

高三 数学

一轮闯关训练-导数

Math

产品亮点

- ▶ 分层合理效率高
- ▶ 精选分类覆盖广
- ▶ 题目典型收获多

目录



第 1 讲

导数的计算及几何意义 1

第 2 讲

导数与单调性 7

第 3 讲

极值与最值 14

第 4 讲

不等式与零点 20

第 5 讲

基础检测卷 26

第 6 讲

中档检测卷 28

参考答案与解析 30

第 1 讲

导数的计算及几何意义



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

导数的定义

练1 (★★☆☆☆)

设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处导数存在，则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2 + \Delta x)}{2\Delta x} = (\quad)$

- A. $-2f'(2)$ B. $2f'(2)$ C. $-\frac{1}{2}f'(2)$ D. $\frac{1}{2}f'(2)$

练2 (★★☆☆☆)

若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{3\Delta x} = 1$ ，则 $f'(x_0)$ 等于 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. 2

练3 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数为1，则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 等于 ()

- A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

已知切点求切线方程

练4 (★★☆☆☆)

曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程为 ()

- A. $y = 3x - 4$ B. $y = -3x + 2$ C. $y = -4x + 3$ D. $y = 4x + 5$

练5 (★★☆☆☆)

曲线 $y = x^2 + e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 ()

- A. $x - y + 1 = 0$ B. $x + y - 1 = 0$ C. $x - 2y + 2 = 0$ D. $2x - y + 1 = 0$

练6 (★★☆☆☆)

曲线 $y = 2 \sin x + \cos x$ 在点 $(\pi, -1)$ 处的切线方程为 ()

- A. $x - y - \pi - 1 = 0$ B. $2x - y - 2\pi - 1 = 0$
C. $2x + y - 2\pi + 1 = 0$ D. $x + y - \pi + 1 = 0$

给定斜率求切线

练7 (★★☆☆☆)

若曲线 $y = x^4$ 的一条切线 l 与直线 $x + 4y - 8 = 0$ 垂直, 则 l 的方程为 ()

- A. $4x - y - 3 = 0$ B. $x + 4y - 5 = 0$ C. $4x - y + 3 = 0$ D. $x + 4y + 3 = 0$

练8 (★★☆☆☆)

曲线 $y = x^3 + x - 2$ 在 P 点处的切线平行于直线 $y = 4x - 1$, 则此切线方程是 ()

- A. $y = 4x$ B. $y = 4x - 4$
C. $y = 4x + 8$ D. $y = 4x$ 或 $y = 4x - 4$

利用切线方程求参

练9 (★★☆☆☆)

设曲线 $y = a(x-2) - \ln(x-1)$ 在点 $(2, 0)$ 处的切线方程为 $y = 3x$, 则 $a =$ ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

练10 (★★☆☆☆)

若直线 $y = x + 1$ 与曲线 $y = x^3 + bx^2 + c$ 相切于点 $A(1, 2)$, 则 $b + 2c =$ ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分).

复合函数求导

练11 (★★☆☆☆)

下列求导运算正确的是 ()

- A. $(e^{-x})' = e^{-x}$ B. $(\sqrt{x})' = \frac{2}{\sqrt{x}}$
 C. $(\log_{2018} x)' = \frac{1}{x \ln 2018}$ D. $(x^2 \cos x)' = 2x \cos x + x^2 \sin x$

练12 (★★★★☆☆)

设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 若 $f(x) = x \cdot \ln(2x-1)$, 则 $f'(1) =$ _____.

练13 (★★☆☆☆)

若函数 $f(x) = \ln(2x+1) - f'(1)x^2 + e^{x-1}$, 则 $f'(1) =$ _____.

过曲线外一点求切线方程

练14 (★★★☆☆)

过点 $(-1, 0)$ 作抛物线 $y = x^2 + x + 1$ 的切线, 则其中一条切线为 ()

A. $2x + y + 2 = 0$

B. $3x - y + 3 = 0$

C. $x + y + 1 = 0$

D. $x - y + 1 = 0$

练15 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = x \ln x$, 若直线 l 过点 $(0, -1)$, 并且与曲线 $y = f(x)$ 相切, 则直线 l 的方程为 ()

A. $x + y - 1 = 0$

B. $x - y - 1 = 0$

C. $x + y + 1 = 0$

D. $x - y + 1 = 0$

练16 (★★★☆☆)

曲线 $y = \ln x$ 的过原点的切线方程是_____.

利用切线方程求参

练17 (★★★☆☆)

设曲线 $y = a(x - 2) - \ln(x - 1)$ 在点 $(2, 0)$ 处的切线方程为 $y = 3x - 6$, 则 $a =$ ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

练18 (★★★☆☆)

直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 是曲线 $y = \ln x$ 的一条切线, 则实数 b 的值为_____.

切线距离转化

练19 (★★★☆☆)

点 P 是曲线 $y = e^x$ 上任意一点, 则点 P 到直线 $y = x$ 的最小距离为_____.

练20 (★★★★☆)

设点 P 在曲线 $y = e^x$ 上, 点 Q 在曲线 $y = \ln x$ 上, 则 $|PQ|$ 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2} - 1$ C. $1 + \sqrt{2}$ D. $\ln 2$

提能力 本模块适合90-120分水平学生(满分150分)。

切线与距离转化

练21 (★★★★☆)

若点 P 是曲线 $y = x^2 - \ln x$ 上任一点, 则点 P 到直线 $x - y - 4 = 0$ 的最小距离是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 3 C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

练22 (★★★★☆)

设函数 $F(x) = (x - m)^2 + (e^{2x} - 2m)^2$, 若存在 x_0 使得 $F(x_0) \leq \frac{1}{5}$ 成立, 则 $m =$ ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

练23 (★★★★☆)

已知 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ 且满足 $\frac{a + 3 \ln a}{b} = \frac{d - 3}{2c} = 1$, 则 $(a - c)^2 + (b - d)^2$ 的最小值为_____.

利用切线求参

练24 (★★★★★)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} kx - 3, & x \geq 0 \\ \ln(-2x), & x < 0 \end{cases}$ 的图象上有两对关于 y 轴对称的点, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(0, e)$ B. $\left(0, \frac{1}{2}e^{-2}\right)$ C. $(0, 2e^2)$ D. $(0, e^{-2})$

公切线问题求参

练25 (★★★★☆)

设点 P 为函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2ax$ 与 $g(x) = 3a^2 \ln x + b$ ($a > 0$) 的图象的公共点, 以 P 为切点可作直线与两曲线都相切, 则实数 b 的最大值为_____.

练26 (★★★☆☆) (2020·辽宁大连市期中)

若曲线 $C_1: y = ax^2$ ($a > 0$) 与曲线 $C_2: y = e^x$ 存在公共切线, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $\left[\frac{e^2}{8}, +\infty\right)$ B. $\left(0, \frac{e^2}{8}\right]$ C. $\left[\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$ D. $\left(0, \frac{e^2}{4}\right]$

第 2 讲

导数与单调性



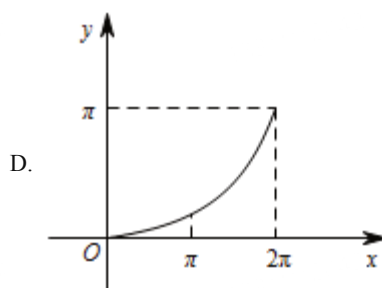
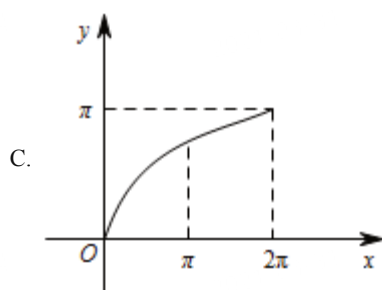
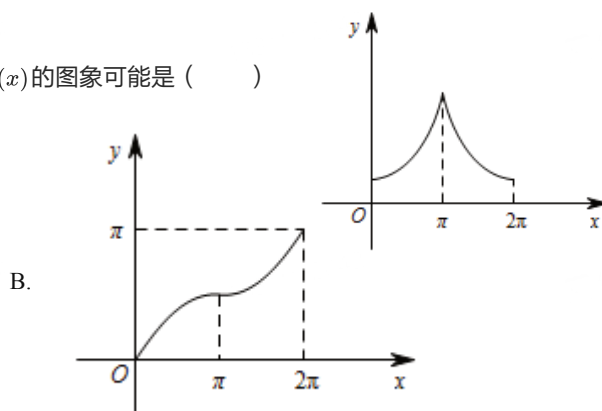
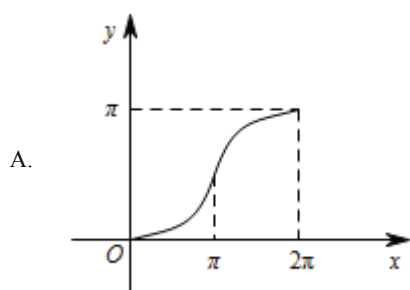
本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

利用导函数图象判断原函数

练1 (★★☆☆☆)

若 $y = f(x)$ 的导函数在区间 $[0, 2\pi]$ 上的图象如图所示，则 $f(x)$ 的图象可能是 ()

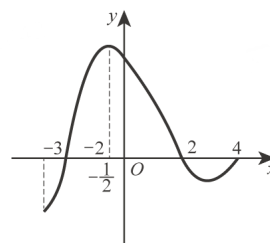


练2 (★★☆☆☆)

函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-3, 4]$ ，其导函数的图象如图所示，给出下列判断：

- ①函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-3, -\frac{1}{2})$ 内单调递增；
- ②函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-\frac{1}{2}, 3)$ 内单调递减；
- ③函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-2, 2)$ 内单调递增；
- ④函数 $y = f(x)$ 的单调递减区间是 $(-3, -2) \cup (2, 4)$ 。

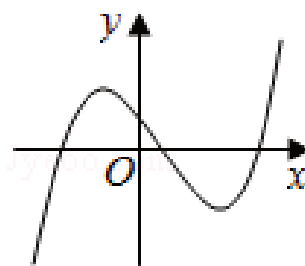
则上述判断中正确的是_____。



练3 (★★☆☆☆)

函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $y = f(x)$ 的图象可能是 ()

- A.
- B.
- C.
- D.



求具体函数的单调区间

练4 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ 的单调递减区间是 ()

- A. $(-3, 1)$ B. $(-\infty, 3)$ C. $(-1, 3)$ D. $(3, +\infty)$

练10 (★★☆☆☆)

对于 $\mathbf{R}$ 上可导的任意函数 $f(x)$, 若满足 $(x+1)f'(x) \geq 0$, 则有 ()

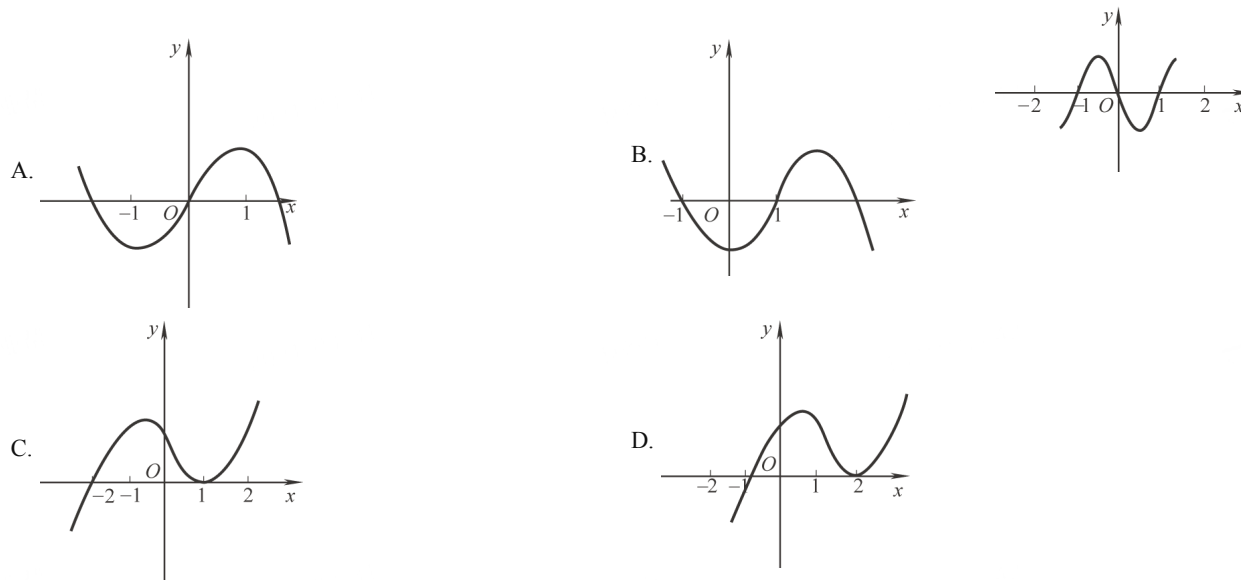
- A. $f(0) + f(-2) < 2f(-1)$ B. $f(0) + f(-2) \leq 2f(-1)$
C. $f(0) + f(-2) > 2f(-1)$ D. $f(0) + f(-2) \geq 2f(-1)$

刷中档 本模块适合60-90分水平学生 (满分150分) .

原函数与导函数图象结合问题

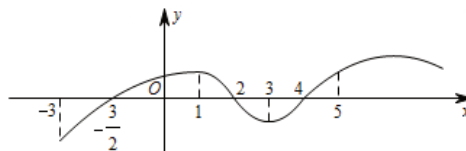
练11 (★★★★☆)

已知函数 $y = -xf'(x)$ 的图象如图所示, 其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 则函数 $y = f(x)$ 的大致图象可以是 ()



练12 (★★★★☆)

如图是函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象, 则下列判断正确的是 ()

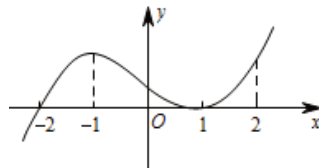


- A. 在区间 $(-3, 1)$ 上 $y = f(x)$ 是增函数 B. 在区间 $(1, 3)$ 上 $y = f(x)$ 是减函数
C. 在区间 $(4, 5)$ 上 $y = f(x)$ 是增函数 D. 在 $x = 2$ 时 $y = f(x)$ 取到极小值

练13 (★★☆☆☆)

如图是函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象, 给出下列命题:

- ① -2 是函数 $y = f(x)$ 的极值点;
 ② 1 是函数 $y = f(x)$ 的极值点;
 ③ $y = f(x)$ 的图象在 $x = 0$ 处切线的斜率小于零;
 ④ 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-2, 2)$ 上单调递增.



