

高三 数学

一轮闯关训练-函数

Math

产品亮点

- ▶ 分层合理效率高
- ▶ 精选分类覆盖广
- ▶ 题目典型收获多

目录



第 1 讲

函数的概念与表示	1
----------	---

第 2 讲

函数的单调性	7
--------	---

第 3 讲

函数的奇偶性	13
--------	----

第 4 讲

函数的对称性与周期性	19
------------	----

第 5 讲

指数函数	25
------	----

第 6 讲

对数函数	31
------	----

第 7 讲

幂函数与零点问题	37
----------	----

函数

基础检测卷	43
-------	----

函数

中档检测卷	45
-------	----

参考答案与解析	47
---------	----

第 1 讲

函数的概念与表示



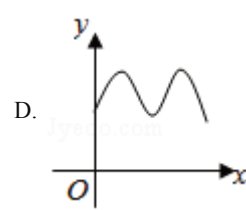
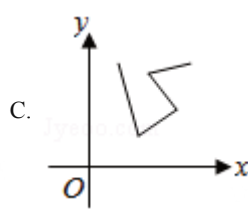
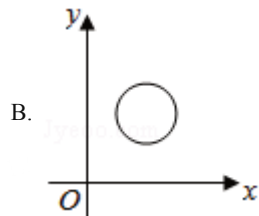
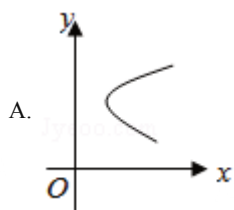
本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

判断是否为函数

练1 (★☆☆☆☆)

下列所示的图形中，可以作为函数 $y = f(x)$ 的图象的是 ()



判断是否为同一函数

练2 (★☆☆☆☆)

下列函数与 $y = x$ 为相同函数的是 ()

A. $y = \sqrt{x^2}$

B. $y = \sqrt[3]{x^3}$

C. $y = (\sqrt{x})^2$

D. $y = \frac{x^2}{x}$

练3 (★★☆☆☆)

与函数 $y = x + 1$ 相同的函数是 ()

A. $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

B. $y = t + 1$

C. $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

D. $y = (\sqrt{x+1})^2$

函数的值

练4 (★☆☆☆☆)

已知函数 $f(x) = \sqrt{x+1}$, $f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

练5 (★★☆☆☆)

设函数 $f(x) = x^2 - 3x + 1$, 则 $f(a) - f(-a) = (\quad)$

A. 0

B. $-6a$

C. $2a^2 + 2$

D. $2a^2 - 6a + 2$

具体函数的定义域

练6 (★★☆☆☆)

函数 $y = \sqrt{2x+1} + \sqrt{3-4x}$ 的定义域为 ()

A. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

B. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$

C. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$

D. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$

练7 (★☆☆☆☆)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, 则函数 $f(x)$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

直接法求函数值域

练8 (★☆☆☆☆)

求 $y = x + 1$ ($1 \leq x \leq 3$) 的值域.

练9 (★★☆☆☆)

函数 $y = 3 - 2x$ ($x \geq 0$) 的值域是 ()

- A. $(-\infty, 0]$ B. $[0, +\infty)$ C. $(-\infty, 3]$ D. $[3, +\infty)$

代入法求解析式

练10 (★★☆☆☆)

已知 $f(x) = x^2 - 4x$, 那么 $f(x-1) =$ ()

- A. $x^2 - 4x + 1$ B. $x^2 - 4$ C. $x^2 - 2x - 3$ D. $x^2 - 6x + 5$

刷中档 本模块适合60-90分水平学生 (满分150分) .

函数的值

练11 (★★☆☆☆)

设函数 $f(x) = \frac{4}{1-x}$, 若 $f(a) = 2$, 则实数 $a =$ _____.

分段函数求值或解方程

练12 (★★☆☆☆)

设函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3, & x \leq 1 \\ x^2 + x - 6, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(f(2)) =$ _____.

具体函数的定义域

练13 (★★☆☆☆)

函数 $y = \sqrt{x(3-x)} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为 ()

- A. $[0, 3]$ B. $[1, 3]$ C. $[3, +\infty)$ D. $(1, 3]$

练14 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 的定义域为 ()

- A. $[0, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

抽象函数的定义域

练15 (★★☆☆☆)

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$ ，则 $f(2x+1)$ 的定义域是 ()

- A. $[3, +\infty)$ B. $(3, +\infty)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

练16 (★★★★☆)

函数 $f(x-1)$ 的定义域是 $[-2, 3]$ ，则 $f(2x-1)$ 的定义域是 ()

- A. $\left[-1, \frac{3}{2}\right]$ B. $\left[0, \frac{5}{2}\right]$ C. $[-5, 5]$ D. $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

直接法求函数值域

练17 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = x^2 + 1$ 的值域为 ()

- A. $[1, +\infty)$ B. $[1, 17)$ C. $[2, 17)$ D. $(1, 17]$

练18 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ($3 \leq x < 5$)，则其值域是_____.

