号成立

故 $y = x + \frac{1}{x+1}$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上的最小值为 1

故选: B.

例3

解答: (1) 任取 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) \left(1 - \frac{1}{x_1 x_2} \right) < 0$$

$$\therefore x_1 < x_2$$

$$\therefore x_1 - x_2 < 0$$

$$\text{即 } f(x_1) < f(x_2)$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是增函数

(2) 因为函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是增函数

$\therefore$ 函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在区间 $[2, 6]$ 上也是增函数

$$\text{则函数的最小值为 } f(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{函数的最大值为 } f(6) = 6 + \frac{1}{6} = \frac{37}{6}$$

相似题1_例3

解答: (1) $f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上递增

证明如下

任取 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_2) - f(x_1) &= x_2 + \frac{1}{x_2} - \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) \\ &= x_2 - x_1 + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \\ &= (x_2 - x_1) - \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \\ &= (x_2 - x_1) \cdot \frac{x_2 x_1 - 1}{x_1 x_2} \end{aligned}$$

因为 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$

所以 $x_2 - x_1 > 0$, $x_2 x_1 - 1 > 0$

所以 $(x_2 - x_1) \cdot \frac{x_2 x_1 - 1}{x_1 x_2} > 0$

所以 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$

所以 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上递增

(2) 由 (1) 可知 $f(x)$ 在 $x \in [2, 3]$ 上递增

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(3) = \frac{3^2+1}{3} = \frac{10}{3}$

最小值为 $f(2) = \frac{2^2+1}{2} = \frac{5}{2}$

第16讲

例1

答案: ABD

解答: 幂函数的解析式为 $y = x^a$ ($a \in \mathbf{R}$)

当 $x = 1$ 时, 无论 a 取何值, 都有 $y = 1$

图像必过点 $(1, 1)$, 故A正确

当 $a = 2$ 时, $y = x^2$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 此函数为偶函数

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $y = \sqrt{x}$, 定义域为 $\{x | x \geq 0\}$, 此函数为非奇非偶函数

所以可能是非奇非偶函数, 故B正确

当 $a = 2$ 时, $y = x^2$, 此函数先单调递减再单调递增

则都是单调函数不成立, 故C错误

当 $x > 0$ 时, 无论 a 取何值, 都有 $y > 0$

所以图像不会位于第四象限, D选项正确

故选: ABD.

相似题1_例1

答案: C

解答: 因为 $f(x) = (a^2 - a - 1)x^{\frac{1}{a-2}}$ 为幂函数

$$\text{所以} \begin{cases} a^2 - a - 1 = 1 \\ a - 2 \neq 0 \end{cases}, \text{解得 } a = -1$$

故选: C.

相似题2_例1

答案: 3

解答: $\because$ 幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(4, 2)$

设幂函数 $f(x) = x^\alpha$, 则 $4^\alpha = 2$

求得 $\alpha = \frac{1}{2}$, 故 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

则 $f(9) = \sqrt{9} = 3$

故答案为: 3.

例2

答案: C

解答：设幂函数的解析式为 $f(x) = x^\alpha$

由幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(16, 4)$

$$\therefore 4 = 16^\alpha, \text{ 解得 } \alpha = \frac{1}{2}$$

$\therefore y = f(x) = \sqrt{x}$, 其定义域为 $[0, +\infty)$, 且是增函数

当 $0 < x < 1$ 时, 其图象在直线 $y = x$ 的上方, 故C满足题意

故选: C.

相似题1_例2

答案: A

解答: 由 $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 可知 $x \geq 0$ 故C, D错误

由幂函数性质可知, y 随着自变量 x 的增大函数值增大, 故B错误

故选: A.

相似题2_例2

答案: B

解答: $\because f(0) = 0$, $\therefore$ 排除选项C和D

$$\text{又 } f(-x) = (-x)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-x)^2} = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} = f(x), \text{ 且 } f(x) \text{ 的定义域为 } \mathbf{R}$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为偶函数, 排除选项A

故选: B.

例3

答案: C

解答: 函数 $f(x) = (m^2 - 3m - 3)x^m$ 为幂函数

$$\text{则 } m^2 - 3m - 3 = 1, \text{ 解得 } m = 4 \text{ 或 } m = -1$$

当 $m = 4$ 时, $f(x) = x^4$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不满足条件, 排除A

当 $m = -1$ 时, $f(x) = x^{-1}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 满足题意

函数 $f(x) = x^{-1}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 但不是减函数, 排除B

$$\text{因为函数定义域关于原点对称, 且 } f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x)$$

所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 不是偶函数, 故C正确, D错误

故选: C.

相似题1_例3

答案：B

解答：∵幂函数 $f(x) = (m^2 - 2m - 2)x^{m^2+m-2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

则 $m^2 - 2m - 2 = 1$ ，且 $m^2 + m - 2 < 0$

求得 $m = -1$ ，故 $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

故 $f(m) = f(-1) = \frac{1}{(-1)^2} = 1$

故选：B.

相似题2_例3

答案：3

解答：幂函数 $f(x) = (m^2 - 2m - 2)x^m$ 满足 $f(2) < f(3)$

$$\therefore \begin{cases} m^2 - 2m - 2 = 1 \\ m > 0 \end{cases}$$

解得 $m = 3$

故答案为：3.

第 17 讲

例1

答案: $[0, +\infty)$

解答: 因为幂函数 $y = x^a$ 的图象经过点 $(8, 4)$

所以 $4 = 8^a$

解得: $a = \frac{2}{3}$

所以函数 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 的值域为: $[0, +\infty)$

故答案为: $[0, +\infty)$.

相似题1_例1

答案: C

解答: 易知函数 $y = x^{-2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

$\therefore$ 函数 $y = x^{-2}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上的最大值是 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

故选: C.