则正确命题的序号是 ()

- A. ①③ B. ②④ C. ②③ D. ①④

含参函数的单调区间问题

练14 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = \ln x - ax$, 讨论函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的单调性时, 应讨论 a 与 () 的大小关系

- A. $1, 2$ B. $\frac{1}{2}, 1$ C. $0, \ln 2$ D. 0

练15 (★★☆☆☆)

设函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x - mx$, $m > 2$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $\left(0, \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$
 C. $\left(\frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}, \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}\right)$ D. 不存在

练16 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = x + \frac{b}{x}$ ($b > 0$) 的单调减区间为 ()

- A. $(-\sqrt{b}, \sqrt{b})$ B. $(-\infty, -\sqrt{b}), (\sqrt{b}, +\infty)$
 C. $(-\sqrt{b}, 0) \cup (0, \sqrt{b})$ D. $(-\sqrt{b}, 0), (0, \sqrt{b})$

已知函数的单调性求参

练17 (★★☆☆☆)

若函数 $y = \ln x - ax$ 的单调递减区间为 $(1, +\infty)$, 则 ()

- A. $0 < a < 1$ B. $-1 < a < 0$ C. $a = -1$ D. $a = 1$

练18 (★★★★☆)

如果函数 $f(x) = ax^3 - x^2 + x - 5$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $a > \frac{1}{3}$ B. $a \geq \frac{1}{3}$ C. $a < \frac{1}{3}$ D. $a \leq \frac{1}{3}$

练19 (★★★★☆)

函数 $f(x) = x^3 + ax - 2$ 在区间 $[1, +\infty)$ 内是增函数, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[3, +\infty)$ B. $[-3, +\infty)$ C. $(-3, +\infty)$ D. $(-\infty, -3)$

练20 (★★★★☆)

设函数 $f(x) = kx^3 + 3(k-1)x^2 - k^2 + 1$ 在区间 $(0, 4)$ 上是减函数, 则 k 的取值范围 ()

- A. $k < \frac{1}{3}$ B. $0 < k \leq \frac{1}{3}$ C. $0 \leq k \leq \frac{1}{3}$ D. $k \leq \frac{1}{3}$

提能力 本模块适合90-120分水平学生 (满分150分) .

构造函数比较大小

练21 (★★★★☆)

已知 $a = \frac{2}{5} \ln \frac{5}{2}$, $b = \frac{\ln e}{e}$ (e 是自然对数的底数), $c = \frac{\ln 2}{2}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $c < a < b$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

练22 (★★★★☆☆)

已知 $a = e^3$, $b = 3^e$, $c = \pi^3$, 则它们的大小关系是 ()

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $b < a < c$

D. $b < c < a$

练23 (★★★★☆☆)

设 $a > 0$, $b > 0$ ()

A. 若 $2^a + 2a = 2^b + 3b$, 则 $a > b$

B. 若 $2^a + 2a = 2^b + 3b$, 则 $a < b$

C. 若 $2^a - 2a = 2^b - 3b$, 则 $a > b$

D. 若 $2^a - 2a = 2^b - 3b$, 则 $a < b$

导数与单调性综合

练24 (★★★★★)

已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 若 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x) > -2$, 则不等式 $f(x-1) < x^2(3-2\ln x) + 3(1-2x)$ 的解集是 ()

A. $(0, 1)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(0, +\infty)$

D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

练25 (★★★★☆) (多选)

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 导函数为 $f'(x)$, $xf'(x) - f(x) = x \ln x$, 且 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$, 则 ()

A. $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$

B. $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{e}$ 处取得极大值

C. $0 < f(1) < 1$

D. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增

练26 (★★★★☆)

设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的导函数, 当 $x > 0$ 时, $x \ln x \cdot f'(x) < -f(x)$, 则使得 $(x^2 - 4)f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

A. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

B. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

C. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

D. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

第3讲

极值与最值



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

极值点的判断

练1 (★★☆☆☆)

下列结论中正确的是 ()

- A. 导数为零的点一定是极值点
- B. 如果 $f'(x_0) = 0$ 且在 x_0 附近的左侧 $f'(x) > 0$ ，右侧 $f'(x) < 0$ ，那么 $f(x_0)$ 是极大值
- C. 如果 $f'(x_0) = 0$ 且在 x_0 附近的左侧 $f'(x) > 0$ ，右侧 $f'(x) < 0$ ，那么 $f(x_0)$ 是极小值
- D. 如果 $f'(x_0) = 0$ 且在 x_0 附近的左侧 $f'(x) < 0$ ，右侧 $f'(x) > 0$ ，那么 $f(x_0)$ 是极大值

练2 (★★☆☆☆)

函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，若 $(x+1) \cdot f'(x) > 0$ ，则下列结论中正确的一项为 ()

- A. $x = -1$ 一定是函数 $f(x)$ 的极大值点
- B. $x = -1$ 一定是函数 $f(x)$ 的极小值点
- C. $x = -1$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点
- D. $x = -1$ 不一定是函数 $f(x)$ 的极值点

具体函数的极值问题

练3 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ 的极值点的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

练4 (★★☆☆☆)

函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $x > 0$ 时有 ()

- A. 极小值 B. 极大值 C. 既有极大值又有极小值 D. 不存在极值

练5 (★★☆☆☆)

函数 $y = xe^x$ 的极小值为_____.

练6 (★★☆☆☆)

设函数 $f(x) = x \ln x$, 则 $f(x)$ 的极小值点为 ()

- A. $x = e$ B. $x = \ln 2$ C. $x = e^2$ D. $x = \frac{1}{e}$

极值与最值的关系

练7 (★★☆☆☆)

下列命题中真命题是 ()

- A. 函数的最大值一定是函数的极大值
 B. 函数的极大值可能会小于这个函数的极小值
 C. 函数在某一个闭区间上的极小值就是函数在这一区间上的最小值
 D. 函数在开区间内不存在最大最小值

练8 (★★☆☆☆)

下列说法正确的是 ()

- A. 函数在闭区间上的极大值一定比极小值大
B. 函数在闭区间上的最大值一定是极大值
C. 满足 $f'(x) = 0$ 的点可能不是函数的极值点
D. 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上一定存在最值

具体函数的最值问题

练9 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = x \ln x$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{1}{e}$
B. e
C. $-e$
D. $-\frac{1}{e}$

练10 (★★★☆☆)

函数 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 在定义域内 ()

- A. 有最大值2, 无最小值
B. 无最大值, 有最小值-2
C. 有最大值2, 最小值-2
D. 无最值

刷中档 本模块适合60-90分水平学生 (满分150分) .

求含参函数的极值

练11 (★★★☆☆)

设 $a \in \mathbf{R}$, 若函数 $y = e^x + 2ax$, $x \in \mathbf{R}$ 有大于0的极值点, 则 ()

- A. $a < -\frac{1}{e}$
B. $a > -\frac{1}{e}$
C. $a < -\frac{1}{2}$
D. $a > -\frac{1}{2}$

练12 (★★★☆☆)

已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 则函数 $f(x) = (x - a)^2 \ln x$ ()

- A. 有极大值, 无极小值
B. 有极小值, 无极大值
C. 既有极大值, 又有极小值
D. 既无极大值, 又无极小值

已知极值求参数范围

练13 (★★★★☆)

已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + (a+6)x - 1$ 有极大值和极小值, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $-1 < a < 2$ B. $-3 < a < 6$ C. $a < -3$ 或 $a > 6$ D. $a < -1$ 或 $a > 2$

练14 (★★★★☆)

若函数 $f(x) = (x^2 + ax + 3)e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个极值点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2\sqrt{2}]$ B. $(-\infty, -2\sqrt{2})$ C. $(-\infty, -3]$ D. $(-\infty, -3)$

练15 (★★★★☆)

设 $a \in \mathbf{R}$, 若函数 $y = e^{ax} + 3x$, $x \in \mathbf{R}$ 有大于零的极值点, 则 ()

- A. $a > -3$ B. $a < -3$ C. $a > -\frac{1}{3}$ D. $a < -\frac{1}{3}$

含参函数的最值

练16 (★★★★☆)

若函数 $f(x) = x^3 - 3x - a$ 在区间 $[0, 3]$ 上的最大值、最小值分别为 M , N , 则 $M - N$ 的值为 ()

- A. 2 B. 4 C. 18 D. 20

练17 (★★★★☆)

函数 $f(x) = ae^x - 2x + a^2 - 5$ 的值域为 D , 若 $1 \in D$, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 1]$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(0, 2]$ D. $[2, +\infty)$

练18 (★★★★☆)

已知函数 $f(x) = x \ln x - x + 2a$, 若函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(f(x))$ 有相同的值域, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $\left[1, \frac{3}{2}\right)$ D. $[1, +\infty)$

已知最值求参

练19 (★★★★☆☆)

若函数 $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + m$ 在 $[-2, 1]$ 上的最大值为 $\frac{9}{2}$, 则实数 m 的值为 ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

练20 (★★★★☆☆)

若函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + a}$ ($a > 0$) 在 $[1, +\infty)$ 上的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 a 的值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3} + 1$ D. $\sqrt{3} - 1$

提能力 本模块适合90-120分水平学生 (满分150分) .

多极值点问题

练21 (★★★★☆☆)

设 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 是函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 - (b-1)x$ 的两个极值点, 若 $b \geq \frac{7}{2}$, 则 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

练22 (★★★★☆☆)

若函数 $f(x) = x^2 - 2x + a \ln x$ 存在两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 若 $t < \frac{f(x_1)}{x_2}$ 恒成立, 则 t ()

- A. 有最大值 $-\frac{3}{2} - \ln 2$, 无最小值 B. 有最小值 $-\frac{3}{2} - \ln 2$, 无最大值
C. 无最大值也无最小值 D. 有最大值 $4 \ln 2$, 且有最小值 $-\frac{3}{2} - \ln 2$

练23 (★★★★☆☆)

若函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax - 1$ 的两个极值点为 x_1, x_2 , 且 $0 < x_1 < x_2$, 则 $x_1^2 + x_2^2$ 的取值范围是 ()

- A. $(2, +\infty)$ B. $(-\infty, 4)$ C. $(1, 5)$ D. $(2, 4)$

最值问题

练24 (★★★★☆)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = xe^{-x}$, 若存在 $x_1 \in (0, +\infty)$, $x_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_1) = g(x_2) = k$ ($k < 0$) 成立, 则

$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 e^k$ 的最大值为 ()

A. e^2

B. e

C. $\frac{4}{e^2}$

D. $\frac{1}{e^2}$

练25 (★★★★☆)

已知函数 $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \ln x + \frac{1}{2}$, 对 $\forall a \in \mathbf{R}$, $\exists b \in (0, +\infty)$, 使得 $f(a) = g(b)$, 则 $b - a$ 的最小值为 ()

A. $1 + \frac{\ln 2}{2}$

B. $1 - \frac{\ln 2}{2}$

C. $2\sqrt{e} - 1$

D. $\sqrt{e} - 1$

练26 (★★★★☆)

已知函数 $f(x) = e^{2x-3}$, $g(x) = \frac{1}{4} + \ln \frac{x}{2}$, 若 $f(m) = g(n)$ 成立, 则 $n - m$ 的最小值为 ()

A. $\frac{1}{2} + \ln 2$

B. $\ln 2$

C. $\frac{1}{2} + 2 \ln 2$

D. $2 \ln 2$

第4讲

不等式与零点



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

利用最值解决恒成立问题

练1 (★★☆☆☆)

$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ ，若对任意 $x \in [0, 2]$ 都有 $f(x) < m$ 成立，则 m 的取值范围为 ()

- A. $(7, +\infty)$ B. $(8, +\infty)$ C. $[7, +\infty)$ D. $(9, +\infty)$

练2 (★★☆☆☆)

已知 $f(x) = -x^3 + 3x - 3$ ，当 $x \in [-2, 3]$ 时， $f(x) \geq m$ 恒成立，则实数 m 的最大值为 ()

- A. 1 B. -1 C. -5 D. -21

分离参数解决恒成立问题

练3 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - mx$ (e 为自然对数的底数)，若 $f(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, e)$ C. $\left(\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{e^2}{4}\right)$

分类讨论解决恒成立问题

练4 (★★☆☆☆)

已知不等式 $e^x \geq kx$ 恒成立, 则 k 的最大值为 ()A. e B. $-e$ C. $\frac{1}{e}$ D. $-\frac{1}{e}$

利用最值解决存在性问题

练5 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$, 若 $\exists x \in [-1, 1]$, 使 $f(x) \geq m$ 成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

练6 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = x \cos x - \sin x$, 若存在实数 $x \in [0, 2\pi]$, 使得 $f(x) < t$ 成立, 则实数 t 的取值范围是_____.

练7 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + a$, 若 $\exists x_0 \in [-1, 4]$, 使 $f(x_0) = 2a$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

具体函数零点个数

练8 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = \ln x - x + 1$ 的零点个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

练9 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7$ 在 $(0, 2)$ 内零点的个数为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

练10 (★★☆☆☆)

设函数 $f(x) = \ln x - 2x + 6$, 则 $f(x)$ 的零点的个数为 ()

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分)。

分离参数解决恒成立问题

练11 (★★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \ln x - x$, 若 $f(x) - m + 1 \leq 0$ 恒成立, 则 m 的取值范围为_____.

练12 (★★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \ln x - a$, 若 $f(x) < x^2$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

练13 (★★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = 2\ln x + \frac{a}{x^2}$ ($x > 0$), 若当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 2$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

练14 (★★★★☆☆)

设函数 $f(x) = ax^3 - 3x + 1$ ($x \in \mathbf{R}$), 若对于任意 $x \in (0, 1]$, 都有 $f(x) \geq 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

分离参数解决

练15 (★★★★☆☆)

函数 $f(x) = -\frac{e^x}{1+x^2}$, 若存在 $x_0 \in (0, 2]$ 使得 $m - f(x_0) > 0$ 成立, 则实数 m 的范围是 ()

A. $\left(-\frac{1}{5}e^2, +\infty\right)$

B. $(-1, +\infty)$

C. $(1, +\infty)$

D. $\left(-\frac{1}{2}e, +\infty\right)$

练16 (★★★★☆☆)

若方程 $\sqrt{x^2-1} = 2x + m$ 有实数解, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $[-\sqrt{3}, 0) \cup [2, +\infty)$ B. $[-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3}]$
 C. $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

练17 (★★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = a\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2\ln x$ ($a \in \mathbf{R}$), $g(x) = -\frac{a}{x}$, 若至少存在一个 $x_0 \in [1, e]$, 使得 $f(x_0) > g(x_0)$ 成立, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $[1, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $[0, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

练18 (★★★★☆☆)

若存在 x 使不等式 $\frac{x-m}{e^x} > \sqrt{x}$ 成立, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $\left(-\infty, -\frac{1}{e}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{e}, e\right)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, +\infty)$

含参函数的零点个数问题

练19 (★★☆☆☆☆)

若 $a > 2$, 则函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 1$ 在 $(0, 2)$ 内零点的个数为 ()

- A. 3 B. 2 C. 0 D. 1

练20 (★★★★☆☆)

设 $a > 1$, 则函数 $f(x) = (1+x^2)e^x - a$ 在 $[-1, 2a]$ 上零点的个数为_____.

