

必备知识 手册



数

三角函数

完善数学知识体系

夯实基础

查漏补缺

CONTENTS

目录

第 1 讲	任意角	1
第 2 讲	弧度制	5
第 3 讲	扇形的弧长与面积公式	7
第 4 讲	三角函数的概念	10
第 5 讲	三角函数在各象限的符号	12
第 6 讲	同角三角函数的基本关系	14
第 7 讲	诱导公式	16
第 8 讲	正弦函数、余弦函数的图象与性质	20

第 9 讲	正切函数的图象与性质	25
第 10 讲	和差角公式	29
第 11 讲	倍角公式	32
第 12 讲	辅助角公式	35

第 1 讲 任意角

 知识精讲

一、任意角

1. 角可以看成平面内一条射线绕其端点旋转所成的图形.
2. 规定一条射线按逆时针方向旋转形成的角叫做正角, 按顺时针方向旋转形成的角叫做负角. 如果一条射线没有做任何旋转, 称它形成了一个零角.
3. 任意角包括正角、负角和零角.

二、象限角与轴线角

1. 在平面直角坐标系中, 如果角的顶点在原点, 角的始边与 x 轴的非负半轴重合, 那么, 角的终边在第几象限, 便称此角为第几象限角.
2. 如果角的终边在坐标轴上, 则这个角不属于任何一个象限, 称这个角为轴线角.

三、终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角, 连同角 α 在内, 可构成一个集合

$$S = \{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$$

即任一与角 α 终边相同的角, 都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

 经典例题

考向1 任意角的概念

例1 (2023·北京海淀区月考)

钟表的分针在一个半小时内转了 ()

- A. 180° B. -180° C. 542° D. -540°

相似题1_例1 (2022·陕西西安市月考)

从13:00到14:00, 时针转过的角为 _____, 分针转过的角为 _____.

相似题2_例1 (2021·江苏徐州市同步)

若一条以点 O 为端点的射线从射线 OA 开始, 绕点 O 逆时针旋转 120° 到达 OB 的位置, 再由 OB 的位置顺时针旋转 270° 到达 OC 的位置, 则 $\angle AOC$ 的大小为 ()

- A. 150° B. -150° C. 390° D. -390°

考向2 终边相同的角

例2 (2023·广西北海市期末)

下列各角中, 与 2183° 角终边相同的是 ()

- A. -23° B. 23° C. -47° D. 47°

相似题1_例2 (2023·江西赣州市期末)

已知角的顶点与直角坐标系的原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 那么, 下列各角与 380° 角终边相同的是 ()

- A. 20° B. 30° C. 40° D. 50°

相似题2_例2 (2023·甘肃武威市月考)

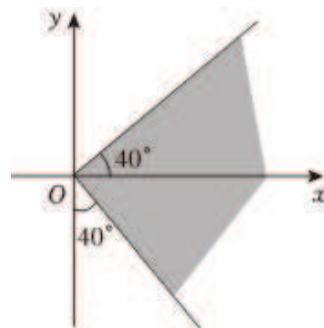
下列各角中与 420° 角的终边相同的是 ()

- A. 60° B. 70° C. 100° D. 130°

考向3 阴影区域的角的集合表示

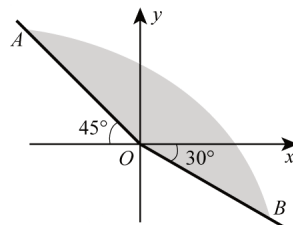
例3 (2023·广西钦州市月考)

如图所示, 终边落在阴影部分区域 (包括边界) 的角 α 的集合是_____.



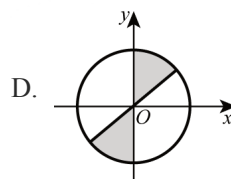
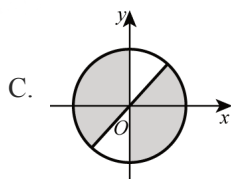
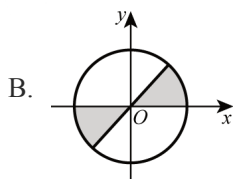
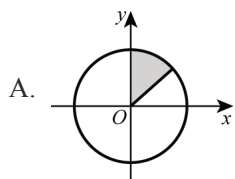
相似题1_例3 (2022·上海浦东新区期中)

终边落在如图所示阴影部分内(含边界)的角 θ 的集合是_____.



相似题2_例3 (2021·重庆期末)

集合 $\{\alpha | 180^\circ \cdot k + 45^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \cdot k + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ 中的角 α 的终边在单位圆中的位置(阴影部分)是()



考向4 象限角与轴线角

例4 (2023·江西景德镇市期中)

角 -2023° 是()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

相似题1_例4 (2023·江西宜春市月考)

下列命题中正确的是()

- A. 第一象限角一定不是负角 B. 钝角一定是第二象限角
C. 小于 90° 的角一定是锐角 D. 第一象限角一定是锐角

相似题2_例4 (2023·福建三明市同步)

若 α 是第一象限角,则下列各角中属于第三象限角的是()

- A. $90^\circ - \alpha$ B. $90^\circ + \alpha$ C. $360^\circ - \alpha$ D. $180^\circ + \alpha$

第 2 讲

弧度制

 知识精讲

弧度制

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，弧度单位用符号rad表示，读作弧度.

【注】弧度单位可以省略不写.

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}.$$

 经典例题

例1 (2023·上海长宁区期末)

将弧度化为角度： $\frac{1}{12}\pi$ 弧度=_____°.

相似题1_例1 (2023·贵州遵义市期中)

$$220^\circ = (\quad)$$

A. $\frac{11\pi}{36}$

B. $\frac{11\pi}{18}$

C. $\frac{11\pi}{9}$

D. $\frac{7\pi}{6}$

相似题2_例1 (2023·江西宜春市月考)

已知 $\theta = 216^\circ$ ，它用弧度制表示应为_____弧度.