相似题2_例1

答案: B

解答: 因为 $\frac{1}{2} > 0$

所以幂函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增

所以当 $x = 1$ 时, 函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 取得最小值为 1

当 $x = 4$ 时, 函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 取得最大值为 $\sqrt{4} = 2$

所以最大值与最小值之和为 $1 + 2 = 3$

故选: B.

例2

答案: $\left[\frac{1}{3}, 1\right) \cup (2, +\infty)$

解答: 根据题意, 函数 $f(x) = x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$, 函数的定义域为 $[0, +\infty)$

且在其定义域上为增函数

若 $f(3x-1) < f(1+x^2)$, 则有 $0 \leq 3x-1 < 1+x^2$

解可得: $\frac{1}{3} \leq x < 1$ 或 $x > 2$

即不等式的解集为 $\left[\frac{1}{3}, 1\right) \cup (2, +\infty)$

故答案为: $\left[\frac{1}{3}, 1\right) \cup (2, +\infty)$.

相似题1_例2

解答: 根据 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增

$$\therefore \begin{cases} a+1 \geq 0 \\ 3-2a \geq 0 \\ a+1 < 3-2a \end{cases} \quad \text{解得 } -1 \leq a < \frac{2}{3}$$

$\therefore a$ 的取值范围是 $-1 \leq a < \frac{2}{3}$

相似题2_例2

答案: $(0.5, 2)$

解答: $\because$ 实数 a 满足 $(2a-1)^{-\frac{3}{2}} > (a+1)^{-\frac{3}{2}}$

$$\therefore \begin{cases} 2a-1 > 0 \\ a+1 > 0 \\ 2a-1 < a+1 \end{cases}$$

解得 $0.5 < a < 2$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(0.5, 2)$

故答案为: $(0.5, 2)$.

例3

答案: B

解答: $\because$ 幂函数 $y = x^{\frac{2019}{2022}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, $\frac{2021}{2022} > \frac{2019}{2022}$, $\therefore a > c$

$\because$ 指数函数 $y = \left(\frac{2019}{2022}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数, $\frac{2021}{2022} > \frac{2019}{2022}$, $\therefore c > b$

$\therefore a > c > b$

故选: B.

相似题1_例3

答案: D

解答: 考察幂函数 $y = x^{\frac{2}{3}}$, 由于 $\frac{2}{3} > 0$, 故它在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

又 $T_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$, 考察幂函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$, 它在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

$$\therefore T_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = T_1$$

$$\therefore T_2 < T_1 < T_3$$

故选: D.

相似题2_例3

答案: C

解答: $\sqrt{\pi}^{-\frac{4}{3}} = (\pi^2)^{-\frac{1}{3}}$, $2^{-\frac{2}{3}} = 4^{-\frac{1}{3}}$

因为 $y = x^{-\frac{1}{3}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减且 $\pi^2 > 4 > 3$

$$\text{故 } (\pi^2)^{-\frac{1}{3}} < 4^{-\frac{1}{3}} < 3^{-\frac{1}{3}}$$

故选: C.

第 18 讲

例1

答案: D

解答: 根据指数幂的运算性质可得:

$$a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2} + \frac{2}{3}} = a^{\frac{13}{6}}, \text{ A 错误}$$

$$a \div a^{\frac{2}{3}} = a^{1 - \frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}, \text{ B 错误}$$

$$a^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}} = a^0 = 1, \text{ C 错误}$$

$$\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = a^{4 \times \frac{1}{4}} = a, \text{ D 正确}$$

故选: D.

相似题1_例1

答案: D

解答: $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, 故B, C错误, D正确

由于 $2^1 + 2^2 = 6$, $2^{1+2} = 8$, 所以 $a^m + a^n \neq a^{m+n}$, 故A错误

故选: D.

相似题2_例1

答案: C

解答: $-\sqrt{x} = -x^{\frac{1}{2}}$, A错误

$$x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \text{ B 错误}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{y}{x}\right)^3}, \text{ C 正确}$$

$$\sqrt[4]{y^2} = y^{\frac{1}{2}}, \text{ D 错误}$$

故选: C.

例2

答案: C

解答: $\sqrt[3]{(\pi-2)^3} = \pi-2$

故选: C.

相似题1_例2

答案: AC

解答: A: 因为 $\sqrt[3]{(-8)^3} = -8$, 故A正确

B: 因为 $\sqrt{(-10)^2} = \sqrt{10^2} = 10$, 故B错误

C: 因为 $\sqrt[4]{(3-\pi)^4} = \pi - 3$, 故C正确

D: 因为 $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$, 故D错误

故选: AC.

相似题2_例2

解答: (1) 原式 $= 100 + 1 + 6 + 8 = 115$

(2) 原式 $= 4 - \pi + \pi - 3 = 1$

例3

答案: A

$$\begin{aligned} \text{解答: } & 8^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} - (\sqrt{2} + 1)^0 \\ &= (2^3)^{\frac{2}{3}} - (2^{-1})^{-2} + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}} - 1 \\ &= 2^2 - 2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - 1 \\ &= \frac{27}{8} - 1 = \frac{19}{8} \end{aligned}$$

故选: A.

相似题1_例3

$$\begin{aligned} \text{解答: } (1) & 7\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{24} - 6\sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}} \\ &= 7\sqrt[3]{3} - 6\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & 0.0081^{-0.25} - \left[3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^0\right]^{-1} \times \left[81^{-0.25} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-0.5} - 10 \times 0.027^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{10}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} - 10 \times 0.3 \\ &= \frac{10}{3} - \frac{1}{3} - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & (\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3})^6 + \left(\sqrt{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{4}{3}} - 4 \times \left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} - \sqrt[4]{2} \times 8^{0.25} - (-2016)^0 \\
 &= 4 \times 27 + 2 - 4 \times \frac{7}{4} - 2 - 1 \\
 &= 100
 \end{aligned}$$

相似题2_例3

解答: (1) 原式

$$\begin{aligned}
 &= 2 \times 3^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \times 12^{\frac{1}{6}} = 2 \times 3^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2 \times 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 2 \times 3 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

$$(2) \text{原式} = \frac{3}{2} - 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{1}{2}$$

例4

答案: B

解答: $\because x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 5$

$$\therefore \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = x + 2 + \frac{1}{x} = 25$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 23$$

故选: B.