提能力

本模块适合90-120分水平学生(满分150分)。

恒存问题求参

练21 (★★★★☆)

已知函数 $f(x) = x^2 - x - \frac{4x}{x-1}$ ($x < 1$), $g(x) = x^2 + bx - 2$ ($x > 0$), $b \in \mathbf{R}$, 若函数 $f(x)$ 图象上存在 A, B 两个不同的点与函数 $g(x)$ 图象上 A', B' 两点关于 y 轴对称, 则 b 的取值范围是 ()

- A. $(-4\sqrt{2} - 5, +\infty)$ B. $(4\sqrt{2} - 5, +\infty)$ C. $(-4\sqrt{2} - 5, 1)$ D. $(4\sqrt{2} - 5, 1)$

练22 (★★★★☆)

已知函数 $f(x) = \frac{a + \ln x}{x}$, $g(x) = e^x - 1$ (e 为自然对数的底数), $\exists x \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x) \geq g(x)$ 成立, 则实数 a 的最小值为 ()

- A. 1 B. e C. 2 D. $\ln 2$

练23 (★★★★☆)

已知函数 $f(x) = xe^x$, $g(x) = \ln(x+1) + ax^2$, 若对 $\forall x_1 \in [0, 1]$, $\exists x_2 \in [0, 1]$ 使得 $f(x_1) > g(x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a < -\ln 2$ B. $a \leq -\ln 2$ C. $a < e - \ln 2$ D. $a \leq e - \ln 2$

已知零点个数求参

练24 (★★★★☆)

方程 $\cos^2 x - a \sin x + 1 = 0$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有解, 则 a 的取值范围是_____.

练25 (★★★★☆)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \leq 0 \\ x \ln x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = kx - 1$, 若方程 $f(x) - g(x) = 0$ 在 $x \in (-2, e^2)$ 上有 3 个实根, 则 k 的取值范围为 ()

A. $(1, 2]$

B. $\left(1, \frac{3}{2}\right] \cup \{2\}$

C. $\left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

D. $\left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2 + \frac{1}{e^2}\right)$

练26 (★★★★☆☆)

设函数 $f(x) = ae^x - 2 \sin x$ ($x \in [0, \pi]$) 有且仅有一个零点, 则实数 a 的值为 ()

A. $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

B. $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$

C. $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}}$

D. $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$

第5讲

基础检测卷

本试卷共9个题目，选择5个，填空3个，解答1个，均为基础水平题目。限时30分钟。得分在70分以上视为合格，可以去做【刷中档】模块题目，冲刺更高的水平。

一、单选题，共5题，每题10分.

练1 (★★☆☆☆)

曲线 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ 在点 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程为 ()

- A. $2x + 2y + 1 = 0$ B. $2x + 2y - 1 = 0$ C. $2x - 2y - 1 = 0$ D. $2x - 2y - 3 = 0$

练2 (★★☆☆☆)

曲线 $y = -x^3 + 3x^2$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线方程为 ()

- A. $y = 3x - 1$ B. $y = -3x + 5$ C. $y = 3x + 5$ D. $y = 2x$

练3 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = xe^x - x^2 - 2x + 1$ 的单调减区间为 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(\ln 2, +\infty)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-1, \ln 2)$

练4 (★★☆☆☆)

关于函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的极值的说法正确的是 ()

- A. $f(x)$ 有极大值 $\frac{1}{e}$ B. $f(x)$ 有极小值 $\frac{1}{e}$ C. $f(x)$ 有极大值 e D. $f(x)$ 有极小值 e

练5 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = x^3 - 3x - 1$, 在区间 $[-3, 2]$ 上最大值为 M , 最小值为 N , 则 $M - N = (\quad)$

A. 20

B. 18

C. 3

D. 0

二、填空题, 共3题, 每题10分.

练6 (★★★☆☆)

过点 $(1, 1)$ 作曲线 $y = x^3$ 的切线, 则切线方程为_____.

练7 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = x - x \ln x$ 的单调增区间为_____.

练8 (★★★☆☆)

函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ 的值域为_____.

三、解答题, 共1题, 每题20分.

练9 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \ln x + ax + 1$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若函数 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

第6讲

中档检测卷

本试卷共9个题目，选择5个，填空3个，解答1个，均为中档水平题目。限时30分钟。得分在70分以上视为合格，可以去做【提能力】模块题目，冲刺更高的水平。

一、单选题，共5题，每题10分.

练1 (★★★★☆)

过点 $(-1, 0)$ 作抛物线 $y = x^2 + x + 1$ 的切线，则其中一条切线为 ()

- A. $2x + y + 2 = 0$ B. $3x - y + 3 = 0$ C. $x + y + 1 = 0$ D. $x - y + 1 = 0$

练2 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = x + \frac{b}{x}$ ($b > 0$) 的单调减区间为 ()

- A. $(-\sqrt{b}, \sqrt{b})$ B. $(-\infty, -\sqrt{b}), (\sqrt{b}, +\infty)$
C. $(-\sqrt{b}, 0) \cup (0, \sqrt{b})$ D. $(-\sqrt{b}, 0), (0, \sqrt{b})$

练3 (★★★★☆)

设 $a \in \mathbf{R}$ ，若函数 $y = e^x + 2ax$ ， $x \in \mathbf{R}$ 有大于0的极值点，则 ()

- A. $a < -\frac{1}{e}$ B. $a > -\frac{1}{e}$ C. $a < -\frac{1}{2}$ D. $a > -\frac{1}{2}$

练4 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = ax - \ln x$, 若 $f(x) > 1$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

练5 (★★★☆☆)

设 $f(x) = |\ln x|$, 若 $f(x) - ax = 0$ 在区间 $(0, 4)$ 上有三个根, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{e}\right)$ B. $\left(0, \frac{\ln 2}{2}\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ D. $\left(\frac{\ln 2}{2}, e\right)$

二、填空题, 共3题, 每题10分.

练6 (★★★☆☆)

函数 $y = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$ 的单调递减区间是_____.

练7 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \frac{m}{x-1} + \ln x$ 在 $(e, +\infty)$ 上存在极值点, 则实数 m 的取值范围为_____.

练8 (★★★☆☆)

若存在 $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, 使得不等式 $2x \ln x + x^2 - mx + 3 \geq 0$ 成立, 则实数 m 的最大值为_____.

三、解答题, 共1题, 每题20分.

练9 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值.

(2) 若函数 $y = f(x) - ax$ 在定义域内有三个零点, 求实数 a 的取值范围.

参考答案与解析

第1讲 导数的计算及几何意义

练1

答案: C

解答:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2 + \Delta x)}{2\Delta x} = -\frac{1}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = -\frac{1}{2} f'(2)$$

故选: C.

练2

答案: B

解答:

$$\begin{aligned} \because \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{3\Delta x} &= 1 \\ \therefore \frac{2}{3} f'(x_0) &= \frac{2}{3} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2}{3} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} = 1 \\ \therefore f'(x_0) &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

故选: B.

练3

答案: A

解答:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} \\ &= 2f'(x_0) = 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

故选: A.

练4

答案: B

解答:

由题意可得, $y' = 3x^2 - 6x$

当 $x = 1$ 时, $y' = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 = -3$

则所求切线方程为 $y + 1 = -3(x - 1)$, 即 $y = -3x + 2$

故选: B.

练5

答案: A

解答:

$$y' = 2x + e^x$$

当 $x = 0$ 时, $y' = 1$

所以切线方程为 $y - 1 = 1 \times (x - 0)$, 即 $x - y + 1 = 0$

故选: A.

练6

答案: C

解答:

由题意有 $y' = 2 \cos x - \sin x$

则曲线在点 $(\pi, -1)$ 处切线的斜率 $k = y'|_{x=\pi} = 2 \cos \pi - \sin \pi = -2$

故切线方程为 $y + 1 = -2(x - \pi)$

即 $2x + y - 2\pi + 1 = 0$

故选: C.

练7

答案: A

解答:

$$y = x^4, \text{ 则 } y' = 4x^3$$

$\because y = x^4$ 的一条切线与 $x + 4y - 8 = 0$ 垂直

则切线斜率为 4

设切点为 (x_0, y_0) , 则 $4x_0^3 = 4$

则 $x_0^3 = 1, x_0 = 1, y_0 = 1^4 = 1$

故切点坐标为 $(1, 1)$

设切线方程为 $y = 4x + b$

则代入切点坐标求得切线方程为 $4x - y - 3 = 0$

故选: A.

练8

答案：D

解答：

函数 $y = x^3 + x - 2$ 的导数为： $y' = 3x^2 + 1$

设切点坐标为 $(a, a^3 + a - 2)$

由切线平行于直线 $y = 4x - 1$

则 $3a^2 + 1 = 4$

解得 $a = \pm 1$

所以切点坐标为 $(1, 0)$ 或 $(-1, -4)$

则切线方程为： $y = 4(x - 1)$ 或 $y + 4 = 4(x + 1)$

即 $y = 4x - 4$ 或 $y = 4x$

故选：D.

练9

答案：C

解答：

由题可知： $y' = a - \frac{1}{x-1}$

故切线的斜率为： $a - 1$

由 $a - 1 = 3 \Rightarrow a = 4$

故选：C.

练10

答案：B

解答：

直线 $y = x + 1$ 与曲线 $y = f(x) = x^3 + bx^2 + c$ 相切于点 $A(1, 2)$

$$\therefore \begin{cases} f'(1) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 + 2bx$$

$$\therefore \begin{cases} 3 + 2b = 1 \\ 1 + b + c = 2 \end{cases}$$

$$\therefore b = -1, c = 2$$

$$\therefore b + 2c = -1 + 2 \times 2 = 3$$

故选：B.

练11

答案: C

解答:

依题意

$$A. (e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}, \text{ 故A错误}$$

$$B. (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ 故B错误}$$

$$C. (\log_{2018} x)' = \frac{1}{x \ln 2018}, \text{ 故C正确}$$

$$D. (x^2 \cos x)' = 2x \cos x + x^2(-\sin x) = 2x \cos x - x^2 \sin x, \text{ 故D错误}$$

故选: C.

练12

答案: 2

解答:

$$\because f(x) = x \cdot \ln(2x-1)$$

$$\therefore f'(x) = \ln(2x-1) + \frac{x}{2x-1} \cdot (2x-1)' = \ln(2x-1) + \frac{2x}{2x-1}$$

$$\text{则 } f'(1) = 2$$

故答案为: 2.

练13

$$\text{答案: } \frac{5}{9}$$

解答:

$$\because f'(x) = \frac{2}{2x+1} - 2f'(1)x + e^{x-1}$$

$$\therefore f'(1) = \frac{2}{3} - 2f'(1) + 1$$

$$\therefore f'(1) = \frac{5}{9}$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{9}.$$

练14

答案: D

解答:

$$y' = 2x + 1, \text{ 设切点坐标为 } (x_0, y_0)$$

$$\text{则切线的斜率为 } 2x_0 + 1, \text{ 且 } y_0 = x_0^2 + x_0 + 1$$

$$\text{于是切线方程为 } y - x_0^2 - x_0 - 1 = (2x_0 + 1)(x - x_0)$$

因为点 $(-1, 0)$ 在切线上

$$\text{所以 } 0 - x_0^2 - x_0 - 1 = (2x_0 + 1)(-1 - x_0)$$

可解得 $x_0 = 0$ 或 -2

当 $x_0 = 0$ 时, $y_0 = 1$, 切线方程为 $x - y + 1 = 0$

当 $x_0 = -2$ 时, $y_0 = 3$, 切线方程为 $3x + y + 3 = 0$

验证可知, D 正确

故选: D.

练15

答案: B

解答:

$$\because f(x) = x \ln x$$

$$\therefore f'(x) = 1 + \ln x$$

设切点坐标为 $(x_0, x_0 \ln x_0)$

$$\therefore f(x) = x \ln x \text{ 在 } (x_0, x_0 \ln x_0) \text{ 处的切线方程为 } y - x_0 \ln x_0 = (\ln x_0 + 1)(x - x_0)$$

$\therefore$ 切线 l 过点 $(0, -1)$

$$\therefore -1 - x_0 \ln x_0 = (\ln x_0 + 1)(-x_0)$$

解得 $x_0 = 1$

$\therefore$ 直线 l 的方程为: $y = x - 1$

即直线方程为 $x - y - 1 = 0$

故选: B.

练16

$$\text{答案: } y = \frac{1}{e}x$$

解答:

$$\text{设切点坐标为 } (x_0, \ln x_0), \text{ 则切线斜率 } k = y'|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0} = \frac{\ln x_0 - 0}{x_0 - 0}$$

$$\therefore \ln x_0 = 1, \text{ 解得 } x_0 = e$$

$$\therefore \text{切点为 } (e, 1), k = \frac{1}{e}$$

$$\text{则切线方程为 } y - 1 = \frac{1}{e}(x - e), \text{ 即 } y = \frac{1}{e}x$$

$$\text{故答案为: } y = \frac{1}{e}x.$$

练17

答案: C

解答:

$y = a(x-2) - \ln(x-1)$ 的导数为: $y' = a - \frac{1}{x-1}$

在点 $(2, 0)$ 处的切线斜率为 $a - 1 = 3$

解得 $a = 4$

故选: C.

练18

答案: $\ln 2 - 1$

解答:

设切点为 $P(m, n)$ ($m > 0$)

则 $n = \ln m$, $n = \frac{1}{2}m + b$

$y = \ln x$ 的导数为 $y' = \frac{1}{x}$

即有 $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$

解得 $m = 2$, $n = \ln 2$, $b = \ln 2 - 1$

故答案为: $\ln 2 - 1$.