第 3 讲

扇形的弧长与面积公式

 知识精讲

弧长公式与扇形面积公式

设扇形的半径为 r ，圆心角为 α （ α 的单位是 rad）.

1. 弧长 $l = \alpha r$.

2. 面积 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}\alpha r^2$.

 经典例题

考向1 扇形的弧长

例1（2023·广西钦州市期中）

已知扇形的周长为4，扇形圆心角的弧度数为2，则扇形的弧长为（ ）

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

相似题1_例1（2023·北京石景山区期末）

在单位圆中， 200° 的圆心角所对的弧长为（ ）

- A. $\frac{7\pi}{10}$ B. $\frac{10\pi}{9}$ C. 9π D. 10π

相似题2_例1（2023·重庆月考）

已知某扇形的圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ ，半径为3，则该扇形的弧长为_____.

考向2 扇形的面积

例2（2023·江西赣州市期中）

已知一扇形的圆心角为 $\frac{5\pi}{14}$ ，半径为7，则该扇形的弧长为_____，面积为_____.

相似题1_例2 (2023·江西景德镇市期中)

若扇形的周长为36, 要使这个扇形的面积最大, 则此时扇形的圆心角 α 的弧度为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

相似题2_例2 (2023·辽宁本溪市期中)

设圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形的弧长为 l , 面积为 S , 则 $\frac{l^2}{S} = ()$

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

第 4 讲

三角函数的概念

知识精讲

三角函数的定义

设 α 是一个任意大小的角， α 的终边上任一点 P (异于原点) 的坐标是 (x, y) ，它与原点的距离为 r ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$)，则

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}.$$

经典例题

例1 (2023·广东广州市期末)

已知角 α 的终边经过点 $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ ，则 $\cos \alpha - \sin \alpha$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $-\frac{7}{5}$ C. $\frac{7}{5}$ D. $-\frac{1}{5}$

相似题1_例1 (2022·山东济南市期末)

已知角 θ 的终边经过点 $P(-8m, -3)$ ，且 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ ，则实数 m 的值是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{9}{32}$ C. $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{9}{32}$ 或 $-\frac{9}{32}$

相似题2_例1 (2022·广东广州市期末)

若 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且角 α 的终边经过点 $P(x, -2)$ ，则 P 点的横坐标 x 是 ()

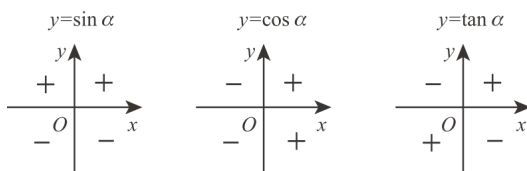
- A. $2\sqrt{3}$ B. $\pm 2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $-2\sqrt{3}$

第 5 讲

三角函数在各象限的符号

知识精讲

三角函数值在各象限的符号



经典例题

例1 (2023·河北石家庄市期末)

已知角 α 的终边在第三象限, 则点 $P(\tan \alpha, \cos \alpha)$ 在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

相似题1_例1 (2023·北京顺义区期中)

已知角 α 满足 $\sin \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$, 则角 α 的终边所在的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

相似题2_例1 (2023·辽宁沈阳市期中) (多选)

如果 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$, 则 α 所在象限为 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

第 6 讲

同角三角函数的基本关系

 知识精讲

一、基本关系式

1. 平方关系: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

2. 商关系: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

二、和积互化

1. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$

2. $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

3. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

 经典例题

例1 (2022·吉林白城市期末)

(1) 化简: $\tan \alpha \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1}$ (其中 α 为第二象限角);

(2) 求证: $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \tan \alpha}{1 + \cos \alpha} = 1$.

相似题1_例1

求证: $\frac{1 + 2 \sin x \cos x}{1 - 2 \sin^2 x} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$.

相似题2_例1

求证: $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$.

第 7 讲

诱导公式

知识精讲

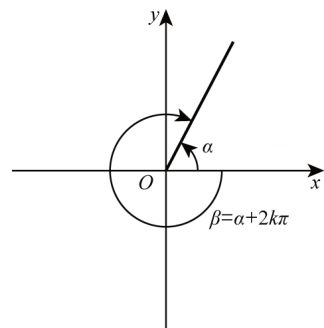
诱导公式

1. 角 α 与 $\alpha + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) (终边相同角) 的三角函数间的关系

$$\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos \alpha$$

$$\tan(\alpha + k \cdot 2\pi) = \tan \alpha$$

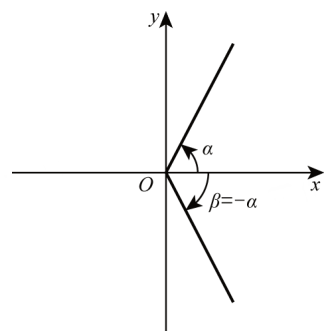


2. 角 α 与 $-\alpha$ 的三角函数间的关系

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

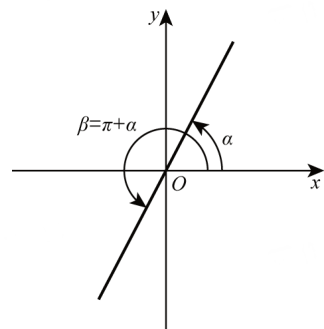


3. 角 α 与 $\pi + \alpha$ 的三角函数间的关系

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

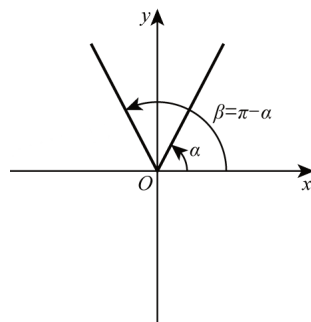


4. 角 α 与 $\pi - \alpha$ 的三角函数间的关系

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

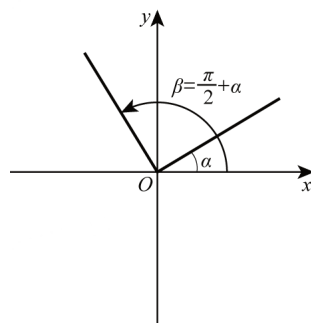
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$