相似题1_例4

解答: (1) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - (-9.5)^0 - \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

$$= \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 - \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{3}{2} - 1 - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{因为 } a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 2, \text{ 所以 } a + a^{-1} = \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6$$

$$\text{所以 } \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = a + a^{-1} + 2 = 6 + 2 = 8$$

$$\text{又因为 } a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} > 0, \text{ 所以 } a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

相似题2_例4

解答: (1) 原式 $= (0.4^3)^{-\frac{1}{3}} - 1 + (2^4)^{\frac{3}{4}} + (\pi - 3) = \frac{5}{2} - 1 + 8 + \pi - 3 = \pi + \frac{13}{2}$

$$(2) \text{因为 } x^2 - x^{-2} = (x + x^{-1})(x - x^{-1}) = 4(x - x^{-1})$$

所以 $(x - x^{-1})^2 = (x + x^{-1})^2 - 4 = 12$, 因为 $0 < x < 1$, 所以 $x - x^{-1} = -2\sqrt{3}$

所以 $x^2 - x^{-2} = -8\sqrt{3}$

又因为 $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + x^{-1} + 2 = 6$, 所以 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$

所以 $\frac{x^2 - x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}} = -4\sqrt{2}$

第 19 讲

例1

答案: 9^x

解答: 设指数函数的解析式为 $f(x) = a^x$, ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

因指数函数的图像经过点 $\left(\frac{3}{2}, 27\right)$

则 $f\left(\frac{3}{2}\right) = a^{\frac{3}{2}} = 27$, 即 $a = 9$, 则其解析式为 $f(x) = 9^x$

故答案为: 9^x .

相似题1_例1

答案: C

解答: 由题意, 函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 图像经过点 $(3, 27)$

则有 $a^3 = 27$, 解得 $a = 3$, 故 $f(x) = 3^x$

所以 $f(2) = 3^2 = 9$

故选: C.

相似题2_例1

答案: 16

解答: 设 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

$\because f(x)$ 的图象经过点 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $\therefore a^{\frac{1}{2}} = 2$

解得 $a = 4$

$\therefore f(x) = 4^x$

$\therefore f(2) = 4^2 = 16$

故答案为: 16.

例2

答案: B

解答: 令 $x - 2 = 0$, 即 $x = 2$, 得 $y = 2$

函数 $f(x) = a^{x-2} + 1$ 的图象恒过的定点是 $(2, 2)$

故选: B.

相似题1_例2

答案: $(-2, 2)$

解答: 因 $a^0 = 1$, 其中 $a \neq 0$, 则令 $x + 2 = 0$, 得 $x = -2$

$$\text{又 } f(-2) = 2$$

则点 P 的坐标是 $(-2, 2)$

故答案为: $(-2, 2)$.

相似题2_例2

答案: $(-5, 0)$

解答: 令 $x + 5 = 0$ 得 $x = -5$

$$f(-5) = a^0 - 1 = 0$$

故点 P 的坐标为 $(-5, 0)$

故答案为: $(-5, 0)$.

例3

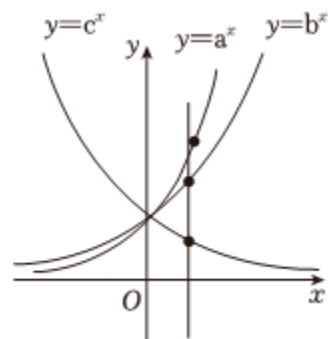
答案: D

解答: 画直线 $x = 1$ 与 $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ 的图象相交

三个交点的纵坐标依次为 a , b , c

根据图象特点, 可得 $c < b < a$

故选: D.



相似题1_例3

答案: C

解答: 直线 $x = 1$ 与函数图象的交点的纵坐标从上到下依次为 c , d , a , b

$$\text{由 } \sqrt{3} > \frac{5}{4} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

故选: C.

相似题2_例3

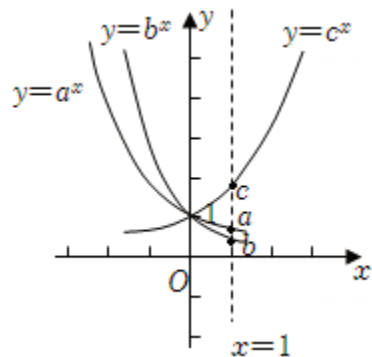
答案: B

解答: 对于指数函数 $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ (其中 a, b, c 均为不等于1的正实数) 的图象

做出直线 $x = 1$, 结合图象可得

直线 $x = 1$ 和指数函数 $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ 的图象的交点的纵坐标分别为 a, b, c , 且 $c > a > b$

故选: B.



例4

答案: D

解答: $\because$ 指数函数 $y = (1 - 3a)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调递增函数

$\therefore 1 - 3a > 1, \therefore a < 0$

故选: D.

相似题1_例4

答案: D

解答: $\because$ 函数 $y = a^x - (b + 1)$ 的图像单调递增且过第四象限

$\therefore \begin{cases} a > 1 \\ b + 1 > 1 \end{cases}$, 解得 $a > 1, b > 0$

故选: D.

相似题2_例4

答案: (1, 2)

解答: 因为指数函数 $f(x) = (a - 1)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以有 $0 < a - 1 < 1$, 解得 $1 < a < 2$

故答案为: (1, 2).