练19

解答:

由 $y = e^x$, 得 $y' = e^x$

令 $y' = e^x = 1$, 得 $x = 0$, 故 $P(0, 1)$

点 P 到直线 $y = x$ 的最小距离为 $\frac{|1 - 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

练20

答案: A

解答:

$\because$ 曲线 $y = e^x$ (e 自然对数的底数) 与曲线 $y = \ln x$ 互为反函数, 其图象关于 $y = x$ 对称

$\therefore$ 可先求点 P 到直线 $y = x$ 的最短距离 d

设曲线 $y = e^x$ 上斜率为 1 的切线为 $y = x + b$

$\because y' = e^x$, 由 $e^x = 1$, 得 $x = 0$, 故切点坐标为 $(0, 1)$, 即 $b = 1$

$\therefore d = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore |PQ|$ 的最小值为 $2d = \sqrt{2}$

故选：A.

练21

答案：C

解答：

如图

要使点 P 到直线 $x - y - 4 = 0$ 的距离最小

只需点 P 为曲线上与直线 $x - y - 4 = 0$ 平行的切线的切点

即点 P 为斜率为 1 的切线的切点，设 $P(x_0, y_0)$, $x_0 > 0$

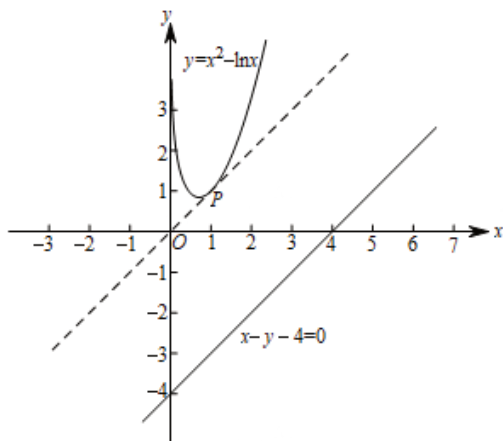
$$y = x^2 - \ln x, \quad y'|_{x=x_0} = 2x_0 - \frac{1}{x_0} = 1$$

$$\text{解得 } x_0 = 1 \text{ 或 } x_0 = -\frac{1}{2} \text{ (舍去)}$$

$$\text{点 } P(1, 1) \text{ 到直线 } x - y - 4 = 0 \text{ 的距离为 } \frac{|1 - 1 - 4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

所以曲线 $y = x^2 - \ln x$ 上的点到直线 $x - y - 4 = 0$ 的距离的最小值为 $2\sqrt{2}$

故选：C.



练22

答案：B

解答：

函数 $F(x) = (x - m)^2 + (e^{2x} - 2m)^2$ 表示两点 $P(x, e^{2x})$, $Q(m, 2m)$ 之间距离的平方

分别令 $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = 2x$

当 $f(x)$ 的切线与 $g(x)$ 平行时，距离最短

$$\text{则 } f'(x) = 2e^{2x}$$

$$\text{令 } 2e^{2x_0} = 2, \text{ 解得 } x_0 = 0$$

则可得 $P(0, 1)$

$$\text{则点 } P \text{ 到直线 } y = 2x \text{ 的距离 } d = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{所以 } d^2 = \frac{1}{5}$$

因此存在 $x_0 = 0$ 使得 $F(x_0) \leq \frac{1}{5}$ 成立

设过点 P 与 $y = 2x$ 垂直的直线方程为 $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0)$

$$\text{则直线方程为 } y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\text{可得 } x = \frac{2}{5}, \text{ 即 } m = \frac{2}{5}$$

故选: B.

练23

答案: $\frac{9}{5}\ln^2 \frac{e^2}{3}$

解答:

因为 $\frac{a+3\ln a}{b} = \frac{d-3}{2c} = 1$

所以可将 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 分别看成函数 $y = x + 3\ln x$ 与 $y = 2x + 3$ 的图象上任意一点

问题转化为曲线上的动点 P 与直线 $y = 2x + 3$ 上的动点 Q 之间距离的最小值的平方问题

设 $M(t, t + 3\ln t)$ 是曲线 $y = x + 3\ln x$ 的切点

因为 $y' = 1 + \frac{3}{x}$, $x > 0$

故点 M 处的切线的斜率 $k = 1 + \frac{3}{t}$

由题意可得 $1 + \frac{3}{t} = 2$, 解得 $t = 3$

即当切线与已知直线 $y = 2x + 3$ 平行时, 此时切点 $M(3, 3 + 3\ln 3)$ 到已知直线 $y = 2x + 3$ 的距离最近

最近距离为 $\frac{|6 - 3 - 3\ln 3 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{6 - 3\ln 3}{\sqrt{5}}$

即 $(a - c)^2 + (b - d)^2 = \frac{9(2 - \ln 3)^2}{5} = \frac{9}{5}\ln^2 \frac{e^2}{3}$

故答案为: $\frac{9}{5}\ln^2 \frac{e^2}{3}$.

练24

答案: C

解答:

$y = \ln(-2x)$, $x < 0$ 关于 y 轴对称的曲线为 $y = \ln(2x)$, $x > 0$

设射线 $y = kx - 3$, $x \geq 0$ 与曲线 $y = \ln(2x)$, $x > 0$ 相切时切点为 (x_0, y_0)

因为 $y = \ln(2x)$ 的导函数为 $y' = \frac{1}{2x} \times 2 = \frac{1}{x}$

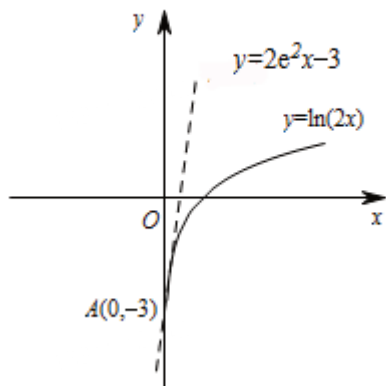
所以切线的 $k = \frac{1}{x_0} = \frac{\ln(2x_0) + 3}{x_0 - 0}$

$\therefore \ln(2x_0) + 3 = 1$, $x_0 = \frac{1}{2e^2}$

$\therefore k = 2e^2$

再根据图象可得实数 k 的取值范围是 $(0, 2e^2)$

故选: C.



练25

答案: $\frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}}$

解答:

设点 $P(m, n)$, 由于点 P 为两曲线的切点

$$\text{则 } \frac{1}{2}m^2 + 2am = 3a^2 \ln m + b$$

$$\text{因为 } f'(x) = x + 2a, \quad g'(x) = \frac{3a^2}{x}$$

又点 P 的切线相同, 则 $f'(m) = g'(m)$

$$\text{即 } m + 2a = \frac{3a^2}{m}$$

$$\text{化简得 } (m + 3a)(m - a) = 0$$

$$\text{又 } a > 0, \quad m > 0$$

$$\text{所以 } m = a$$

$$\text{于是 } b = \frac{5}{2}a^2 - 3a^2 \ln a, \quad \text{其中 } a > 0$$

$$\text{设 } h(x) = \frac{5}{2}x^2 - 3x^2 \ln x, \quad x > 0$$

$$\text{则 } h'(x) = 2x - 6x \ln x = 2x(1 - 3 \ln x), \quad x > 0$$

$$\text{令 } h'(x) = 0, \text{ 得 } x = e^{\frac{1}{3}}$$

$$x \in (0, e^{\frac{1}{3}}) \text{ 时, } h'(x) > 0$$

$$x \in (e^{\frac{1}{3}}, +\infty) \text{ 时, } h'(x) < 0$$

所以 $h(x)$ 在 $(0, e^{\frac{1}{3}})$ 上单调递增, 在 $(e^{\frac{1}{3}}, +\infty)$ 上单调递减

$$\text{所以实数 } b \text{ 的最大值为 } h(e^{\frac{1}{3}}) = \frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}}$$

故答案为: $\frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}}$.

练26

答案: C

解答:

$$\text{由 } y = ax^2 \quad (a > 0), \text{ 得 } y' = 2ax$$

$$\text{由 } y = e^x, \text{ 得 } y' = e^x$$

$\therefore$ 曲线 $C_1: y = ax^2 \quad (a > 0)$ 与曲线 $C_2: y = e^x$ 存在公共切线

则设公切线与曲线 C_1 切于点 (x_1, ax_1^2) , 与曲线 C_2 切于点 (x_2, e^{x_2})

$$\text{则 } 2ax_1 = e^{x_2} = \frac{e^{x_2} - ax_1^2}{x_2 - x_1}$$

$$\text{将 } e^{x_2} = 2ax_1 \text{ 代入 } 2ax_1 = \frac{e^{x_2} - ax_1^2}{x_2 - x_1}, \text{ 可得 } 2x_2 = x_1 + 2$$

$$\therefore a = \frac{e^{\frac{x_1}{2}+1}}{2x_1}, \text{ 记 } f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}+1}}{2x}$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}+1}(x-2)}{4x^2}$$

当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增

$$\therefore \text{当 } x = 2 \text{ 时, } f(x)_{\min} = \frac{e^2}{4}$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{e^2}{4}, +\infty \right)$$

故选: C.

第2讲 导数与单调性

练1

答案：A

解答：

根据 $y = f(x)$ 的导函数在区间 $[0, 2\pi]$ 上的图象，可得原函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的增长速度不断加快

在 $[\pi, 2\pi]$ 上的增长速度又不断减小

结合所给的选项

故选：A.

练2

答案：③

解答：

$f'(x) > 0$ 时， $f(x)$ 单调递增

$f'(x) < 0$ 时， $f(x)$ 单调递减

结合图象可知， $f(x)$ 在 $[-3, -2]$ 和 $[2, 4]$ 上单调递减，所以①和②错误

$f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递增，所以③正确

因为单调减区间不能用“ $\cup$ ”连接，所以④错误

故答案为：③.

练3

答案：D

解答：

由当 $f'(x) < 0$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $f'(x) > 0$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增

则由导函数 $y = f'(x)$ 的图象可知： $f(x)$ 先单调递减，再单调递增，然后单调递减，最后单调递增，排除 A，C

且第二个拐点（即函数的极大值点）在 x 轴的右侧，排除 B

故选：D.

练4

答案：C

解答：

令 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1) < 0$ ，解得 $-1 < x < 3$

所以函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ 的单调递减区间是 $(-1, 3)$

故选：C.

练5

答案: C

解答:

函数 $y = x + \frac{9}{x}$ 的导数 $y' = 1 - \frac{9}{x^2}$ ($x \neq 0$)

令 $y' > 0$, 即 $1 > \frac{9}{x^2}$

即有 $x^2 > 9$, 解得 $x > 3$ 或 $x < -3$

则函数的单调增区间为 $(-\infty, -3)$, $(3, +\infty)$

故选: C.

练6

答案: D

解答:

$f'(x) = e^x - 1$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 0$

故选: D.

练7

答案: B

解答:

$$y' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$\because x \in (0, 1)$

$\therefore x-1 < 0, x > 0$

$\therefore y' < 0$

$\therefore$ 函数在区间 $(0, 1)$ 内单调递减

故选: B.

练8

答案: C

解答:

A. 因为函数 $y = \sin x$ 为周期函数, 所以在 $(0, +\infty)$ 内不为增函数, 故 A 选项错误

B. 由题可得 $y' = 3x^2 - 1$, 当 $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 时, $y' < 0$, 此时函数 y 单调递减, 故 B 选项错误

C. 因为函数 $f(x) = x$ 与函数 $g(x) = e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 内均为增函数, 所以 $y = xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 内为增函数, 故 C 选项正确

D. 由题可得 $y' = \frac{1}{x} - 1$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $y' < 0$, 函数 y 单调递减, 故 D 选项错误

故选：C.

练9

答案：A

解答：

$(x-1)f'(x) \leq 0$ ，则 $x > 1$ 时 $f'(x) \leq 0$ ； $x < 1$ 时 $f'(x) \geq 0$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上为增函数或常数函数，在 $(1, +\infty)$ 上为减函数或常数函数

故 $f(0) \leq f(1)$ ， $f(2) \leq f(1)$ ，即 $f(0) + f(2) \leq 2f(1)$

故选：A.

练10

答案：D

解答：

$\because$ 函数 $f(x)$ 满足 $(x+1)f'(x) \geq 0$

$\therefore$ 当 $x < -1$ 时， $f'(x) \leq 0$ ，而 $x > -1$ 时， $f'(x) \geq 0$

由此可得，函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 上是减函数，在区间 $(-1, +\infty)$ 上是增函数

$\therefore f(-1)$ 是函数的极小值，也是函数的最小值

可得 $f(0) > f(-1)$ 且 $f(-2) > f(-1)$ ，相加得 $f(0) + f(-2) > 2f(-1)$

特别地，当 $f'(x) = 0$ 时， $f(x)$ 为常函数，也符合题意

故有 $f(0) = f(-2) = f(-1)$ ，从而有 $f(0) + f(-2) = 2f(-1)$

因此有 $f(0) + f(-2) \geq 2f(-1)$

故选：D.

练11

答案：A

解答：

由函数 $y = -xf'(x)$ 的图象可知

当 $x < -1$ 时， $-xf'(x) < 0$ ， $f'(x) < 0$ ，此时 $f(x)$ 是减函数

当 $-1 < x < 0$ 时， $-xf'(x) > 0$ ， $f'(x) > 0$ ，此时 $f(x)$ 是增函数

当 $0 < x < 1$ 时， $-xf'(x) < 0$ ， $f'(x) > 0$ ，此时 $f(x)$ 是增函数

当 $x > 1$ 时， $-xf'(x) > 0$ ， $f'(x) < 0$ ，此时 $f(x)$ 是减函数

对照选项，A 正确

故选：A.

练12

答案: C

解答:

由图象可知

当 $-3 \leq x < -\frac{3}{2}$ 时, $f'(x) < 0$ 当 $-\frac{3}{2} < x < 2$ 时, $f'(x) > 0$ 当 $2 < x < 4$ 时, $f'(x) < 0$ 当 $4 < x < 5$ 时, $f'(x) > 0$ 故函数 $y = f(x)$ 在 $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$, $(2, 4)$ 上是减函数在 $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$, $(4, 5)$ 上是增函数在 $x = 2$ 时取得极大值

故选: C.

练13

答案: D

解答:

根据函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象, 可得函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, $f'(-2) = 0$ 因此 -2 是函数 $y = f(x)$ 的极值点; 1 不是函数 $y = f(x)$ 的极值点 $y = f(x)$ 的图象在 $x = 0$ 处切线的斜率大于零; 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-2, 2)$ 上单调递增

因此①④正确, ②③不正确

故选: D.

练14

答案: B

解答:

 $f'(x) = \frac{1}{x} - a$, $x \in [1, 2]$, 则 $\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 故需讨论 a 与 $\frac{1}{2}$, 1 的大小关系

故选: B.