5. 角 α 与 $\frac{\pi}{2} + \alpha$ 的三角函数间的关系

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

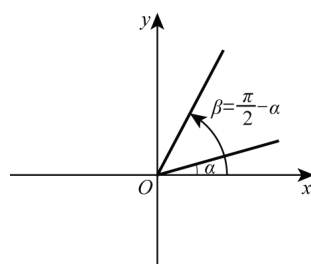
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$



6. 角 α 与 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 的三角函数间的关系

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$



经典例题

考向1 利用诱导公式求值

例1 (2022·河南南阳市月考)

求值 $\sin\left(-\frac{23\pi}{6}\right) + \cos \frac{13\pi}{7} \tan 4\pi - \cos \frac{13\pi}{3} =$ _____.

相似题1_例1 (2023·山东日照市月考)

$\sin 480^\circ$ 等于 ()

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

相似题2_例1 (2023·安徽阜阳市月考)

已知 $\cos(\pi - \alpha) = -\frac{4}{5}$, 则 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$ ()

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

考向2 利用诱导公式化简

例2 (2022·湖北宜昌市月考)

已知角 α 的终边上有一点 $P(1, 3)$, 则 $\frac{\sin(\pi - \alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{2 \cos(\alpha - 2\pi)}$ 的值为 ()

- A. 1 B. $-\frac{4}{5}$ C. -1 D. -4

相似题1_例2 (2022·甘肃武威市同步)

已知 $\tan(\pi - \alpha) = -\frac{2}{3}$, 且 $\alpha \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\frac{\cos(-\alpha) + 3 \sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi - \alpha) + 9 \sin \alpha}$ 的值为 ()

- A. $-\frac{1}{5}$ B. $-\frac{3}{7}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{7}$

相似题2_例2 (2023·安徽月考)

已知 $f(\alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha) \cos(2\pi - \alpha) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(-\pi - \alpha)}$.

(1) 化简 $f(\alpha)$;

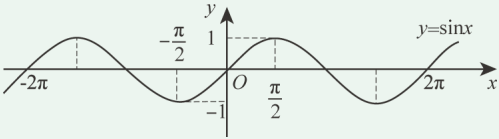
(2) 若 α 是第三象限角, 且 $\sin(\alpha - \pi) = \frac{1}{5}$, 求 $f(\alpha)$ 的值.

第 8 讲

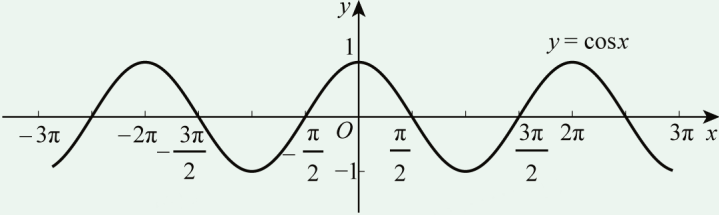
正弦函数、余弦函数的图象与性质

知识精讲

一、正弦函数的图象与性质

正弦函数	$y = \sin x$
图象	
定义域	$\mathbf{R}$
值域	$[-1, 1]$
周期性	最小正周期: $T = 2\pi$
单调性	递增区间: $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] \ (k \in \mathbf{Z})$
	递减区间: $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right] \ (k \in \mathbf{Z})$
奇偶性	奇函数
对称性	对称中心: $(k\pi, 0) \ (k \in \mathbf{Z})$
	对称轴: $x = k\pi + \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbf{Z})$

二、余弦函数的图象与性质

余弦函数	$y = \cos x$
图象	
定义域	$\mathbf{R}$
值域	$[-1, 1]$
周期性	最小正周期: $T = 2\pi$
单调性	递增区间: $[2k\pi - \pi, 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$
	递减区间: $[2k\pi, 2k\pi + \pi] (k \in \mathbf{Z})$
奇偶性	偶函数
对称性	对称轴: $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$
	对称中心: $\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$

 经典例题

考向1 正弦函数、余弦函数的周期性

例1 (2023·上海期中)

函数 $f(x) = \sin(4x)$ 的最小正周期为_____.

相似题1_例1 (2023·上海静安区期中)

函数 $y = \cos \frac{x}{3}$ 的最小正周期是_____.

相似题2_例1 (2023·四川宜宾市期中)

函数 $y = \sin 2\omega x$ 的最小正周期是 π , 则 ω 的值为_____.

考向2 正弦函数、余弦函数的奇偶性

例2 (2023·北京海淀区期末)

下列函数中,既是偶函数又是周期为 π 的函数为()

- A. $y = \sin x$ B. $y = \cos x$ C. $y = \sin 2x$ D. $y = \cos 2x$

相似题1_例2 (2023·江西南昌市月考)

函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ 是()

- A. 周期为 π 的奇函数 B. 周期为 π 的偶函数 C. 周期为 2π 的奇函数 D. 周期为 2π 的偶函数

相似题2_例2 (2023·北京昌平区期末)

下列函数中,是偶函数且其图象关于点 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 对称的是()

- A. $f(x) = \sin x$ B. $f(x) = \cos x$ C. $f(x) = \sin 4x$ D. $f(x) = \cos 2x$

考向3 正弦函数、余弦函数的单调性

例3 (2023·北京西城区月考)