第 20 讲

例1

答案: $(-3, +\infty)$

解答: $\because$ 函数 $y = 3^x$ 为增函数

$$\therefore \text{若 } 3^x > \frac{1}{27} = 3^{-3}$$

$$\text{则 } x > -3$$

故不等式的解集是 $(-3, +\infty)$

故答案为: $(-3, +\infty)$.

相似题1_例1

答案: $(-\infty, -1)$

解答: 原不等式可化为

$$(3)^{-2x} > 3^{1-x}$$

$$\therefore -2x > 1 - x$$

$$\therefore x < -1$$

不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} > 3^{1-x}$ 的解集为 $(-\infty, -1)$

故答案为: $(-\infty, -1)$.

相似题2_例1

答案: $(1, 2)$

解答: 因为 $y = 2^x$ 为单调递增函数

$$\text{故不等式 } 2^{x^2-3x+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 3x + 1 < -1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow 1 < x < 2$$

故答案为: $(1, 2)$.

例2

答案: $\left[\frac{1}{2}, 8\right]$

解答: $\because$ 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, $-3 \leq x \leq 1$, 故当 $x = 1$ 时, 函数 y 取得最小值为 $\frac{1}{2}$

当 $x = -3$ 时, 函数 y 取得最大值为 8

故函数的值域是 $\left[\frac{1}{2}, 8\right]$

故答案为: $\left[\frac{1}{2}, 8\right]$.

相似题1_例2

答案: $(2, +\infty)$

解答: 因为 $3^x > 0$, 所以 $3^x + 2 > 2$

即函数 $y = 3^x + 2$ 的值域是 $(2, +\infty)$

故答案为: $(2, +\infty)$.

相似题2_例2

答案: $\left[\frac{1}{2}, 8\right]$

解答: 设 $u = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$

$\because x \in [0, 3], \therefore u \in [-1, 3]$

$\therefore \frac{1}{2} \leq 2^u \leq 8$, 即函数的值域为 $\left[\frac{1}{2}, 8\right]$

故答案为: $\left[\frac{1}{2}, 8\right]$.

第21讲

例1

答案: BCD

解答: 只有符合 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, $N > 0$, 才有 $a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$, 故B错误

由定义可知CD错误

只有A正确

故选: BCD.

相似题1_例1

答案: 2

解答: 根据题意, 若 $4^x = 16$, 则 $x = \log_4 16 = 2$

故答案为: 2.

相似题2_例1

答案: $\{a \mid 2 < a < 3 \text{ 或 } 3 < a < 5\}$

解答:

$$\text{由 } b = \log_{a-2}(5-a) \text{ 可得 } \begin{cases} 5-a > 0 \\ a-2 > 0 \\ a-2 \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a < 5 \\ a > 2 \\ a \neq 3 \end{cases}, \text{ 即实数 } a \text{ 的取值范围是 } \{a \mid 2 < a < 3 \text{ 或 } 3 < a < 5\}$$

故答案为: $\{a \mid 2 < a < 3 \text{ 或 } 3 < a < 5\}$.

例2

答案: 5

解答: $\lg 20 + \lg 5 + 2^{\lg 2} 3 = \lg(20 \times 5) + 3 = \lg 10^2 + 3 = 2 + 3 = 5$

故答案为: 5.

相似题1_例2

答案: $-\frac{3}{2}$

解答: $\log_3 15 - \log_3 5 - 2^{\log_2 3} + \ln \sqrt{e} = \log_3(3 \times 5) - \log_3 5 - 3 + \ln e^{\frac{1}{2}} = 1 + \log_3 5 - \log_3 5 - 3 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

故答案为: $-\frac{3}{2}$.

相似题2_例2

答案: 5

$$\begin{aligned}\text{解答: } 8^{\frac{2}{3}} + \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 6 \\&= 4 + \log_3 3 \\&= 5\end{aligned}$$

故答案为: 5.

例3

答案: 1

$$\text{解答: } \log_3 7 \cdot \log_2 9 \cdot \log_{49} 2 = \log_3 7 \cdot 2 \log_2 3 \cdot \frac{1}{2} \log_7 2 = \frac{\lg 7 \lg 2 \lg 3}{\lg 3 \lg 2 \lg 7} = 1$$

故答案为: 1.

相似题1_例3

答案: 7

$$\text{解答: } \text{原式} = -\frac{\ln 2}{\ln 3} \times \frac{\ln 9}{\ln 4} + 2^{6 \times \frac{1}{2}} = -1 + 8 = 7$$

故答案为: 7.

相似题2_例3

答案: B

$$\begin{aligned}\text{解答: } \log_2 25 \cdot \log_3 4 \cdot \log_5 9 &= \log_2 5^2 \cdot \log_3 2^2 \cdot \log_5 3^2 \\&= 8 \times \frac{\lg 5}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 5} = 8\end{aligned}$$

故选: B.

例4

答案: D

$$\text{解答: } \because \ln 2 = a, \quad \ln 3 = b$$

$$\text{又} \because \log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$\therefore \log_3 2 = \frac{a}{b}$$

故选: D.

相似题1_例4

答案：2

解答：根据题意， $3^x = 4^y = 6$

$$\text{则 } x = \log_3 6, \quad y = \log_4 6$$

$$\text{则 } \frac{1}{x} = \log_6 3, \quad \frac{1}{y} = \log_6 4$$

$$\text{则 } \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2\log_6 3 + \log_6 4 = \log_6 36 = 2$$

故答案为：2.

相似题2_例4

答案：C

解答： $\because \lg 2 = m, \lg 3 = n$

$$\therefore \frac{\lg 12}{\lg 15} = \frac{2\lg 2 + \lg 3}{\lg 3 + \lg 5} = \frac{2m + n}{n + 1 - \lg 2} = \frac{2m + n}{n + 1 - m}$$

故选：C.

第 22 讲

例1

答案: 2

解答: $\because$ 函数 $f(x) = (a^2 + a - 5) \log_a x$ 是对数函数

$$\therefore \begin{cases} a^2 + a - 5 = 1 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}, \text{ 解得 } a = 2$$

故答案为: 2.