练15

答案: B

解答:

$$f'(x) = x + \frac{1}{x} - m = \frac{x^2 - mx + 1}{x}, \quad x > 0$$

$m > 2$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}$ 或 $x > \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$

故选: B.

练16

答案: D

解答:

$$f'(x) = 1 - \frac{b}{x^2} \quad (b > 0)$$

解 $f'(x) < 0$, 得 $-\sqrt{b} < x < 0$ 或 $0 < x < \sqrt{b}$

则 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\sqrt{b}, 0)$, $(0, \sqrt{b})$

故选: D.

练17

答案: D

解答:

$$y' = \frac{1}{x} - a = \frac{1 - ax}{x}$$

函数 $y = \ln x - ax$ 的单调递减区间为 $(1, +\infty)$

可得 $1 - a \times 1 = 0$, 解得 $a = 1$

经验证, $a = 1$ 满足条件

故选: D.

练18

答案: B

解答:

$$f'(x) = 3ax^2 - 2x + 1$$

由题意 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 得 $f'(x) \geq 0$ 恒成立

$$\text{即} \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 4 - 12a \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} a \geq \frac{1}{3}$$

故选: B.

练19

答案: B

解答:

$$\because f(x) = x^3 + ax - 2$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 + a$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = x^3 + ax - 2$ 在区间 $[1, +\infty)$ 内是增函数

$\therefore f'(x) = 3x^2 + a \geq 0$, 即 $a \geq -3x^2$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立

$$\therefore a \geq (-3x^2)_{\max}, \quad x \in [1, +\infty)$$

$$\therefore a \geq -3$$

故选: B.

练20

答案: D

解答:

$$f'(x) = 3kx^2 + 6(k-1)x$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = kx^3 + 3(k-1)x^2 - k^2 + 1$ 在区间 $(0, 4)$ 上是减函数

$\therefore f'(x) = 3kx^2 + 6(k-1)x \leq 0$ 在区间 $(0, 4)$ 上恒成立

当 $k = 0$ 时, 成立

$$k > 0 \text{ 时, } f'(4) = 48k + 6(k-1) \times 4 \leq 0, \text{ 即 } 0 < k \leq \frac{1}{3}$$

$$k < 0 \text{ 时, } f'(4) = 48k + 6(k-1) \times 4 \leq 0, \quad f'(0) \leq 0, \quad k < 0$$

故 k 的取值范围是 $k \leq \frac{1}{3}$

故选: D.

练21

答案: A

解答:

$$\text{记 } f(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 可得 } x = e$$

可知 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增

$$\text{又 } \because 2 < \frac{5}{2} < e$$

$$\therefore \frac{\ln 2}{2} < \frac{\ln \frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} < \frac{\ln e}{e}, \text{ 即 } c < a < b$$

故选: A.

练22

答案: C

解答:

构造函数 $y = \frac{\ln x}{x} \ (x > 0)$, $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} \ (x > 0)$

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$, 函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(e, +\infty)$ 上是减函数

当 $x \in (0, e)$ 时, $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$, 函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, e)$ 上是增函数

所以 $\frac{\ln 3}{3} < \frac{\ln e}{e}$, 则 $e \ln 3 < 3 \ln e$, 即 $\ln 3^e < \ln e^3$

所以 $3^e < e^3$, 即 $b < a$

因为函数 $y = x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 且 $e < \pi$

所以 $e^3 < \pi^3$, 即 $a < c$

所以 $b < a < c$

故选: C.

练23

答案: A

解答:

对于选项 A, B

设函数 $f(x) = 2^x + 3x$, 可知其为增函数

由题意可知 $2^a + 3a > 2^a + 2a = 2^b + 3b$

所以知 $a > b$

则选项 A 正确, B 错误

对于选项 C, D, 设函数 $g(x) = 2^x - 2x$, $h(x) = 2^x - 3x$

求导后可知 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上均不是单调函数

所以根据已知等式无法判断 a, b 的大小

故选: A.

练24

答案: A

解答:

$\because f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数

$\therefore f(0) = 0$

设 $g(x) = f(x-1) - x^2(3-2\ln x) - 3(1-2x)$

$= f(x-1) - 3x^2 + 2x^2 \ln x + 6x - 3$

其定义域为 $(0, +\infty)$

则 $g'(x) = f'(x-1) + 4x \ln x - 4x + 6$

设 $h(x) = 4x \ln x - 4x + 6$, 则 $h'(x) = 4 \ln x$

由 $h'(x) > 0$ 得 $x > 1$; 由 $h'(x) < 0$ 得 $0 < x < 1$

则当 $x = 1$ 时, $h(x)$ 取得极小值也是最小值 2

$\therefore f'(x-1) > -2, h(x) \geq 2$

$\therefore f'(x-1) + h(x) > 0$, 即 $g'(x) > 0$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数

且当 $x = 1$ 时, $g(1) = 0$

则不等式 $f(x-1) < x^2(3-2\ln x) + 3(1-2x)$ 等价于 $g(x) < g(1)$

$\therefore 0 < x < 1$

$\therefore$ 原不等式的解集为 $(0, 1)$

故选: A.

练25

答案: ACD

解答:

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 导函数为 $f'(x)$, $xf'(x) - f(x) = x \ln x$

即满足 $\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{\ln x}{x}$

$\therefore \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

$\therefore \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{\ln x}{x}$

$\therefore$ 可设 $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}\ln^2 x + b$ (b 为常数) $x \in (0, +\infty)$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x\ln^2 x + bx, x \in (0, +\infty)$

$\therefore f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} \ln^2 \frac{1}{e} + \frac{b}{e} = \frac{1}{e}$, 解得 $b = \frac{1}{2}$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x\ln^2 x + \frac{1}{2}x$

$\therefore f(1) = \frac{1}{2}$, 满足 $0 < f(1) < 1$

$\therefore$ C 正确

$\therefore f'(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\ln x + 1)^2 \geq 0$, 且仅有 $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增

$\therefore$ B 错误, A, D 正确

故选: ACD.

练26

答案: D

解答:

因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数

所以 $f(0) = 0$, 则 $x = 0$ 不满足不等式 $(x^2 - 4)f(x) > 0$

根据题意, 设 $g(x) = \ln x \cdot f(x)$ ($x > 0$)

其导数 $g'(x) = (\ln x)' f(x) + \ln x f'(x) = \frac{1}{x} f(x) + \ln x f'(x)$

又由当 $x > 0$ 时, $x \ln x \cdot f'(x) < -f(x)$, 即 $\ln x \cdot f'(x) < -\frac{1}{x} f(x)$

则有 $g'(x) = \frac{1}{x} f(x) + \ln x f'(x) < 0$

即函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数

又由 $g(1) = \ln 1 \cdot f(1) = 0$

则在区间 $(0, 1)$ 上, $g(x) = \ln x \cdot f(x) > 0$, 又由 $\ln x < 0$, 则 $f(x) < 0$

在区间 $(1, +\infty)$ 上, $g(x) = \ln x \cdot f(x) < 0$, 又由 $\ln x > 0$, 则 $f(x) < 0$

由 $x > 0$ 时, $x \ln x \cdot f'(x) < -f(x)$, 得 $1 \times \ln 1 \cdot f'(1) < -f(1)$, 即 $f(1) < 0$

则 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) < 0$

又由 $f(x)$ 为奇函数, 则 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) > 0$

$(x^2 - 4)f(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$

解得: $x < -2$ 或 $0 < x < 2$

则 x 的取值范围是 $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

故选: D.

第 3 讲 极值与最值

练 1

答案: B

解答:

导数为零的点且左右两边导数的符号不同时才是极值点, 故 A 错

若 $f'(x_0) = 0$ 且在 x_0 附近的左侧 $f'(x) > 0$, 右侧 $f'(x) < 0$, 则函数先增后减, 则 $f(x_0)$ 是极大值

若 $f'(x_0) = 0$ 且在 x_0 附近的左侧 $f'(x) < 0$, 右侧 $f'(x) > 0$, 则函数先减后增, 则 $f(x_0)$ 是极小值

故选: B.

练 2

答案: D

解答:

$$\because (x+1) \cdot f'(x) > 0$$

$\therefore x > -1$ 时, $f'(x) > 0$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 单调递增

$x < -1$ 时, $f'(x) < 0$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 单调递减

但 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处不一定有定义, 故 $x = -1$ 不一定是函数 $f(x)$ 的极值点

故选: D.

练 3

答案: A

解答:

$$\text{由已知得 } f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$$

当 $x = 1$ 时, 导数值为 0, 但其两侧的导数值均大于 0, 所以此处不是函数的极值点

所以函数的极值点的个数为 0

故选: A.

练 4

答案: A

解答:

$$\text{求函数 } y = x + \frac{1}{x} \text{ 的导数, 得 } y' = 1 - \frac{1}{x^2}, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x = \pm 1$$

当 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$, 函数单调递减, 当 $x > 1$ 时, $y' > 0$, 函数单调递增

$\therefore$ 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $x = 1$ 时有极小值, 无极大值

故选: A.

练5

答案: $-\frac{1}{e}$

解答:

求导函数, 可得 $y' = e^x + xe^x$, 令 $y' = 0$ 可得 $x = -1$

令 $y' > 0$, 可得 $x > -1$, 令 $y' < 0$, 可得 $x < -1$

$\therefore$ 函数在 $(-\infty, -1)$ 上单调减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调增

$\therefore x = -1$ 时, 函数 $y = xe^x$ 取得极小值, 极小值是 $-\frac{1}{e}$

故答案为: $-\frac{1}{e}$.

练6

答案: D

解答:

函数的定义域为 $(0, +\infty)$

求导函数, 可得 $f'(x) = 1 + \ln x$

令 $f'(x) = 1 + \ln x = 0$, 可得 $x = \frac{1}{e}$

$\therefore 0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$, $x > \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) > 0$

$\therefore 0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 单调递减, $x > \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 单调递增

$\therefore x = \frac{1}{e}$ 时, 函数取得极小值

故选: D.

练7

答案: B

解答:

A. 函数 $y = x$, $x \in [0, 1]$, 显然该函数存在最大值为 1, 但是不存在极大值

所以不正确

B. 对于函数图象如下所示的函数

显然该函数其中一个极大值为 0, 其中一个极小值为 1, 函数极大值可能会小于这个函数的极小值

C. 对于函数图象如下所示的函数 $f(x)$, 其中 $x \in [-1, 3]$

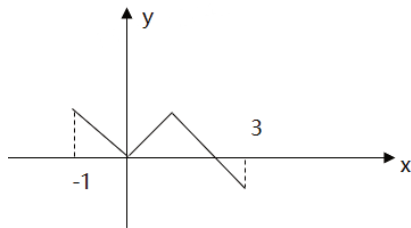
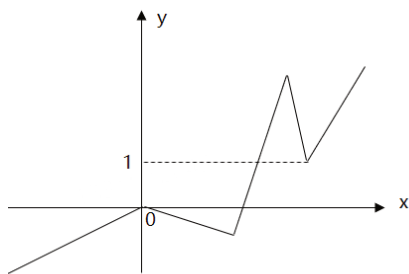
显然该函数存在极小值为 0, 但是显然不是这个函数在 $[-1, 3]$ 上的最小值

所以不正确

D. 函数 $y = \sin x$ 在开区间 $(0, 2\pi)$ 上, 存在最大值 1 和最小值 -1

所以不正确

故选: B.



练8

答案: C

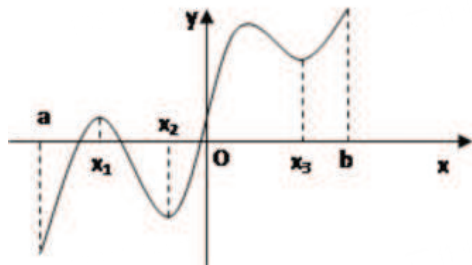
解答:

依题意, 如图所示, 在闭区间 $[a, b]$ 上, 函数在 x_1 处取得极大值在 x_3 处取得极小值, 此时极大值比极小值小, 故 A 错误显然此时函数在 $x = b$ 处取得最大值, 最大值不是极大值, 故 B 错误满足 $f'(x) = 0$ 的点可能不是函数的极值点如 $f(x) = x^3$ 在 $x = 0$ 处满足 $f'(0) = 0$, 但是由于 $x = 0$ 两侧函数都是单调递增

故 0 不是函数的极值点, 故 C 正确

函数 $f(x) = x^3$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增, 没有最值, 故 D 错误

故选: C.



练9

答案: D

解答:

 $f'(x) = \ln x + 1 \ (x > 0)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{e}$ 当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $f'(x) < 0$ 当 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$ $\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增 $\therefore$ 当 $x = \frac{1}{e}$ 时, $f(x)_{\min} = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$

故选: D.

练10

答案: C

解答:

由题可知函数 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$

$$y' = \frac{4(x^2 + 1) - 4x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $y' < 0$, 函数单调递减当 $x \in (-1, 1)$ 时, $y' > 0$, 函数单调递增当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $y' < 0$, 函数单调递减当 x 趋于负无穷时, y 趋于 0, 当 x 趋于正无穷时, y 趋于 0所以当 $x = -1$ 时, 函数取极小值也是最小值为 -2

当 $x = 1$ 时, 函数取极大值也是最大值为 2

故选: C.

练11

答案: C

解答:

$$\because y = e^x + 2ax$$

$$\therefore y' = e^x + 2a$$

由题意知 $e^x + 2a = 0$ 有大于 0 的实根, 且根左右两侧符号不同

$$\text{由 } e^x = -2a, \text{ 得 } a = -\frac{1}{2}e^x$$

$$\because x > 0$$

$$\therefore e^x > 1$$

$$\therefore a < -\frac{1}{2}$$

故选: C.

练12

答案: C

解答:

$$\because a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, \text{ 函数 } f(x) = (x-a)^2 \ln x$$

$$\therefore f'(x) = 2(x-a) \ln x + \frac{(x-a)^2}{x} = (x-a) \left(2 \ln x + 1 - \frac{a}{x} \right)$$

$$\text{由 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = a \text{ 或 } 2 \ln x + 1 - \frac{a}{x} = 0$$

由方程 $2 \ln x + 1 - \frac{a}{x} = 0$, 作出 $g(x) = 2 \ln x + 1$ 和 $h(x) = \frac{a}{x}$ 的图象

结合图象得 $g(x) = 2 \ln x + 1$ 和 $h(x) = \frac{a}{x}$ 的图象有交点, 且交点横坐标不为 a

$$\therefore \text{方程 } 2 \ln x + 1 - \frac{a}{x} = 0 \text{ 有解, 且解不为 } a$$

由此根据函数的单调性和极值的关系得到: 函数 $f(x) = (x-a)^2 \ln x$ 既有极大值, 又有极小值

故选: C.