函数 $y = \cos x$ 和 $y = \sin x$ 都是增函数的区间是()

- A. $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ B. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ C. $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ D. $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$

相似题1_例3 (2023·北京西城区期中)

已知函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 在区间 I 上都是减函数,那么区间 I 可以是()

- A. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ C. $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ D. $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

相似题2_例3 (2023·四川巴中市期中)

函数 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in \mathbf{R}$ 是()

- A. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的增函数 B. $[0, \pi]$ 上的减函数 C. $[-\pi, 0]$ 上的减函数 D. $[-\pi, \pi]$ 上的减函数

考向4 正弦函数、余弦函数的值域

例4 (2023·江西赣州市期中)

函数 $y = 3 \sin x + 5 \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \right)$ 最大值为 ()

- A. 2 B. 5 C. 8 D. 7

相似题1_例4 (2021·江西鹰潭市月考)

若 $\cos x = 2m + 3$, 且 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]$, 则 m 的取值范围为 ()

- A. $\left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ B. $\left[-\frac{7}{4}, -\frac{5}{4} \right]$ C. $\left[-\frac{5}{4}, -1 \right]$ D. $\left[-1, -\frac{1}{2} \right]$

相似题2_例4 (2022·黑龙江哈尔滨市期中)

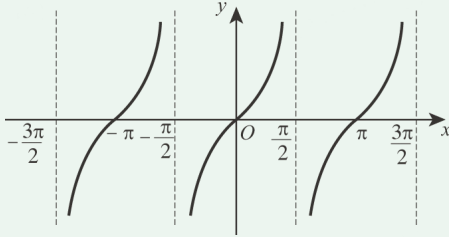
若 $y = a + b \sin x$ 的值域是 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$, 则此函数的表达式是_____.

第 9 讲

正切函数的图象与性质

知识精讲

正切函数的图象与性质

正切函数	$y = \tan x$
图象	
定义域	$\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$
值域	$\mathbf{R}$
周期性	最小正周期: $T = \pi$
单调性	递增区间: $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k \in \mathbf{Z})$
	递减区间: 无
奇偶性	奇函数
对称性	对称中心: $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$
	对称轴: 无

经典例题

考向1 正切函数的定义域

例1 (2023·北京西城区月考)

函数 $y = \tan 2x$ 的定义域是_____，最小正周期是_____.

相似题1_例1 (2023·内蒙古包头市期末)

函数 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域是 ()

A. $\left\{x \mid x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

B. $\left\{x \mid x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

C. $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

D. $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

相似题2_例1 (2023·浙江杭州市期中)

函数 $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域为 ()

A. $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

B. $\left\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

C. $\left\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

D. $\left\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

考向2 正切函数的周期性

例2 (2023·辽宁阜新市期中)

函数 $y = \tan x$ 的最小正周期是 ()

A. $\frac{\pi}{2}$

B. π

C. $\frac{3\pi}{2}$

D. 2π

相似题1_例2 (2023·辽宁沈阳市期中)

正切函数 $y = 5 \tan \frac{x}{2}$ 的最小正周期为 ()

A. 4π

B. 2π

C. π

D. $\frac{\pi}{2}$

相似题2_例2 (2021·四川宜宾市模拟【理】)

下列函数中, 周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的是 ()

A. $y = \sin \frac{x}{2}$

B. $y = \cos 2x$

C. $y = \tan \frac{x}{2}$

D. $y = \tan 2x$

考向3 正切函数的奇偶性与对称性

例3 (2022·河南郑州市同步)

对于函数 $y = \tan \frac{x}{2}$, 下列判断正确的是 ()

- A. 周期为 2π 的奇函数 B. 周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数 C. 周期为 π 的偶函数 D. 周期为 2π 的偶函数

相似题1_例3 (2022·河南驻马店市期中【理】)

函数 $f(x) = \tan 2x$ 的对称中心为_____.

相似题2_例3 (2023·北京大兴区期中)

函数 $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的对称中心是_____.

考向4 正切函数的单调性

例4 (2023·北京海淀区期中)

下列四个函数中, 以 π 为最小正周期, 且在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上为增函数的是 ()

- A. $y = \sin 2x$ B. $y = \cos 2x$ C. $y = \tan x$ D. $y = \sin \frac{x}{2}$

相似题1_例4 (2023·新疆同步)

下列函数中, 同时满足: ①在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上是增函数; ②为奇函数; ③周期为 π 的函数有 ()

- A. $y = \tan x$ B. $y = \cos x$ C. $y = \tan \frac{x}{2}$ D. $y = \sin x$

相似题2_例4 (2023·上海期末)

函数 $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递增区间为_____.

第 10 讲

和差角公式

知识精讲

正弦、余弦、正切的和差角公式

$$C_{\alpha \pm \beta} : \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$S_{\alpha \pm \beta} : \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$T_{\alpha \pm \beta} : \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

经典例题

考向1 和差角公式的正向应用

例1 (2023·安徽芜湖市期中)

已知锐角 α, β 满足 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $\alpha + \beta$ 的值为 ()

- A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{4}$

相似题1_例1 (2023·西藏林芝市期中)

求值: $\sin 105^\circ = ()$

- A. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3} + 1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3} - 1}{4}$

相似题2_例1 (2023·四川泸州市模拟【文】)

已知 α 是第四象限角, $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = ()$

- A. -5 B. 5 C. -7 D. 7

考向2 和差角公式的逆向应用

例2 (2023·四川宜宾市期中)

$\sin 5^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 5^\circ = ()$

- A. $\sin 20^\circ$ B. $\sin 30^\circ$ C. $\cos 30^\circ$ D. $\cos 20^\circ$

相似题1_例2 (2023·江苏盐城市期中)

$$\cos 8^\circ \cos 22^\circ - \sin 8^\circ \sin 22^\circ = (\quad)$$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