相似题1_例1

答案: A

解答: 设函数 $f(x) = \log_a x$ ($x > 0$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$)

$\because$ 对数函数的图象过点 $M(125, 3)$

$$\therefore 3 = \log_a 125$$

$$\therefore a^3 = 125, a > 0$$

解得 $a = 5$

$\therefore$ 此对数函数的解析式为 $y = \log_5 x$

故选: A.

相似题2_例1

答案: 5

解答: 由对数函数的定义可知,
$$\begin{cases} a^2 - 4a - 5 = 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

解得 $a = 5$

故答案为: 5.

例2

答案: C

解答: 令 $2 - x > 0$, 解得 $x < 2$

所以函数 $f(x) = \ln(2 - x)$ 的定义域是 $(-\infty, 2)$

故选: C.

相似题1_例2

答案: $(1, +\infty)$

解答: 由题意得 $\begin{cases} 1+x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$

解得 $x > 1$

故答案为: $(1, +\infty)$.

相似题2_例2

答案: $(-1, 2)$

解答: $\because$ 函数 $f(x) = \log_{\sqrt{5}}(-x^2 + x + 2)$

$\therefore -x^2 + x + 2 > 0$, 即 $(x-2)(x+1) < 0$, 解得: $-1 < x < 2$

故函数的定义域是 $(-1, 2)$

故答案为: $(-1, 2)$.

例3

答案: C

解答: 因为函数 $f(x) = \log_n(x+m)$ 恒过定点 $(-2, 0)$

所以 $\log_n(-2+m) = 0$

所以 $-2+m = 1$, 解得 $m = 3$

故选: C.

相似题1_例3

答案: $(1, 1)$

解答: 函数 $f(x) = 2\log_a(2x-1) + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

令 $2x-1 = 1$

即 $x = 1$

则 $f(1) = 1$

即函数 $f(x) = 2\log_a(2x-1) + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 $P(1, 1)$

故答案为: $(1, 1)$.

相似题2_例3

答案: D

解答: $\because b > a > 1$

$\therefore$ 函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 图象过第一、四象限

又 $\therefore$ 函数 $y = \log_a(x+b)$ 的图象是由函数 $y = \log_a x$ 的图象向左平移 b 个单位长度得到, 而 $b > 1$

$\therefore$ 函数 $y = \log_a(x+b)$ 的图象不经过第四象限

故选: D.

例4

答案: A

解答: 当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减

函数 $y = -x + a$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且当 $x = 0$ 时, $y = a \in (0, 1)$, 故A正确, C错误

当 $a > 1$ 时, 函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

函数 $y = -x + a$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且当 $x = 0$ 时, $y = a \in (1, +\infty)$, 故B, D错误

故选: A.

相似题1_例4

答案: B

解答: $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{5} < \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{7} = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5}$

$\therefore (3)$ 是 $\log_{\frac{1}{7}} x$, (4) 是 $\log_{\frac{1}{5}} x$

$\therefore (1)$ 是 $\log_5 x$

故选: B.

相似题2_例4

答案: A

解答: 由已知可得 $b > a > 1 > d > c$

则 $a + b > a + c$, $b + d > a + c$

即选项A正确, 选项D错误

又 $a + d$ 与 $b + c$ 的大小不确定

即选项B、C错误

故选: A.

例5

答案: B

解答: 由于函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$

$$f(x) = \log_{0.6} x$$

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$

故选：B.

相似题1_例5

答案： $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

解答：要使函数的解析有意义

$$\text{则 } 2x + 1 > 0$$

故函数的定义域为 $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

由于内函数 $u = 2x + 1$ 为增函数，外函数 $y = \log_5 u$ 也为增函数

故函数 $f(x) = \log_5(2x + 1)$ 在区间 $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 单调递增

故函数 $f(x) = \log_5(2x + 1)$ 的单调增区间是 $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

故答案为： $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

相似题2_例5

答案：B

解答：令 $1 - x = t$ ，则函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ ，本题即求 $t > 0$ 时函数 t 的减区间

由于当 $x < 1$ 时， $t > 0$ ，且函数 t 是减函数，故函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(1 - x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 1)$

故选：B.

第 23 讲

例1

答案: B

解答: $\because \lg(2x-4) \leq 1$

$$\therefore 0 < 2x-4 \leq 10$$

$$\therefore 2 < x \leq 7$$

故选: B.

相似题1_例1

答案: B

解答: $\because$ 函数 $f(x) = \log_2(3x-1)$

则不等式 $2f(x) > f(x+2)$ 可化为: $2\log_2(3x-1) > \log_2(3x+5)$

即 $(3x-1)^2 > 3x+5$ 且 $3x-1 > 0$ 且 $3x+5 > 0$

$$\text{解得: } x > \frac{4}{3}$$

即使得 $2f(x) > f(x+2)$ 成立的 x 的取值范围是 $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$

故选: B.

相似题2_例1

答案: C

解答: $\because f(x) = \ln x$

$$\therefore f(e) = \ln e = 1$$

$\therefore f(x-1) < 1$ 可化为 $f(x-1) < f(e)$

$\because$ 函数 $f(x) = \ln x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是增函数

$$\therefore \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 < e \end{cases}$$

解得 $1 < x < e+1$

$\therefore$ 实数 x 的取值范围是 $(1, e+1)$

故选: C.

例2

答案: D

解答: $\because f(x) = \log_2 x$ 在 $[1, 8]$ 上单调递增

$$\therefore f(x)_{\min} = f(1) = \log_2 1 = 0, \quad f(x)_{\max} = f(8) = \log_2 8 = 3$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \log_2 x$ 在 $[1, 8]$ 上的值域是 $[0, 3]$

故选: D.