练13

答案: C

解答:

由题意得 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + (a+6) = 0$ 有两个不等实数根

$$\text{所以 } \Delta = (2a)^2 - 4 \times 3 \times (a+6) > 0$$

$$\text{解得 } a < -3 \text{ 或 } a > 6$$

故选: C.

练14

答案: C

解答:

$$\because f'(x) = [x^2 + (a+2)x + 3 + a]e^x$$

函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个极值点

$\therefore$ 方程 $f'(x) = 0$, 即 $[x^2 + (a+2)x + 3 + a]e^x = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个解, 且该解两侧 $f'(x)$ 的函数值异号

由于当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $e^x > e^0 = 1$

方程 $[x^2 + (a+2)x + 3 + a]e^x = 0$ 等价于 $x^2 + (a+2)x + a + 3 = 0$

设方程 $x^2 + (a+2)x + a + 3 = 0$ 的两根为 x_1, x_2

$$\therefore \begin{cases} \Delta = (a+2)^2 - 4(a+3) > 0 \\ x_1 x_2 = a+3 < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a+3 = 0 \\ a+2 < 0 \end{cases}$$

解得: $a < -3$ 或 $a = -3$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -3]$

故选: C.

练15

答案: B

解答:

$$\text{设 } f(x) = e^{ax} + 3x, \text{ 则 } f'(x) = 3 + ae^{ax}$$

若函数在 $x \in \mathbf{R}$ 上有大于零的极值点

即 $f'(x) = 3 + ae^{ax} = 0$ 有正根

当 $f'(x) = 3 + ae^{ax} = 0$ 成立时, 显然有 $a < 0$

$$\text{此时 } x = \frac{1}{a} \ln \left(-\frac{3}{a} \right)$$

由 $x > 0$, 得参数 a 的范围为 $a < -3$

故选: B.

练16

答案: D

解答:

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = \pm 1$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f'(x) \leq 0$

当 $1 \leq x \leq 3$ 时, $f'(x) \geq 0$

则 $f(1)$ 最小, 则 $N = f(1)$

又 $f(0) = -a$, $f(3) = 18 - a$

所以 $f(3) > f(0)$

所以最大值为 $f(3)$, 即 $M = f(3)$

所以 $M - N = f(3) - f(1) = (18 - a) - (-2 - a) = 20$

故选: D.

练17

答案: B

解答:

函数 $f(x) = ae^x - 2x + a^2 - 5$

则 $f'(x) = ae^x - 2$

①当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递减函数, 其值域为 $(-\infty, +\infty)$

满足题意

②当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$

可得: $x = \ln \frac{2}{a}$

$\therefore$ 当 $x \in \left(-\infty, \ln \frac{2}{a}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是单调递减函数

当 $x \in \left(\ln \frac{2}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是单调递增函数

$\therefore f(x)_{\min} = f\left(\ln \frac{2}{a}\right) = 2 - 2 \ln \frac{2}{a} + a^2 - 5$

$\therefore$ 此时值域 D 为 $\left[2 - 2 \ln \frac{2}{a} + a^2 - 5, +\infty\right)$

$\therefore 1 \in D$

$\therefore 2 - 2 \ln \frac{2}{a} + a^2 - 5 \leq 1$

解得 $0 < a \leq 2$

综上可得: $a \leq 2$

故选: B.

练18

答案: A

解答:

由题知 $f'(x) = \ln x (x > 0)$

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f(1) = 2a - 1$

即 $f(x)$ 的值域为 $[2a-1, +\infty)$

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(f(x))$ 有相同的值域

$$\therefore 0 < 2a-1 \leq 1$$

$$\text{解得 } \frac{1}{2} < a \leq 1$$

故选: A.

练19

答案: C

解答:

$$f'(x) = 3x^2 + 3x, \text{ 由 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x = 0, \text{ 或 } x = -1$$

$$\text{又 } f(1) = m + \frac{5}{2}, f(0) = m, f(-1) = m + \frac{1}{2}, f(-2) = m - 2$$

$$\therefore m + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}, \text{ 得 } m = 2$$

故选: C.

练20

答案: D

解答:

$$\text{由已知得 } f(x) = \frac{1}{x + \frac{a}{x}}, x \in [1, +\infty)$$

$$\text{令 } g(x) = x + \frac{a}{x}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} = \frac{x^2 - a}{x^2}$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{ 得 } x = \sqrt{a}$$

当 $a > 1$ 时, $x \in (1, \sqrt{a})$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, \sqrt{a})$ 上单调递减

$x \in (\sqrt{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(\sqrt{a}, +\infty)$ 上单调递增

$\therefore x = \sqrt{a}$ 时, $g(x)$ 取最小值, 为 $g(\sqrt{a})$

$$\therefore f(x) \text{ 取最大值, 为 } f(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore a = \frac{3}{4} < 1, \text{ 不合题意, 舍去}$$

当 $a \leq 1$ 时, $g'(x) \geq 0$, $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增

$$\therefore x = 1 \text{ 时, } g(x) \text{ 有最小值, } f(x) \text{ 有最大值 } f(1) = \frac{1}{1+a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore a = \sqrt{3} - 1, \text{ 满足 } a \leq 1$$

故选: D.

练21

答案: B

解答:

$f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} + x - (b-1) = \frac{x^2 - (b-1)x + 1}{x}$

故 x_1, x_2 是方程 $x^2 - (b-1)x + 1 = 0$ 的根

$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = b-1 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$, 由 $x_1 \cdot x_2 = 1$, $x_1 < x_2$, 得 $0 < x_1 < 1, x_2 > 1$

而 $b \geq \frac{7}{2}$, 则 $x_1 + x_2 \geq \frac{5}{2}$

$\therefore x_1 + \frac{1}{x_1} \geq \frac{5}{2}$, 解得 $0 < x_1 \leq \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{x_1}{x_2} = x_1^2 \leq \frac{1}{4}$

则 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$

故选: B.

练22

答案: A

解答:

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2x - 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + a}{x}$ ($x \in (0, +\infty)$)

$\therefore f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$

$\therefore f'(x) = 0$ 有两个不同的根 x_1, x_2 , 且 $0 < x_1 < x_2$

$\therefore x_1, x_2$ 是一元二次方程 $2x^2 - 2x + a = 0$ 的两个正根

由 $x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = \frac{a}{2}$, 得 $x_1 = 1 - x_2, a = 2x_2(1 - x_2)$

$f(x_1) = x_1^2 - 2x_1 + a \ln x_1 = (1 - x_2)^2 - 2(1 - x_2) + 2x_2(1 - x_2) \ln(1 - x_2)$ ($\frac{1}{2} < x_2 < 1$)

所以 $\frac{f(x_1)}{x_2} = x_2 + 2(1 - x_2) \ln(1 - x_2) - \frac{1}{x_2}$ ($\frac{1}{2} < x_2 < 1$)

令 $g(x) = x + 2(1 - x) \ln(1 - x) - \frac{1}{x}$ ($\frac{1}{2} < x < 1$)

则 $g'(x) = -1 - 2 \ln(1 - x) + \frac{1}{x^2}$ ($\frac{1}{2} < x < 1$)

$\therefore \frac{1}{2} < x < 1$, 则 $g'(x) = -1 - 2 \ln(1 - x) + \frac{1}{x^2} > 0$

所以 $g(x)$ 是增函数

当 $x \rightarrow \frac{1}{2}$ 时, $g(x) \rightarrow -\frac{3}{2} - \ln 2$; 当 $x \rightarrow 1$ 时, $g(x) \rightarrow 0$

由题意 $t \leq -\frac{3}{2} - \ln 2$

所以 t 有最大值 $-\frac{3}{2} - \ln 2$, 没有最小值

故选: A.

练23

答案: D

解答:

$f'(x) = 3x^2 - 6x + a$, 由题意知, x_1, x_2 是方程 $f'(x) = 0$ 的两个不等正根, 则 $\begin{cases} \Delta = 36 - 12a > 0 \\ a > 0 \end{cases}$, 解得

$$0 < a < 3$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 - \frac{2a}{3}$$

$$\therefore \frac{2a}{3} \in (0, 2)$$

$$\therefore 4 - \frac{2a}{3} \in (2, 4)$$

故选: D.

练24

答案: C

解答:

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

所以当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减

注意到 $f(1) = 0$

所以 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < 0$

$x \in (1, e)$ 时, $f(x) > 0$

$x \in (e, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$

同时注意到 $g(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x} = \frac{\ln e^x}{e^x} = f(e^x)$

所以若存在 $x_1 \in (0, +\infty)$, $x_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_1) = g(x_2) = k$ ($k < 0$) 成立

则 $0 < x_1 < 1$ 且 $f(x_1) = g(x_2) = f(e^{x_2})$

所以 $x_1 = e^{x_2}$, 即 $x_2 = \ln x_1$, $k = \frac{\ln x_1}{x_1}$, $\frac{x_2}{x_1} = \frac{\ln x_1}{x_1}$

所以 $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 e^k = k^2 e^k$

令 $h(k) = k^2 e^k$, $k < 0$, 则 $h'(k) = 2ke^k + k^2 e^k = ke^k(2 + k)$

令 $h'(k) < 0$, 解得 $-2 < k < 0$, 令 $h'(k) > 0$, 解得 $k < -2$

因此 $h(k)$ 在 $(-\infty, -2)$ 单调递增, 在 $(-2, 0)$ 单调递减

所以 $h(k)_{\max} = h(-2) = \frac{4}{e^2}$

故选: C.

练25

答案: A

解答:

$$\because f(x) = e^{2x}, \quad g(x) = \ln x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln x, \quad g^{-1}(x) = e^{x-\frac{1}{2}}$$

$$\text{令 } h(x) = g^{-1}(x) - f^{-1}(x) = e^{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \ln x$$

则 $b-a$ 的最小值, 即为 $h(x)$ 的最小值

$$\therefore h'(x) = e^{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2x}$$

$$\text{令 } h'(x) = 0, \text{ 解得 } x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{当 } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ 时, } h'(x) < 0, \text{ 当 } x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ 时, } h'(x) > 0$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, } h(x) \text{ 取最小值为 } 1 - \frac{\ln \frac{1}{2}}{2} = 1 + \frac{\ln 2}{2}$$

故选: A.

练26

答案: A

解答:

$$\text{设 } f(m) = g(n) = t, \quad t > 0$$

$$\text{由 } e^{2m-3} = t \text{ 得 } m = \frac{3 + \ln t}{2}$$

$$\text{由 } \frac{1}{4} + \ln \frac{n}{2} = t \text{ 得 } n = 2e^{t-\frac{1}{4}}$$

$$\text{则 } n - m = 2e^{t-\frac{1}{4}} - \frac{3 + \ln t}{2}, \quad t > 0$$

$$\text{设 } h(x) = 2e^{x-\frac{1}{4}} - \frac{3 + \ln x}{2}, \quad x > 0$$

$$h'(x) = 2e^{x-\frac{1}{4}} - \frac{1}{2x}$$

$$\text{设 } l(x) = 2e^{x-\frac{1}{4}} - \frac{1}{2x}, \quad x > 0$$

$$l'(x) = 2e^{x-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2x^2} > 0$$

则 $l(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

$$\therefore l\left(\frac{1}{4}\right) = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore \text{当 } 0 < x < \frac{1}{4} \text{ 时, } h'(x) < 0, \text{ 当 } x > \frac{1}{4} \text{ 时, } h'(x) > 0$$

$$\text{则 } h(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{1}{4}\right] \text{ 上单调递减, 在 } \left(\frac{1}{4}, +\infty\right) \text{ 上单调递增}$$

$$\text{则 } h(x)_{\min} = h\left(\frac{1}{4}\right) = 2 - \frac{3 + \ln \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{2} + \ln 2$$

则 $n - m$ 的最小值为 $\frac{1}{2} + \ln 2$

故选：A.

第4讲 不等式与零点

练1

答案: A

解答:

对任意 $x \in [0, 2]$ 都有 $f(x) < m$ 成立, 即 $f(x)_{\max} < m$ 对 $x \in [0, 2]$ 恒成立

$$\because f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - x - 2$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x = -\frac{2}{3} \text{ (舍)}, x = 1$$

$$\because f(0) = 5, f(1) = \frac{7}{2}, f(2) = 7$$

$$\therefore f(x)_{\max} = f(2) = 7$$

$$\therefore m \text{ 的取值范围为 } m > 7$$

故选: A.

练2

答案: D

解答:

$$f(x) = -x^3 + 3x - 3, \text{ 得 } f'(x) = -3x^2 + 3$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x = \pm 1$$

函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, -1]$ 上单调递减, 在区间 $[-1, 1]$ 上单调递增, 在区间 $[1, 3]$ 上单调递减

$$\text{极小值为 } f(-1) = -5, f(-2) = -1, f(3) = -21$$

$$\text{比较可知 } f(x)_{\min} = f(3) = -21$$

$$\text{由 } f(x) \geq m \text{ 恒成立, 得 } m \leq -21$$

则 m 的最大值为 -21

故选: D.

练3

答案: D

解答:

因为 $\frac{e^x}{x} - mx > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 故在 $(0, +\infty)$ 上不等式 $m < \frac{e^x}{x^2}$ 总成立

$$\text{令 } g(x) = \frac{e^x}{x^2}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

当 $x \in (0, 2)$ 时, $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上为减函数

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上为增函数

所以 $g(x)_{\min} = g(2) = \frac{e^2}{4}$, 故 $m < \frac{e^2}{4}$

故选: D.

练4

答案: A

解答:

不等式 $e^x \geq kx$ 对任意实数 x 恒成立

即 $f(x) = e^x - kx \geq 0$ 恒成立, 即有 $f(x)_{\min} \geq 0$

$f(x)$ 的导数为 $f'(x) = e^x - k$

当 $k \leq 0$ 时, $e^x > 0$, 可得 $f'(x) > 0$ 恒成立, $f(x)$ 递增, 无最小值

当 $k > 0$ 时, $x > \ln k$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增; $x < \ln k$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减

$\therefore f(x)$ 在 $x = \ln k$ 处取得最小值, 且为 $k - k \ln k$

由 $k - k \ln k \geq 0$, 解得 $k \leq e$

即 k 的最大值为 e

故选: A.