相似题2_例2 (2023·四川成都市期末)

$$\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} \text{ 的值为 } (\quad)$$

A. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{6}$

第 11 讲

倍角公式

 知识精讲

二倍角公式

$$S_{2\alpha}: \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$C_{2\alpha}: \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$T_{2\alpha}: \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

 经典例题

考向1 倍角公式的正向应用

例1 (2023·黑龙江大庆市期末)

已知 $\alpha \in (0, \pi)$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

A. $-\frac{12}{25}$

B. $\frac{12}{25}$

C. $-\frac{24}{25}$

D. $\frac{24}{25}$

相似题1_例1 (2023·江苏南京市期末)

已知 $\tan \theta = \frac{1}{3}$, 则 $\tan\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. $\frac{1}{7}$

D. 7

相似题2_例1 (2023·广东江门市期末)

已知 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5}$, 则 $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) =$ _____.

考向2 倍角公式的逆向应用

例2 (2023·山东泰安市月考) (多选)

下列各式中, 值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的是 ()

A. $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$

B. $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$

C. $1 - 2 \sin^2 15^\circ$

D. $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ$

相似题1_例2 (2023·海南三模)

$$\cos 20^\circ - 2\cos^2 10^\circ = (\quad)$$

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $-\sqrt{3}$

C. -1

D. 2

相似题2_例2 (2023·广东河源市月考)

$$\sin^2 \frac{3\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} \text{ 的值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

第 12 讲

辅助角公式

知识精讲

辅助角公式

已知 a, b 为非零常数, 则有

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi),$$

称该公式为辅助角公式. 其中 φ 为辅助角, 一般取 $\varphi \in (0, 2\pi)$, 满足:

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{a},$$

φ 的大小由 $\tan \varphi$ 的值及 a, b 的符号确定.

经典例题

例1 (2023·广东肇庆市期中)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$, 则 $f(x)$ 的 ()

- A. 最小正周期为 π , 最大值为 $\sqrt{3} - 1$
- B. 最小正周期为 π , 最大值为 2
- C. 最小正周期为 2π , 最大值为 $\sqrt{3} - 1$
- D. 最小正周期为 2π , 最大值为 2

相似题1_例1 (2023·广东佛山市月考)

函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的最大值是 ()

- A. 1
- B. $\sqrt{3}$
- C. $1 + \sqrt{3}$
- D. 2

相似题2_例1 (2023·云南普洱市期中)

函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$ 的最小值是 ()

- A. -1
- B. $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

第1讲

例1

答案：D

解答：分针是每小时顺时针旋转一圈 -360°

所以根据任意角的定义：1个半小时旋转了 $-360^\circ \times \frac{3}{2} = -540^\circ$

故选：D.

相似题1_例1

答案： -30° ； -360°

解答：从13:00到14:00，经过一个小时，时针顺时针旋转 30° ，分针顺时针旋转 360°

结合负角的定义可知，时针转过的角为 -30° ，分针转过的角为 -360°

故答案为： -30° ， -360° .

相似题2_例1

答案：B

解答： $\angle AOC = 120^\circ + (-270^\circ) = -150^\circ$

故选：B.

例2

答案：B

解答：因为 $2183^\circ = 6 \times 360^\circ + 23^\circ$ ，所以角 2183° 与角 23° 的终边相同，B正确

因为 $2183^\circ - (-23^\circ) = 2206^\circ$ 不是 360° 的整数倍，所以它们的终边不同，A错误

因为 $2183^\circ - (-47^\circ) = 2230^\circ$ 不是 360° 的整数倍，所以它们的终边不同，C错误

因为 $2183^\circ - 47^\circ = 2136^\circ$ 不是 360° 的整数倍，所以它们的终边不同，D错误

故选：B.

相似题1_例2

答案：A

解答：因为与 380° 角终边相同的角的集合为 $\{\beta | \beta = 380^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

当 $k = -1$ 时，得到 $\beta = 20^\circ$ ，又 $k \in \mathbf{Z}$ ，所以易知B，C，D均不符合题意

故选：A.

相似题2_例2

答案: A

解答: 与 420° 终边相同的角为 $\alpha = 420^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$

取 $k = -1$, 得 $\alpha = 60^\circ$

$\therefore 60^\circ$ 与 420° 终边相同

故选: A.

例3

答案: $\{\alpha \mid -50^\circ + k \cdot 360^\circ \leq \alpha \leq 40^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

解答: 分别与角 $40^\circ, -50^\circ$ 终边相同的角为 $40^\circ + k \cdot 360^\circ, -50^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$

因此终边落在阴影区域 (包括边界) 的角的集合是 $\{\alpha \mid -50^\circ + k \cdot 360^\circ \leq \alpha \leq 40^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

故答案为: $\{\alpha \mid -50^\circ + k \cdot 360^\circ \leq \alpha \leq 40^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

相似题1_例3

答案: $\{\theta \mid k \cdot 360^\circ - 30^\circ \leq \theta \leq k \cdot 360^\circ + 135^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

解答: 由图可得, 角 θ 的集合是 $\{\theta \mid k \cdot 360^\circ - 30^\circ \leq \theta \leq k \cdot 360^\circ + 135^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

故答案为: $\{\theta \mid k \cdot 360^\circ - 30^\circ \leq \theta \leq k \cdot 360^\circ + 135^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

相似题2_例3

答案: D

解答: 当 $k = 2n, n \in \mathbf{Z}$ 时

集合为 $\{\alpha \mid 360^\circ \cdot n + 45^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ \cdot n + 90^\circ, n \in \mathbf{Z}\}$

此时集合表示的是第一象限上半部分的角

当 $k = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}$ 时

集合为 $\{\alpha \mid 360^\circ \cdot n + 225^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ \cdot n + 270^\circ, n \in \mathbf{Z}\}$

此时集合表示的是第三象限下半部分的角

故选: D.