相似题1_例2

解答: (1) 要使函数有意义, 则 $2x - 1 > 0$, 解得 $x > \frac{1}{2}$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

由对数函数的性质可知函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

(2) 由复合函数的单调性可知 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x - 1)$ 在 $\left[1, \frac{9}{2}\right]$ 上为减函数

$$\text{又 } f(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0, \quad f\left(\frac{9}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \left(2 \times \frac{9}{2} - 1\right) = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$$

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[-3, 0]$

相似题2_例2

答案: $(-\infty, -1]$

解答: $\because x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2 \geq 2$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 11) \leq \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$$

故答案为: $(-\infty, -1]$.

第 24 讲

例1

答案: D

解答: $\because$ 函数 $y = 10^x$ 与 $y = \lg x$ 互为反函数, 故其图象关于直线 $y = x$ 对称

故选: D.

相似题1_例1

答案: B

解答: 函数 $y = f(x)$ 的图象与 $y = \log_2(x+a)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称

则 $(f(1), 1), (f(2), 2)$, 满足 $y = \log_2(x+a)$

$$\text{则有} \begin{cases} 1 = \log_2(f(1) + a) \\ 2 = \log_2(f(2) + a) \end{cases}$$

$$\text{所以} \begin{cases} f(1) + a = 2 \\ f(2) + a = 2^2 \end{cases}, \text{又 } f(1) + f(2) = 2$$

则 $a = 2$

故选: B.

相似题2_例1

答案: $\sqrt{6}$

解答: 由题意可知 $f(x) = \log_a x$

又 $f(x)$ 的图象过点 $(6, 2)$, 所以 $\log_a 6 = 2$

解得 $a = \sqrt{6}$

故答案为: $\sqrt{6}$.

第25讲

例1

答案: $\frac{1}{2}$

解答: 令 $f(x) = |x-1| - x = 0$

则 $|x-1| = x$, 解得 $x = \frac{1}{2}$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

相似题1_例1

答案: B

解答: 令 $f(x) = x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $(x+1)(x-4) = 0$

解得: $x = 4$ 或 $x = -1$

所以函数 $f(x) = x^2 - 3x - 4$ 的零点为 $4, -1$

故选: B.

相似题2_例1

答案: 3

解答: 根据题意, 对于函数 $f(x) = \ln(x-2)$

若 $f(x) = \ln(x-2) = 0$, 解可得 $x = 3$

即函数 $f(x) = \ln(x-2)$ 的零点为 3

故答案为: 3.

例2

答案: C

解答: 对于A, 当 $x < 0$ 时, $\frac{4}{x} < 0$, $2^x > 0$, $\therefore f(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内无零点, A 错误

对于B, 当 x 从正方向无限趋近于 0 时, $\frac{4}{x} \rightarrow +\infty$, 则 $f(x) \rightarrow +\infty$; 又 $f(1) = 4 - 2 = 2$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内无零点, B 错误

对于C, $\because f(1) = 4 - 2 = 2$, $f(2) = 2 - 4 = -2$, 且 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上连续

$\therefore f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内有零点, C 正确

对于D, $f(2) = 2 - 4 = -2$, $f(3) = \frac{4}{3} - 8 = -\frac{20}{3}$, $\therefore f(x)$ 在 $(2, 3)$ 内无零点, D 错误

故选: C.

相似题1_例2

答案: D

解答: 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x + 2$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的减函数

又当 $x \leq 0$ 时 $f(x) > 0$, $f(1) = \frac{3}{2} > 0$, $f(2) = \frac{1}{4} > 0$, $f(3) = -\frac{7}{8} < 0$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x + 2$ 的零点所在区间为 $(2, 3)$

故选: D.

相似题2_例2

答案: B

解答: 由题意得 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增

又 $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = \sqrt{2} - 1 > 0$

$\therefore f(x)$ 的零点在区间 $(1, 2)$

故选: B.

例3

答案: C

解答: 令 $f(x) = x + \ln x - 3$, $x > 0$

显然函数为增函数, 又 $f(3) = \ln 3 > 0$, $f(2) = \ln 2 - 1 < 0$

故存在 $m \in (2, 3)$ 使得 $f(m) = 0$

故选: C.

相似题1_例3

答案: B

解答: 令 $f(x) = \lg x + x - 2$

$\therefore y = \lg x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $y = x - 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

$\therefore f(x) = \lg x + x - 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

又 $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = \lg 2 > 0$

$\therefore$ 由函数零点存在性定理得 $x \in (1, 2)$

故方程 $\lg x + x = 2$ 的解所在的区间为 $(1, 2)$

故选: B.

相似题2_例3

答案: C

解答: 因为函数 $f(x) = 2^x + 3x - 12$ 在定义上单调递增

$$\text{又 } f(2) = 2^2 + 6 - 12 = -2 < 0, \quad f(3) = 2^3 + 9 - 12 = 5 > 0$$

所以函数 $f(x)$ 的零点所在区间是 $(2, 3)$

即 $x_0 \in (2, 3)$

故选: C.

第26讲

例1

答案：2

解答：令 $f(x) = x^2 + x = 0$ 得， $x = 0$ 或 $x = -1$

故函数的零点个数为2

故答案为：2.

相似题1_例1

答案：2

解答：令 $f(x) = \ln|x| = 0$

则有 $|x| = 1$ ，解得： $x = \pm 1$

所以函数 $f(x)$ 有2个零点

故答案为：2.

相似题2_例1

答案：B

解答：函数 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 的零点个数即方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的根的个数

$$\because \Delta = 3^2 - 4 \times 2 = 1 > 0$$

$\therefore$ 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 有两个不同的根

即函数 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 的零点的个数为2

故选：B.

例2

答案：B

解答： $\because$ 函数 $f(x) = e^x + 2x - 5$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

$$\text{且 } f(0) = e^0 - 5 = 1 - 5 = -4 < 0$$

$$f(2) = e^2 - 1 > 0$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = e^x + 2x - 5$ 只有1个零点

故选：B.