练5

答案: $\left(-\infty, \frac{9}{2}\right]$

解答:

$f'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$

当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上是减函数, 在 $(0, 1)$ 上是增函数

又因为 $f(-1) = \frac{5}{2}$, $f(1) = \frac{9}{2}$

所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值是 $\frac{9}{2}$

因为 $\exists x \in [-1, 1]$, 使 $f(x) \geq m$ 成立

所以 $m \leq \frac{9}{2}$

故答案为: $\left(-\infty, \frac{9}{2}\right]$.

练6

答案: $(-\pi, +\infty)$

解答:

$f'(x) = -x \sin x$, 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$

故 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上为减函数

当 $x \in (\pi, 2\pi)$ 时, $f'(x) > 0$

故 $f(x)$ 在 $(\pi, 2\pi)$ 上为增函数

所以在 $[0, 2\pi]$ 上, $f(x)_{\min} = f(\pi) = -\pi$

因为 $f(x) < t$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有解

故 $t > f(x)_{\min} = -\pi$

所以实数 t 的取值范围 $(-\pi, +\infty)$

故答案为: $(-\pi, +\infty)$.

练7

答案: $\left[-\frac{23}{2}, 16\right]$

解答:

依题意, $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + a$

当 $f(x_0) = 2a$ 时, $x_0^3 - \frac{9}{2}x_0^2 + 6x_0 + a = 2a$

$\therefore x_0^3 - \frac{9}{2}x_0^2 + 6x_0 = a$

设 $g(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x$, 则 $\exists x_0 \in [-1, 4]$ 使 $a = g(x_0)$ 成立

$\therefore g(x)_{\min} \leq a \leq g(x)_{\max}, x \in [-1, 4]$

$g'(x) = 3x^2 - 9x + 6 = 3(x-1)(x-2)$

当 $g'(x) = 0$ 时, $x = 1$ 或 $x = 2$

$g(1) = \frac{5}{2}, g(2) = 2, g(-1) = -\frac{23}{2}, g(4) = 16$

$\therefore g(x)$ 在 $[-1, 4]$ 上的最大值是 16, 最小值是 $-\frac{23}{2}$

$\therefore -\frac{23}{2} \leq a \leq 16$

答案: $\left[-\frac{23}{2}, 16\right]$.

练8

答案: A

解答:

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} (x > 0)$

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增

当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减

所以当 $x = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值

且 $f(1) = 0 - 1 + 1 = 0$

因此函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点 1

故选: A.

练9

答案: B

解答:

求导函数 $f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x - 2)$

令 $f'(x) > 0$, 可得 $x < 0$ 或 $x > 2$; 令 $f'(x) < 0$, 可得 $0 < x < 2$

$\therefore$ 函数 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减

$\because f(0) = 7 > 0, f(2) = 2 \times 8 - 6 \times 4 + 7 = -1 < 0$

$\therefore$ 函数 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7$ 在 $(0, 2)$ 内有一个零点

故选: B.

练10

答案: B

解答:

函数 $f(x) = \ln x - 2x + 6$ 的定义域为 $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1 - 2x}{x}$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$

当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增

当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减

$\therefore$ 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值, 即最大值

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} - 1 + 6 = 5 - \ln 2 > 0$$

当 $x > 0$ 且 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$

故函数 $f(x)$ 有且只有两个零点

故选: B.

练11

答案: $m \geq 0$

解答:

由于 $f(x) = \ln x - x$

则 $f(x) - m + 1 \leq 0$ 恒成立等价于 $m \geq \ln x - x + 1$ 恒成立

令 $g(x) = \ln x - x + 1$ ($x > 0$)

$$\text{则 } g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 为增函数

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 为减函数

所以当 $x = 1$ 时, 函数 $g(x)$ 有极大值, 也就是最大值

$$\text{即 } g(x)_{\max} = g(1) = 0$$

所以 $m \geq 0$

故答案为: $m \geq 0$.

练12

答案: $[-1, +\infty)$

解答:

若 $f(x) < x^2$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立

则等价于 $\ln x - x^2 < a$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立

设 $h(x) = \ln x - x^2$ ($x > 1$)

$$\text{则 } h'(x) = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1-2x^2}{x}$$

当 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0$, 即 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为减函数

$$\text{则 } h(x) < h(1) = 0 - 1 = -1$$

则 $a \geq -1$

故答案为: $[-1, +\infty)$.

练13

答案: $[e, +\infty)$

解答:

由 $f(x) \geq 2$, 得 $a \geq 2x^2 - 2x^2 \ln x$ ($x > 0$)

设 $g(x) = 2x^2 - 2x^2 \ln x$ ($x > 0$), 则 $g'(x) = 2x(1 - 2 \ln x)$ ($x > 0$)

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = e^{\frac{1}{2}}$ 或 $x = 0$ (舍去)

当 $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x > e^{\frac{1}{2}}$ 时, $g'(x) < 0$

所以当 $x = e^{\frac{1}{2}}$ 时, $g(x)$ 取得最大值 $g(e^{\frac{1}{2}}) = e$, 故 $a \geq e$

练14

答案: $a \geq 4$

解答:

当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = ax^3 - 3x + 1 \geq 0$ 可化为: $a \geq \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

设 $g(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}$, 则 $g'(x) = \frac{3(1-2x)}{x^4}$

因为在 $(0, \frac{1}{2})$ 上 $g'(x) > 0$, 在 $(\frac{1}{2}, 1]$ 上 $g'(x) < 0$

所以 $g(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在区间 $(\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递减

因此 $g(x)_{\max} = g(\frac{1}{2}) = 4$, 从而 $a \geq 4$

故答案为: $a \geq 4$.

练15

答案: A

解答:

若存在 $x_0 \in (0, 2]$ 使得 $m - f(x_0) > 0$ 成立

则在 $x_0 \in (0, 2]$ 内 $f(x)_{\min} < m$ 即可

$$\therefore f(x) = -\frac{e^x}{1+x^2}$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{e^x(1+x^2) - e^x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2} < 0$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 2]$ 上单调递减

$$\therefore f(x)_{\min} = f(2) = -\frac{1}{5}e^2$$

$$\therefore m > -\frac{1}{5}e^2$$

故选: A.

练16

答案: C

解答:

方程 $\sqrt{x^2-1} = 2x + m$ 可化为 $m = f(x) = \sqrt{x^2-1} - 2x$, $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

当 $x \in (-\infty, -1]$ 时, $y = \sqrt{x^2-1}$ 单调递减, $y = -2x$ 单调递减

故 $f(x) = \sqrt{x^2-1} - 2x$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递减, $f(x) \geq f(-1) = 2$

当 $x = 1$ 时, $f(x) = f(1) = -2$

当 $x \in (1, +\infty)$ 时

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 2 = \frac{x-2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \text{ 解得 } x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

当 $1 < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 为单调递增

当 $x > \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 为单调递减

$$\therefore f(x) \text{ 的极大值为 } f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

结合选项可得, 实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [2, +\infty)$

故选: C.

练17

答案: D

解答:

若至少存在一个 $x_0 \in [1, e]$, 使得 $f(x_0) > g(x_0)$ 成立

即 $f(x) - g(x) > 0$ 在 $x \in [1, e]$ 时有解

$$\text{设 } f(x) - g(x) = a\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2\ln x + \frac{a}{x} = ax - 2\ln x > 0 \text{ 有解, } x \in [1, e]$$

$$\text{即 } a > \frac{2\ln x}{x}, \text{ 令 } F(x) = \frac{2\ln x}{x}, x \in [1, e]$$

$$\text{则 } F'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

$$\text{当 } x \in [1, e] \text{ 时, } F'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2} \geq 0$$

$\therefore F(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增

$$\text{即 } F(x)_{\min} = F(1) = 0$$

因此 $a > 0$ 即可

故选: D.

练18

答案: C

解答:

$$\text{不等式 } \frac{x-m}{e^x} > \sqrt{x}, \text{ 等价于 } m < x - \sqrt{x} \cdot e^x$$

$$\text{故存在 } x \text{ 使不等式 } \frac{x-m}{e^x} > \sqrt{x} \text{ 成立, 等价于 } m < (x - \sqrt{x} \cdot e^x)_{\max}$$

$$\text{令 } y = x - \sqrt{x} \cdot e^x, x \geq 0$$

$$\text{则 } y' = 1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) \cdot e^x \leq 1 - 1 = 0, \text{ 当且仅当 } x = \frac{1}{2}, \text{ 等号成立}$$

$\therefore y = x - \sqrt{x} \cdot e^x$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调减函数

$$\therefore (x - \sqrt{x} \cdot e^x)_{\max} = 0$$

$$\therefore m < 0$$

故选: C.

练19

答案: D

解答:

$$\because a > 2, \text{ 函数 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 1, \therefore f'(x) = x^2 - 2ax = x(x - 2a)$$

显然, 当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) = x(x - 2a) < 0$, 故函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上是减函数

再根据 $f(0) = 1 > 0$, $f(2) = \frac{11}{3} - 4a < 0$, 可得函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有唯一的零点

故选: D.

练20

答案: 1

解答:

$$f'(x) = e^x (x^2 + 2x + 1) = e^x (x + 1)^2 \geq 0$$

$\therefore f(x)$ 在 $[-1, 2a]$ 上单调递增

$$\because a > 1$$

$$\therefore f(-1) = \frac{2}{e} - a < 0$$

$$f(2a) = (4a^2 + 1)e^{2a} - a > 4a^2 - a + 1 = \left(2a - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0$$

$\therefore f(x)$ 在 $[-1, 2a]$ 上有且仅有 1 个零点

故答案为: 1.

练21

答案: D

解答:

设函数 $f(x)$ 上一点 (x, y) , 关于 y 轴对称的点为 $(-x, y)$ 在 $g(x)$ 上, $-x > 0$, 故 $x < 0$

则 $y = x^2 - x - \frac{4x}{x-1}$, $y = x^2 - bx - 2$, 消去 y 整理得到 $b = 1 + \frac{4}{x-1} - \frac{2}{x}$, 方程有两解

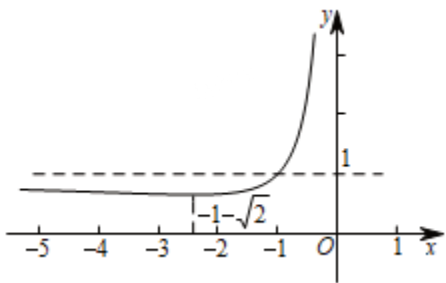
$$\text{设 } F(x) = 1 + \frac{4}{x-1} - \frac{2}{x}, \quad x < 0$$

$$\text{则 } F'(x) = -\frac{4}{(x-1)^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{-2(x^2 + 2x - 1)}{(x-1)^2 x^2} = \frac{-2(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{(x-1)^2 x^2}$$

故函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ 上单调递减, 在 $(-1-\sqrt{2}, 0)$ 上单调递增

$$\text{且 } F(-1-\sqrt{2}) = 1 + \frac{4}{-1-\sqrt{2}-1} - \frac{2}{-1-\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - 5$$

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $F(x) \rightarrow 1$; 当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) \rightarrow +\infty$, 故 $b \in (4\sqrt{2} - 5, 1)$



故选：D.

练22

答案：A

解答：

$\because f(x) = \frac{a + \ln x}{x}$, $g(x) = e^x - 1$ (e 为自然对数的底数), $\exists x \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x) \geq g(x)$ 成立

即 $\exists x \in (0, +\infty)$, 使得 $\frac{a + \ln x}{x} \geq e^x - 1$ 成立

即 $\exists x \in (0, +\infty)$, 使得 $a \geq xe^x - x - \ln x$ 成立

令 $h(x) = xe^x - x - \ln x$ ($x > 0$)

则 $a \geq h(x)_{\min}$

$\because h'(x) = (1+x)e^x - 1 - \frac{1}{x}$ ($x > 0$)

设 $F(x) = (1+x)e^x - 1 - \frac{1}{x}$ ($x > 0$)

$\therefore F'(x) = (2+x)e^x + \frac{1}{x^2} > 0$

$\therefore h'(x) = (1+x)e^x - 1 - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

又 $h'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}e^{\frac{1}{3}} - 4 < 0$, $h'(1) = 2e - 2 > 0$

$\therefore \exists x_0 \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 使得 $h'(x_0) = 0$, 此时 $h(x) = xe^x - x - \ln x$ 取得极小值, 也是最小值

令 $h'(x_0) = 0$, 则 $(1+x_0)e^{x_0} = \frac{1+x_0}{x_0}$, 即 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$

$\therefore h(x_0) = x_0 e^{x_0} - x_0 - \ln x_0 = 1 - x_0 - \ln x_0 = 1$

即 $h(x)_{\min} = 1$

$\therefore a \geq 1$

$\therefore$ 实数 a 的最小值为 1

故选：A.

练23

答案：A

解答：

$$\because f(x) = xe^x$$

$$\therefore f'(x) = (x+1)e^x$$

$$\because x \in [0, 1]$$

$$\therefore f'(x) > 0, f(x) \text{ 单调递增}$$

$$\therefore f(x)_{\min} = f(0) = 0$$

因为对 $\forall x_1 \in [0, 1], \exists x_2 \in [0, 1]$ 使得 $f(x_1) > g(x_2)$ 成立

所以 $\exists x \in [0, 1]$ 使得 $0 > \ln(x+1) + ax^2$ 成立

$$\text{因为 } x=0, \ln(x+1) + ax^2 = 0$$

所以 $\exists x \in (0, 1]$, 使得 $0 > \ln(x+1) + ax^2$ 成立

$$\text{令 } h(x) = \frac{-\ln(x+1)}{x^2}, x \in (0, 1]$$

所以 $a < h(x)_{\max}$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{-\frac{1}{x+1} \cdot x^2 - [-\ln(x+1)] \cdot 2x}{x^4} = \frac{-\frac{x}{x+1} + 2\ln(x+1)}{x^3}$$

$$\text{令 } \varphi(x) = -\frac{x}{x+1} + 2\ln(x+1), x \in (0, 1]$$

$$\therefore \varphi'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} = \frac{2x+1}{(x+1)^2} > 0, \text{ 函数 } \varphi(x) \text{ 单调递增}$$

$$\therefore \varphi(x) > \varphi(0) = 0, \text{ 因此 } h'(x) > 0, \text{ 函数 } h(x) \text{ 单调递增}$$

$$\therefore h(x)_{\max} = h(1) = -\ln 2$$

$$\therefore a < -\ln 2$$

故选: A.