例4

答案: B

解答: 因为 $\alpha = -2023^\circ = -360^\circ \times 6 + 137^\circ$

而 $90^\circ < 137^\circ < 180^\circ$

所以 α 的终边在第二象限

故选：B.

相似题1_例4

答案：B

解答：对于A，令 $\alpha = -300^\circ = 60^\circ - 360^\circ$ ，显然 α 是第一象限角，同时也是负角，故A错误

对于B，不妨设 θ 是钝角，则 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ，所以 θ 一定是第二象限角，故B正确

对于C，令 $\beta = -60^\circ$ ，显然 β 是小于 90° 的角，但不是锐角，故C错误

对于D，令 $\alpha = -300^\circ = 60^\circ - 360^\circ$ ，显然 α 是第一象限角，但不是锐角，故D错误

故选：B.

相似题2_例4

答案：D

解答：若 α 是第一象限角

则： $90^\circ - \alpha$ 位于第一象限， $90^\circ + \alpha$ 位于第二象限， $360^\circ - \alpha$ 位于第四象限， $180^\circ + \alpha$ 位于第三象限

故选：D.

第2讲

例1

答案：15

解答： $\because \pi = 180^\circ$

$$\therefore \frac{1}{12}\pi = \frac{1}{12} \times 180^\circ = 15^\circ$$

故答案为：15.

相似题1_例1

答案：C

解答：由弧度制的定义可知， $220^\circ = 220 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{9}$

故选：C.

相似题2_例1

答案： $\frac{6}{5}\pi$

解答： $216^\circ = \frac{216}{180}\pi\text{rad} = \frac{6}{5}\pi\text{rad}$

故答案为： $\frac{6}{5}\pi$.

第3讲

例1

答案: A

解答: 设扇形的半径为 r , 弧长为 l , 则
$$\begin{cases} l + 2r = 4 \\ l = 2r \end{cases}$$

解得 $r = 1$, $l = 2$

故选: A.

相似题1_例1

答案: B

解答: $l = \frac{n\pi R}{180} = \frac{200\pi}{180} = \frac{10\pi}{9}$

故选: B.

相似题2_例1

答案: π

解答: 因为扇形的圆心角为 $\frac{\pi}{3}$, 半径为3

则该扇形的弧长 $l = \frac{\pi}{3} \times 3 = \pi$

故答案为: π .

例2

答案: $\frac{5}{2}\pi$; $\frac{35}{4}\pi$

解答: 因为扇形的圆心角为 $\frac{5\pi}{14}$, 半径为7, 则该扇形的弧长 $l = \frac{5\pi}{14} \times 7 = \frac{5\pi}{2}$

扇形的面积 $S = \frac{1}{2} \times \frac{5\pi}{2} \times 7 = \frac{35\pi}{4}$

故答案为: $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{35\pi}{4}$.

相似题1_例2

答案: B

解答: 设扇形的半径为 r , 弧长为 l

则由题意可得 $2r + l = 36$, 所以 $l = 36 - 2r$

扇形面积为 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times (36 - 2r)r = -r^2 + 18r = -(r - 9)^2 + 81$

因为函数开口向下，则当 $r = 9$ 时扇形面积最大，此时扇形的圆心角的弧度为 $\frac{l}{r} = \frac{36 - 2 \times 9}{9} = 2$

故选：B.

相似题2_例2

答案：D

解答：设扇形的半径为 r ，则 $l = \frac{\pi}{3}r$ ，所以 $l^2 = \frac{\pi^2}{9}r^2$

$$\text{又 } S = \frac{lr}{2} = \frac{\frac{\pi}{3}r^2}{2} = \frac{\pi r^2}{6}$$

$$\therefore \frac{l^2}{S} = \frac{2\pi}{3}$$

故选：D.

第4讲

例1

答案: C

解答: 由题意可知: $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$

$$\text{所以 } \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

故选: C.

相似题1_例1

答案: A

解答: 由三角函数的定义得 $\cos \theta = \frac{-8m}{\sqrt{64m^2 + 9}}$

$$\text{所以 } \frac{-8m}{\sqrt{64m^2 + 9}} = -\frac{4}{5}, \quad m > 0$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{2}$$

故选: A.

相似题2_例1

答案: A

解答: 若 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且角 α 的终边经过点 $P(x, -2)$

$$\text{则 } \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0, \quad x > 0$$

$$\text{所以 } x = 2\sqrt{3}$$

故选: A.

第 5 讲

例1

答案: D

解答: $\because$ 角 α 的终边在第三象限

$$\therefore \tan \alpha > 0, \cos \alpha < 0$$

$\therefore$ 点 $P(\tan \alpha, \cos \alpha)$ 在第四象限

故选: D.

相似题1_例1

答案: D

解答: $\because \sin \alpha < 0$

$\therefore \alpha$ 的终边在第三, 四象限或 x 轴负半轴上

$$\because \tan \alpha < 0$$

$\therefore \alpha$ 的终边在第二, 四象限

综上所述, α 的终边一定落在第四象限

故选: D.

相似题2_例1

答案: BD

解答: $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$

$$\text{则} \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases}$$

故 α 为第二象限或第四象限

故选: BD.