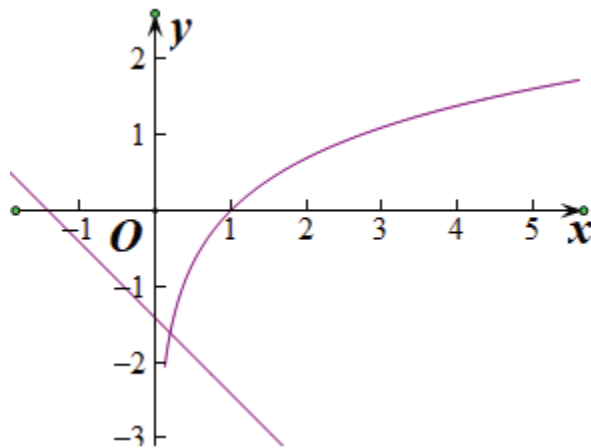
相似题1_例2

答案：1

解答：令 $f(x) = \ln x + x + \sqrt{2} = 0$ ，即 $\ln x = -x - \sqrt{2}$

则函数零点个数等价于 $y = \ln x$ 与 $y = -x - \sqrt{2}$ 图象交点个数

作出两函数图象如图



由图可得只有1个交点

故答案为：1.

相似题2_例2

答案：B

解答：由于函数 $f(x) = 3 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调减函数

$$f(3) = \frac{1}{8} > 0, \quad f(4) = -1 + \frac{1}{16} = -\frac{15}{16} < 0$$

根据函数的零点存在性定理，函数只有1个零点

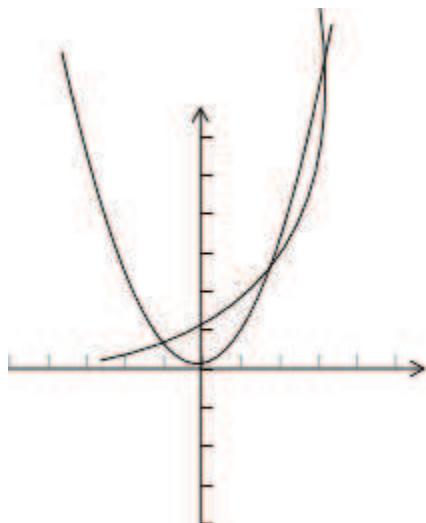
故选：B.

例3

答案：3

解答：

由题意可知：



要研究函数 $f(x) = x^2 - 2^x$ 的零点个数

只需研究函数 $y = 2^x$, $y = x^2$ 的图象交点个数即可

画出函数 $y = 2^x$, $y = x^2$ 的图象

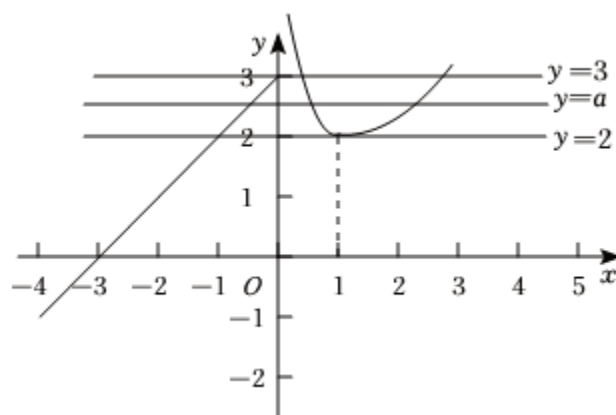
由图象可得有3个交点.

故答案为：3.

相似题1_例3

答案：AC

解答：函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x + 3, & x \leq 0 \end{cases}$, 作图如下



对于A, 由图可知, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 故A正确

对于B, 因为直线 $y = 2$ 与 $f(x)$ 的图象有两个交点

所以 $f(x) = 2$ 的解有两个, 故B错误

对于C, 若 $f(x) = a$ 有三个不同的根, 则 $2 < a \leq 3$, 即实数 $a \in (2, 3]$, 故C正确

对于D, $f(x)$ 不存在最大值, 也不存在最小值, 故D错误

综上所述, 正确的只有A与C

故选: AC.

相似题2_例3

解答: (1) 根据题意, $f(x) = \begin{cases} -x(x+4), & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

$$\text{则 } f(-2) = -(-2) \times (-2+4) = 4$$

$$\text{则 } f(f(-2)) = f(4) = 4$$

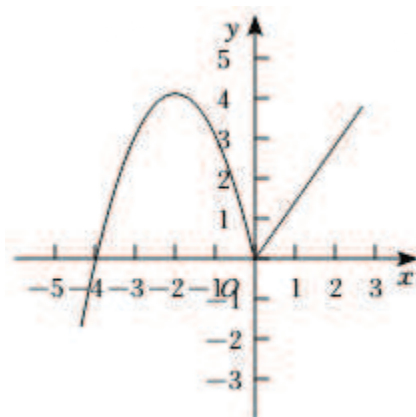
(2) 对于 $f(a) > 3$

当 $a > 0$ 时, $f(a) = a > 3$, 即 $a > 3$, 符合题意

当 $a \leq 0$ 时, $a^2 + 4a + 3 < 0$, 解得 $-3 < a < -1$

综上可得 $a \in (-3, -1) \cup (3, +\infty)$

$f(x) = \begin{cases} -x(x+4), & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, 其草图如图



若其图像与 $y = b$ 有三个交点, 必有 $0 < b < 4$

即 b 的取值范围为 $(0, 4)$

第 27 讲

例1

答案: C

解答: 因为 $f(0) < 0$, $f(0.5) > 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0, 0.5)$ 内存在零点

根据二分法第二次应该计算 $f(x_1)$, 其中 $x_1 = \frac{0 + 0.5}{2} = 0.25$

故选: C.