练24

答案: $(1, +\infty)$

解答:

$$\cos^2 x - a \sin x + 1 = 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \sin^2 x - a \sin x + 1 = 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

因为当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\sin x > 0$

$$\text{所以 } a = \frac{2 - \sin^2 x}{\sin x}$$

令 $t = \sin x$, 则 $0 < t < 1$

$$\text{令 } f(t) = \frac{2-t^2}{t}, 0 < t < 1, \text{ 则 } f'(t) = \frac{-2-t^2}{t^2} < 0, 0 < t < 1$$

故 $f(1) < f(t) < f(0)$, 则 $f(t) > 1$, 即 $\frac{2-\sin^2 x}{\sin x} > 1$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立

故 a 的取值范围为 $(1, +\infty)$

故答案为: $(1, +\infty)$.

练25

答案: B

解答:

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$, $g(0) = -1$

则 $f(0) - g(0) = 0$ 不成立

即方程式 $f(x) - g(x) = 0$ 没有零解

当 $x > 0$ 时, $x \ln x = kx - 1$

即 $kx = x \ln x + 1$, 则 $k = \ln x + \frac{1}{x}$

设 $h(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$

由 $h'(x) > 0$, 得 $1 < x$

此时函数 $h(x)$ 单调递增

由 $h'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$, 此时函数 $h(x)$ 单调递减

所以当 $x = 1$ 时, 函数 $h(x)$ 取得极小值 $h(1) = 1$

当 $x = e^2$ 时, $h(e^2) = \frac{1}{e^2} + 2$; 当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$

当 $x < 0$ 时, $x^2 + 4x = kx - 1$

即 $kx = x^2 + 4x + 1$, 则 $k = x + \frac{1}{x} + 4$

设 $m(x) = x + \frac{1}{x} + 4$, 则 $m'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

由 $m'(x) > 0$, 得 $x > 1$ (舍去) 或 $x < -1$

此时函数 $m(x)$ 单调递增

由 $m'(x) < 0$ 得, $-1 < x < 0$

此时 $m(x)$ 单调递减

所以当 $x = -1$ 时, 函数 $m(x)$ 取得极大值 $m(-1) = 2$

当 $x = -2$ 时, $m(-2) = -2 - \frac{1}{2} + 4 = \frac{3}{2}$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $m(x) \rightarrow -\infty$

可知要使方程 $f(x) - g(x) = 0$ 在 $x \in (-2, e^2)$ 上有三个实根, 则 $k \in \left(1, \frac{3}{2}\right]$ 或 $k = 2$

故选: B.

练26

答案: B

解答:

函数 $f(x) = ae^x - 2\sin x$ ($x \in [0, \pi]$) 有且仅有一个零点等价于 $a = \frac{2\sin x}{e^x}$ 在 $x \in [0, \pi]$ 上有且仅有一个解

设 $g(x) = \frac{2\sin x}{e^x}$ ($x \in [0, \pi]$)

即直线 $y = a$ 与 $g(x) = \frac{2\sin x}{e^x}$ ($x \in [0, \pi]$) 的图象只有一个交点

$$g'(x) = \frac{2\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})}{e^x}$$

当 $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $\frac{\pi}{4} < x \leq \pi$ 时, $g'(x) < 0$

即 $g(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 为增函数, 在 $(\frac{\pi}{4}, \pi]$ 为减函数

即在区间 $[0, \pi]$ 上, 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, 函数 $g(x)$ 取最大值

$$\text{又 } g(0) = 0, g(\pi) = 0, g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$$

则实数 a 的值为 $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$

故选: B.

第5讲 基础检测卷

练1

答案: C

解答:

因为 $f'(x) = x$

所以 $f'(1) = 1$

所以曲线 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ 在点 $(1, \frac{1}{2})$ 处的切线方程为 $y - \frac{1}{2} = x - 1$

即 $2x - 2y - 1 = 0$

故选: C.

练2

答案: A

解答:

$\because y = -x^3 + 3x^2$

$\therefore y' = -3x^2 + 6x$

$\therefore y'|_{x=1} = (-3x^2 + 6x)|_{x=1} = 3$

$\therefore$ 曲线 $y = -x^3 + 3x^2$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线方程为 $y - 2 = 3(x - 1)$

即 $y = 3x - 1$

故选: A.

练3

答案: D

解答:

$f'(x) = (x+1)(e^x - 2)$

令 $f'(x) < 0$, 解得 $-1 < x < \ln 2$

所以 $f(x)$ 的单调减区间是 $(-1, \ln 2)$

故选: D.

练4

答案: A

解答:

$\because f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$$\therefore x > 0, f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < e$

令 $f'(x) < 0$, 得 $x > e$

则函数 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减

$$\therefore \text{函数 } f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ 有极大值 } f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

故选: A.

练5

答案: A

解答:

$$\text{求导函数得: } f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

令 $f'(x) > 0$, 则 $x < -1$ 或 $x > 1$, 此时 $f(x)$ 单调递增

令 $f'(x) < 0$, 则 $-1 < x < 1$, 此时 $f(x)$ 单调递减

所以在 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极大值

在 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取得极小值

$$\text{分别计算 } f(-3) = -19, f(-1) = 1, f(1) = -3, f(2) = 1$$

可知最大值 $M = 1$, 最小值 $N = -19$

$$\text{所以 } M - N = 1 - (-19) = 20$$

故选: A.

练6

$$\text{答案: } 3x - y - 2 = 0 \text{ 或 } 3x - 4y + 1 = 0$$

解答:

$$\text{①若 } (1, 1) \text{ 为切点, } k = 3 \times 1^2 = 3$$

$$\therefore l: y - 1 = 3(x - 1) \text{ 即 } 3x - y - 2 = 0$$

②若 $(1, 1)$ 不是切点

$$\text{设切点 } P(x_0, x_0^3), k = 3x_0^2 = \frac{x_0^3 - 1}{x_0 - 1} \Rightarrow 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ (舍) 或 } -\frac{1}{2}$$

$$\therefore l: y - 1 = \frac{3}{4}(x - 1) \text{ 即 } 3x - 4y + 1 = 0$$

故答案为: $3x - y - 2 = 0$ 或 $3x - 4y + 1 = 0$.

练7

答案: $(0, 1)$

解答:

$f(x)$ 的定义域为 $x > 0$

$$\because f'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

当 $f'(x) = -\ln x > 0$ 时, $f(x)$ 是增函数

$$\therefore -\ln x > 0, \ln x < 0$$

$$\therefore 0 < x < 1$$

故函数 $f(x) = x - x \ln x$ 的单调增区间为 $(0, 1)$

故答案为: $(0, 1)$.

练8

答案: $[0, 2]$

解答:

函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x) \geq 0$

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = \pm 1$$

令 $f'(x) > 0$, 得 $-1 < x < 1$, 此时函数递增

令 $f'(x) < 0$, 得 $x < -1$ 或 $x > 1$, 此时函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ 上均为减函数

故当 $x = 1$ 时, 函数有极大值, 值为 $f(1) = 2$

当 $x = -1$ 时, 函数有极小值, 值为 $f(-1) = 0$

又当 $x \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 1$

故 $f(x)$ 的值域为 $[0, 2]$

故答案为: $[0, 2]$.

练9

解答:

$$(1) f'(x) = \frac{1}{x} + a \quad (x > 0)$$

①当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

②当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < -\frac{1}{a}$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x > -\frac{1}{a}$

此时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减

(2) 若函数 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 则有 $f(x)_{\max} \leq 0$

当 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 函数 $f(x)$ 无最大值, 不满足题意

故 $a < 0$

此时, $f(x)_{\max} = f\left(-\frac{1}{a}\right) = \ln\left(-\frac{1}{a}\right) \leqslant 0$

解得 $a \leqslant -1$

第6讲 中档检测卷

练1

答案: D

解答:

$y' = 2x + 1$, 设切点坐标为 (x_0, y_0)

则切线的斜率为 $2x_0 + 1$, 且 $y_0 = x_0^2 + x_0 + 1$

于是切线方程为 $y - x_0^2 - x_0 - 1 = (2x_0 + 1)(x - x_0)$

因为点 $(-1, 0)$ 在切线上

所以 $0 - x_0^2 - x_0 - 1 = (2x_0 + 1)(-1 - x_0)$

可解得 $x_0 = 0$ 或 -2

当 $x_0 = 0$ 时, $y_0 = 1$, 切线方程为 $x - y + 1 = 0$

当 $x_0 = -2$ 时, $y_0 = 3$, 切线方程为 $3x + y + 3 = 0$

验证可知, D 正确

故选: D.

练2

答案: D

解答:

$f'(x) = 1 - \frac{b}{x^2} \quad (b > 0)$

解 $f'(x) < 0$, 得 $-\sqrt{b} < x < 0$ 或 $0 < x < \sqrt{b}$

则 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\sqrt{b}, 0)$, $(0, \sqrt{b})$

故选: D.

练3

答案: C

解答:

$\because y = e^x + 2ax$

$\therefore y' = e^x + 2a$

由题意知 $e^x + 2a = 0$ 有大于 0 的实根, 且根左右两侧符号不同

由 $e^x = -2a$, 得 $a = -\frac{1}{2}e^x$

$\because x > 0$

$\therefore e^x > 1$

$\therefore a < -\frac{1}{2}$

故选: C.

练4

答案: D

解答:

$\because f(x) = ax - \ln x, f(x) > 1$ 在 $(1, +\infty)$ 内恒成立

$\therefore a > \frac{1 + \ln x}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内恒成立

设 $g(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

$\therefore x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) = -\frac{\ln x}{x^2} < 0$

即 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是单调递减的

$\therefore g(x) < g(1) = 1$

$\therefore a \geq 1$, 即 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$

故选: D.

练5

答案: A

解答:

$\because f(x) - ax = 0$ 在区间 $(0, 4)$ 上有三个根

$\therefore |\ln x| - ax = 0$ 在区间 $(0, 4)$ 上有三个不同的解

即 $a = \frac{|\ln x|}{x}$ 在区间 $(0, 4)$ 上有三个不同的解

令 $y = \frac{|\ln x|}{x} = \begin{cases} -\frac{\ln x}{x}, & 0 < x < 1 \\ \frac{\ln x}{x}, & 1 \leq x < 4 \end{cases}$

则当 $0 < x < 1$ 时, $y = -\frac{\ln x}{x}$ 的值域为 $(0, +\infty)$

当 $1 \leq x < 4$ 时, $y = \frac{\ln x}{x}$ 在 $[1, e]$ 上是增函数, 且 $0 \leq y \leq \frac{1}{e}$

$y = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(e, 4)$ 上是减函数, 且 $\frac{\ln 2}{2} < y < \frac{1}{e}$

故当 $a \in \left(\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{e}\right)$ 时, $f(x) - ax = 0$ 在区间 $(0, 4)$ 上有三个根

故选: A.

练6

答案: $(-\infty, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, 2), (2, +\infty)$

解答:

$\because f'(x) = \frac{2 - x^2}{(x^2 - 3x + 2)^2}$ ($x \neq 1$ 且 $x \neq 2$), 令 $f'(x) < 0$

得 $x > \sqrt{2}$ 且 $x \neq 2$ 或 $x < -\sqrt{2}$

$\therefore$ 函数的单调递减区间是 $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 2)$, $(2, +\infty)$

故答案为: $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 2)$, $(2, +\infty)$.

练7

答案: $\left(e + \frac{1}{e} - 2, +\infty\right)$

解答:

$$\because f(x) = \frac{m}{x-1} + \ln x$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{m}{(x-1)^2} + \frac{1}{x}$$

$\therefore f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上有极值点

$\therefore$ 方程 $-\frac{m}{(x-1)^2} + \frac{1}{x} = 0$ 在 $(e, +\infty)$ 上有实数解

即 $m = \frac{(x-1)^2}{x}$ 在 $(e, +\infty)$ 上有实数解

$$\text{令 } g(x) = \frac{(x-1)^2}{x} = x + \frac{1}{x} - 2, \quad x \in (e, +\infty)$$

$$\therefore g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$\because x \in (e, +\infty)$$

$$\therefore g'(x) > 0$$

$\therefore g(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上是增函数

$$\therefore g(x) \geq g(e) = e + \frac{1}{e} - 2$$

$\therefore m = \frac{(x-1)^2}{x}$ 在 $(e, +\infty)$ 上有实数解

则实数 m 的取值范围是 $m > e + \frac{1}{e} - 2$

故答案为: $\left(e + \frac{1}{e} - 2, +\infty\right)$.

练8

答案: $\frac{1}{e} + 3e - 2$

解答:

$$\text{因为 } x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$$

所以 $2x \ln x + x^2 - mx + 3 \geq 0$ 等价于 $m \leq 2 \ln x + x + \frac{3}{x}$

$$\text{记 } f(x) = 2 \ln x + x + \frac{3}{x}, \quad x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$$

由题意知 $m \leq f(x)_{\max}$

$$\text{因为 } f'(x) = \frac{2}{x} + 1 - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{x^2}, \quad x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$$

所以当 $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (1, e]$ 时, $f'(x) > 0$

所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right)$ 上单调递减, 在 $(1, e]$ 上单调递增

所以当 $x = 1$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = 4$

而 $f(e) = 2\ln e + e + \frac{3}{e} = e + \frac{3}{e} + 2$, $f\left(\frac{1}{e}\right) = 2\ln\left(\frac{1}{e}\right) + \frac{1}{e} + 3e = 3e + \frac{1}{e} - 2$

又 $\left(3e + \frac{1}{e} - 2\right) - \left(e + \frac{3}{e} + 2\right) = 2e - \frac{2}{e} - 4 > 0$

所以 $f(x)_{\max} = 3e + \frac{1}{e} - 2$

所以 $m \leq \frac{1}{e} + 3e - 2$

所以实数 m 的最大值为 $\frac{1}{e} + 3e - 2$

故答案为: $\frac{1}{e} + 3e - 2$.

练9

解答:

(1) 根据题意可得 $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -2$ 或 0

当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增

当 $x \in (-2, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数在 $(-2, 0)$ 上单调递减

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

所以函数的极大值为 $f(-2) = \frac{4}{e^2}$

极小值为 $f(0) = 0$

(2) $f(x) - ax = x(xe^x - a)$, $x \in \mathbf{R}$, 在定义域内有三个零点

等价于方程 $xe^x - a = 0$ 有两个非0的不等实根

等价于函数 $y = g(x) = xe^x$ 与函数 $y = a$ 有两个交点

则 $g'(x) = (1 + x)e^x$

易知函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增

所以 $g(x)_{\min} = g(-1) = -\frac{1}{e}$

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$, 且 $g(x) < 0$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$

所以 $a \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$