第6讲

例1

解答: (1) $\tan \alpha \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \left| \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right| = -1$

(2) $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \tan \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1$

相似题1_例1

解答: 左边 = $\frac{1 + 2 \sin x \cos x}{1 - 2 \sin^2 x}$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin^2 x}$$
$$= \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$
$$= \frac{(\sin x + \cos x)^2}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$
$$= \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$$

右边 = $\frac{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$

故 $\frac{1 + 2 \sin x \cos x}{1 - 2 \sin^2 x} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$ 得证

相似题2_例1

解答: $\therefore \frac{\cos x}{1 - \sin x} - \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

$$= \frac{\cos^2 x - (1 + \sin x)(1 - \sin x)}{(1 - \sin x) \cdot \cos x}$$
$$= \frac{\cos^2 x - (1 - \sin^2 x)}{(1 - \sin x) \cdot \cos x}$$
$$= 0$$

$\therefore \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

第7讲

例1

答案: 0

$$\begin{aligned}\text{解答: 原式} &= \sin\left(-4\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{7}\right) \tan 4\pi - \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{6} + 0 - \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0\end{aligned}$$

故答案为: 0.

相似题1_例1

答案: D

$$\begin{aligned}\text{解答: } \sin 480^\circ &= \sin(360^\circ + 120^\circ) \\ &= \sin 120^\circ \\ &= \sin(180^\circ - 60^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

故选: D.

相似题2_例1

答案: B

$$\begin{aligned}\text{解答: } \because \cos(\pi - \alpha) &= -\frac{4}{5} \\ \therefore \cos \alpha &= \frac{4}{5} \\ \therefore \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \alpha = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

故选: B.

例2

答案: A

解答: $\because$ 角 α 的终边上有一点 $P(1, 3)$

$$\begin{aligned}\therefore x &= 1, \quad y = 3, \quad r = |OP| = \sqrt{10} \\ \therefore \sin \alpha &= \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

$$\text{则 } \frac{\sin(\pi - \alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{2 \cos(\alpha - 2\pi)} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}}}{2 \times \frac{1}{\sqrt{10}}} = 1$$

故选：A.

相似题1_例2

答案：A

解答： $\because \alpha \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha = -\frac{2}{3}$, 可得： $\tan \alpha = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{\cos(-\alpha) + 3 \sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi - \alpha) + 9 \sin \alpha} \\ &= \frac{\cos \alpha - 3 \sin \alpha}{-\cos \alpha + 9 \sin \alpha} = \frac{1 - 3 \tan \alpha}{9 \tan \alpha - 1} \\ &= \frac{1 - 3 \times \frac{2}{3}}{9 \times \frac{2}{3} - 1} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

故选：A.

相似题2_例2

解答：

$$(1) f(\alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha) \cos(2\pi - \alpha) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(-\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha (-\sin \alpha)}{\sin \alpha \sin \alpha} = -\cos \alpha$$

$\alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$

(2) $\because \alpha$ 是第三象限角, 且 $\sin(\alpha - \pi) = \frac{1}{5}$

$$\therefore \sin \alpha = -\frac{1}{5}$$

$$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\therefore f(\alpha) = -\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

第8讲

例1

答案: $\frac{\pi}{2}$

解答: 函数 $f(x) = \sin(4x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

故答案为: $\frac{\pi}{2}$.

相似题1_例1

答案: 6π

解答: 函数 $y = \cos \frac{x}{3}$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

故答案为: 6π .

相似题2_例1

答案: ± 1

解答: 根据周期公式 $T = \frac{2\pi}{|2\omega|} = \pi$

解得 $\omega = \pm 1$

故答案为: ± 1 .

例2

答案: D

解答: 对于A, 函数 $y = \sin x$ 为奇函数, 周期为 2π , 故A错误

对于B, 函数 $y = \cos x$ 为偶函数, 周期为 2π , 故B错误

对于C, 函数 $y = \sin 2x$ 为奇函数, 周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 故C错误

对于D, 函数 $y = \cos 2x$ 为偶函数, 周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 故D正确

故选: D.

相似题1_例2

答案: B

解答: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$, 故为偶函数

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

故选：B.

相似题2_例2

答案：D

解答：函数 $f(x) = \sin x$ ，函数 $f(x) = \sin 4x$ 为奇函数，不合题意

$$\text{又 } \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0, \quad \cos\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

则 $f(x) = \cos 2x$ 符合题意

故选：D.

例3

答案：C

解答：结合函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 的图象可得，它们在 $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 上都是增函数

故选：C.

相似题1_例3

答案：B

解答：A: $y = \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数

C: $y = \cos x$ 在 $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上是增函数

D: $y = \cos x$ 在 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ 上是增函数

故选：B.

相似题2_例3

答案：B

解答：A: $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in \mathbf{R}$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 先增后减，错误

B: 当 $x \in [0, \pi]$ 时, $x + \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, 为减函数，正确

C: 当 $x \in [-\pi, 0]$ 时, $x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 为增函数，错误

D: 当 $x \in [-\pi, \pi]$ 时, $x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 先增后减函数，错误

故选：B.

例4

答案: B

解答: $\because -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$

$$\therefore -1 \leq \sin x \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq 3 \sin x + 5 \leq 5, \text{ 即 } 2 \leq y \leq 5$$

$\therefore$ 函数 $y = 3 \sin x + 5 \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \right)$ 最大值为 5

故选: B.

相似题1_例4

答案: C

解答: $\because x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]$

$$\therefore \cos x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

$$\therefore \cos x = 2m + 3$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq 2m + 3 \leq 1, \text{ 即 } -\frac{5}{4} \leq m \leq -1$$

故选: C.

相似题2_例4

答案: $y = \frac{1}{2} \pm \sin x$

解答: $\because y = a + b \sin x$ 的值域是 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$

$$\therefore a = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2}, \quad b = \pm \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) = \pm 1$$

则此函数的表达式为 $y = \frac{1}{2} \pm \sin x$

故答案为: $y = \frac{1}{2} \pm \sin x$.

第9讲

例1

答案: $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}; \frac{\pi}{2}$

解答: $y = \tan 2x$ 定义域满足 $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

解得 $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

故定义域为: $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

最小正周期是 $T = \frac{\pi}{2}$

故答案为: $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}; \frac{\pi}{2}$.