相似题1_例1

答案: C

解答: 对于A, $f(x) = 3x - 1$ 是单调函数, 有唯一零点, 且函数值在零点两侧异号, 可用二分法求零点

对于B, $f(x) = x^3$ 也是单调函数, 有唯一零点, 且函数值在零点两侧异号, 可用二分法求零点

对于C, $f(x) = |x|$ 不是单调函数, 虽然也有唯一的零点, 但函数值在零点两侧都是正号, 故不能用二分法求零点

对于D, $f(x) = \ln x$ 也是单调函数, 有唯一零点, 且函数值在零点两侧异号, 可用二分法求零点

故选: C.

相似题2_例1

答案: C

解答: 设函数 $f(x) = e^x - (x + 3) = 0$

$\therefore f(-1) = 0.37 - 2 < 0$, $f(0) = 1 - 3 < 0$

$f(1) = 2.72 - 4 < 0$, $f(2) = 7.40 - 5 > 0$

$\therefore f(1)f(2) < 0$

又 $\therefore f(x) = e^x - (x + 3)$ 在区间 $(1, 2)$ 连续

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 存在零点, $\therefore$ 方程根所在的区间为 $(1, 2)$

故选: C.

例2

答案: ABD

解答: 由二分法知, 方程 $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ 的根在区间 $(1.375, 1.5)$, 没有达到精确度的要求, 应该接着计算 $f(1.4375)$

故选: ABD.

相似题1_例2

答案：C

解答：根据题意，设要达到精确度需要计算 n 次

则有 $\frac{0.1}{2^n} < 0.001$ ，变形可得 $2^n > 100$

由于 $2^7 = 128$ ，故要达到精确度要求至少需要计算7次

故选：C.

相似题2_例2

答案：7

解答：设经过 n 次

由题意得 $\frac{1}{2^n} \leq 0.01$

解得 $n \geq 7$

故答案为：7.

第28讲

例1

答案: A

解答: 依题意可得 $60 = (100 - 20)e^{-20k} + 20$, 即 $e^{-20k} = \frac{1}{2}$, 所以 $-20k = \ln \frac{1}{2}$

$$\text{所以 } k = \frac{\ln 2}{20}$$

故选: A.

相似题1_例1

答案: D

解答: 设 n 年后该地的GDP会翻两番, 则 $(1 + 6.5\%)^n = 4$

$$\therefore n = \log_{1.065} 4 = \frac{2 \lg 2}{\lg 1.065} \approx \frac{2 \times 0.301}{0.0273} \approx 23$$

故选: D.

相似题2_例1

答案: C

解答: 设人交谈时的声强为 x_1/m^2 , 根据题意得到火箭发射时的声强为 $10^{7.8}x_1/\text{m}^2$

$$\text{而且 } 60 = 10 \lg \frac{x_1}{10^{-12}}$$

$$\text{所以得到 } x_1 = 10^{-6}$$

$$\text{故火箭发射时的声强约为 } 10^{7.8} \times 10^{-6} = 10^{1.8} \text{ W/m}^2$$

$$\text{将其代入 } d(x) = 10 \lg \frac{x}{10^{-12}} \text{ 中}$$

$$\text{得 } d(10^{1.8}) = 10 \lg \frac{10^{1.8}}{10^{-12}} = 138 \text{ dB}$$

故火箭发射时的声强级约为 138 dB

故选: C.

例2

答案: D

解答: 设该厂每天获得的利润为 y 元

$$\text{则 } y = (160 - 2x)x - (500 + 30x) = -2x^2 + 130x - 500 \quad (0 < x < 80)$$

$$\text{由题意, 知 } -2x^2 + 130x - 500 \geq 1300$$

$$\text{即 } x^2 - 65x + 900 \leq 0, \text{ 解得: } 20 \leq x \leq 45$$

故选: D.

相似题1_例2

答案: A

解答: $\because y = 111.54 - \frac{10}{x}$

$$\begin{aligned}\therefore z &= 10y - x = 10\left(111.54 - \frac{10}{x}\right) - x \\ &= 1115.4 - \frac{100}{x} - x \\ &= 1115.4 - \left(\frac{100}{x} + x\right) \leq 1115.4 - 2\sqrt{\frac{100}{x} \cdot x} = 1095.4\end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{100}{x} = x$, 即 $x = 10$ 时, 等号成立

故 z 的最大值为 1095.4

故选: A.

相似题2_例2

解答: (1) 当 $0 < x \leq 20$ 时, $s = xG(x) - (60x + 50) = -3x^2 + 180x - 50$

当 $x > 20$ 时, $s = xG(x) - (60x + 50) = -10x + \frac{3000(x-2)}{x+1} - 50$

所以函数解析式为 $s = \begin{cases} -3x^2 + 180x - 50, & 0 < x \leq 20 \\ -10x + \frac{3000(x-2)}{x+1} - 50, & x > 20 \end{cases}$

(2) 当 $0 < x \leq 20$ 时, 因为 $s = -3x^2 + 180x - 50 = -3(x-30)^2 + 2650$

又因为函数 s 在 $(0, 20]$ 上单调递增

所以当 $x = 20$ 时, s 取最大值, $s_{\max} = s(20) = 2350$

当 $x > 20$ 时

$$\begin{aligned}s &= -10x + \frac{3000(x-2)}{x+1} - 50 \\ &= -10x - \frac{9000}{x+1} + 2950 \\ &= -10(x+1) - \frac{9000}{x+1} + 2960 \leq -2\sqrt{\frac{9000}{x+1} \cdot 10(x+1)} + 2960 = 2360\end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{9000}{x+1} = 10(x+1)$, 即 $x = 29$ 时等号成立

因为 $2360 > 2350$, 所以 $x = 29$ 时, s 的最大值为 2360 万元

所以当年产量为 29 万台时, 该公司获得的最大利润 2360 万元