相似题1_例1

答案: A

解答: 因为函数 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 令 $2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

解得 $x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

所以函数 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

故选: A.

相似题2_例1

答案: D

解答: 由 $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 有意义可得, $x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

即 $x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

故函数 $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域为 $\left\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

故选: D.

例2

答案: B

解答: 由正切函数的周期公式得函数 $y = \tan x$ 的最小正周期是 $T = \frac{\pi}{1} = \pi$

故选: B.

相似题1_例2

答案: B

解答: 函数 $y = 5 \tan \frac{x}{2}$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

故选: B.

相似题2_例2

答案: D

解答: 对于A, 函数 $y = \sin \frac{x}{2}$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, 故选项A错误

对于B, 函数 $y = \cos 2x$ 的周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 故选项B错误

对于C, 函数 $y = \tan \frac{x}{2}$ 的周期为 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$, 故选项C错误

对于D, 函数 $y = \tan 2x$ 的周期为 $\frac{\pi}{2}$, 故选项D正确

故选: D.

例3

答案: A

解答: 函数 $y = \tan \frac{x}{2}$ 的周期 $T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

再由 $\tan\left(-\frac{x}{2}\right) = -\tan \frac{x}{2}$, 得此函数为奇函数

故选: A.

相似题1_例3

答案: $\left(\frac{k\pi}{4}, 0\right)$

解答: 函数 $f(x) = \tan x$ 的图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

所以函数 $f(x) = \tan 2x$ 的图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{4}, 0\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

故答案为: $\left(\frac{k\pi}{4}, 0\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

相似题2_例3

答案: $\left(\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}, 0\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

解答: 对于函数 $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, 令 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

求得 $x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$

可得函数的图象的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}, 0\right), k \in \mathbf{Z}$

故答案为: $\left(\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}, 0\right), k \in \mathbf{Z}$.

例4

答案: C

解答: 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上, $2x \in (0, \pi)$, $y = \sin 2x$ 没有单调性, 故排除A

在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上, $2x \in (0, \pi)$, $y = \cos 2x$ 单调递减, 故排除B

在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上, $y = \tan x$ 单调递增, 且其最小正周期为 π , 故C正确

根据函数以 π 为最小正周期, $y = \sin \frac{x}{2}$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, 故排除D

故选: C.

相似题1_例4

答案: A

解答: 根据函数 $y = \tan x$ 的性质, 满足①在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上是增函数; ②为奇函数; ③周期为 π

而函数 $y = \cos x$ 的最小正周期为 2π , 且函数为偶函数, 故B错误

对于函数 $y = \tan \frac{x}{2}$ 的最小正周期为 2π , 故C不符合

对于函数 $y = \sin x$ 的最小正周期为 2π , 故D错误

故选: A.

相似题2_例4

答案: $\left(\frac{1}{3}k\pi - \frac{\pi}{12}, \frac{1}{3}k\pi + \frac{\pi}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$

解答: 函数 $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

令 $k\pi - \frac{\pi}{2} < 3x - \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

解得 $\frac{1}{3}k\pi - \frac{\pi}{12} < x < \frac{1}{3}k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$

所以函数 $y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递增区间是 $\left(\frac{1}{3}k\pi - \frac{\pi}{12}, \frac{1}{3}k\pi + \frac{\pi}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$

故答案为: $\left(\frac{1}{3}k\pi - \frac{\pi}{12}, \frac{1}{3}k\pi + \frac{\pi}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$.

第 10 讲

例1

答案: B

解答: $\therefore \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

又 α, β 为锐角

$$\therefore \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

又 $0 < \alpha + \beta < \pi$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$$

故选: B.

相似题1_例1

答案: B

解答: $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

故选: B.

相似题2_例1

答案: D

解答: $\therefore \sin \alpha = -\frac{3}{5}$, 且 α 为第四象限角, 则 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$

$$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 7$$

故选: D.

例2

答案: B

解答: $\sin 5^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 5^\circ = \sin(5^\circ + 25^\circ) = \sin 30^\circ$

故选: B.

相似题1_例2

答案: A

解答: $\cos 8^\circ \cos 22^\circ - \sin 8^\circ \sin 22^\circ$

$$= \cos(8^\circ + 22^\circ)$$

$$= \cos 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故选: A.

相似题2_例2

答案: C

解答: $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} = \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 15^\circ} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

故选: C.

第 11 讲

例1

答案: D

解答: 因为 $\alpha \in (0, \pi)$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$

$$\text{所以 } \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{则 } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

故选: D.

相似题1_例1

答案: D

解答:

$$\text{由题意 } \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{则 } \tan\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 2\theta + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan 2\theta \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{3}{4} + 1}{1 - \frac{3}{4}} = 7$$

故选: D.

相似题2_例1

答案: $-\frac{7}{25}$

解答: 因为 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5}$

由余弦的二倍角公式可得

$$\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$$

故答案为: $-\frac{7}{25}$.

例2

答案: BC

解答: 对于A, $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, 错误

对于B, $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 正确

对于C, $1 - 2 \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 正确

对于D, $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1$, 错误

故选: BC.

相似题1_例2

答案: C

解答: $\cos 20^\circ - 2 \cos^2 10^\circ = \cos 20^\circ - (\cos 20^\circ + 1) = -1$

故选: C.

相似题2_例2

答案: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解答: 因为 $\sin \frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{8}$

则 $\sin^2 \frac{3\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

第12讲

例1

答案: B

解答: $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

当 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ 时, 有最大值2

故选: B.

相似题1_例1

答案: D

解答: 由题意可得: $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

由正弦函数的性质可得: $-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$

$\therefore -2 \leq f(x) \leq 2$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ 的最大值是2

故选: D.

相似题2_例1

答案: A

解答: $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore y_{\min} = -1$

故选: A.