待定系数法求解析式

练19 (★★☆☆☆)

已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f(x+1) = 3x+2$ ，则 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) =$ ()

- A. $3x+2$ B. $3x+5$ C. $3x-1$ D. $3x-2$

配凑法求解析式

练20 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x+1) = 3x+2$, 则 $f(x)$ 的解析式是 ().

- A. $3x-1$ B. $3x+1$ C. $3x+2$ D. $3x+4$

提能力 本模块适合90-120分水平学生 (满分150分) .

函数的值

练21 (★★★★☆)

对于任意整数 x, y , 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy + 1$, 若 $f(1) = 1$, 则 $f(-8)$ 等于 ().

- A. -1 B. 1 C. 19 D. 43

分段函数求值或解方程

练22 (★★★★☆)

设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(f(a)) = 2$, 则 $a =$ _____.

解分段函数不等式

练23 (★★★★☆)

设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, $f[f(1)] =$ _____; 若 $f[f(m)] \leq 6$, 则实数 m 的取值范围是 _____.

抽象函数的定义域

练24 (★★★★☆)

函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 8]$, 则 $y = \frac{f(2x)}{x-4}$ 的定义域是 _____.

配方法求函数值域

练25 (★★★☆☆)

设 $x > 0$, $y > 0$, 且 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$, 则 $x \cdot \sqrt{1+y^2}$ 的最大值为_____.

分离常数法求函数值域

练26 (★★★★☆)

函数 $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 2}$ 的值域为_____.

第 2 讲

函数的单调性



注：本书所有的选择题均为单选题，有且只有一个选项正确。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

简单函数的单调性与单调区间

练1 (★☆☆☆☆)

函数 $y = x^2$ 的单调递减区间为 ()

- A. $(-\infty, 0]$ B. $[0, +\infty)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$

练2 (★☆☆☆☆)

若函数 $y = (2k - 1)x + b$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数，则 ()

- A. $k < \frac{1}{2}$ B. $k > \frac{1}{2}$ C. $k > -\frac{1}{2}$ D. $k < -\frac{1}{2}$

利用单调性比较大小

练3 (★☆☆☆☆)

已知函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数，那么 $f(3)$ 与 $f(2)$ 的大小关系是_____。

练4 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 对实数 a, b , 若 $a + b > 0$, 则有 ()

- A. $f(a) + f(b) > f(-a) + f(-b)$ B. $f(a) + f(b) < f(-a) + f(-b)$
C. $f(a) - f(b) > f(-a) - f(-b)$ D. $f(a) - f(b) < f(-a) - f(-b)$

利用单调性解不等式

练5 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, 且 $f(2m - 1) < f(m - 3)$, 则 m 的取值范围是_____.

练6 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则满足 $f\left(\frac{1}{x-1}\right) > f(1)$ 的实数 x 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$ D. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

二次函数的最值

练7 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = -x^2 + 2x + 4$, 则当 $x \in (0, 3]$ 时, $f(x)$ 的最大值为 ()

- A. 4 B. 1 C. 3 D. 5

练8 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = x^2 + 2x + 3$ 在 $[-3, 4]$ 上的最小值为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

用定义法证明具体函数的单调性

练9 (★★☆☆☆)

证明函数 $f(x) = -2x + 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

练10 (★★☆☆☆)

证明函数 $f(x) = x^2 + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分).

简单函数的单调性与单调区间

练11 (★★☆☆☆)

已知 $f(x) = 4x^2 + ax - 1$, 若对于任意的 $x_1, x_2 \in [1, 2]$ 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $[f(x_1) - f(x_2)] \cdot (x_1 - x_2) < 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $a \geq -8$ B. $a \leq -16$ C. $a \leq -16$ 或 $a \geq -8$ D. $-16 \leq a \leq -8$

用定义法证明具体函数的单调性

练12 (★★★★☆☆)

讨论函数 $f(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ ($a \neq \frac{1}{2}$) 在 $(-2, +\infty)$ 上的单调性.

复合函数的单调性

练13 (★★★★☆☆)

函数 $y = \sqrt{-x^2 + x + 2}$ 的单调递增区间是 ()

A. $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ B. $(-\infty, -1]$ C. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

分段函数的单调性

练14 (★★★★☆☆)

若 $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x}, & x \geq 1 \\ -x + 3a, & x < 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调函数, 则实数 a 的取值范围为_____.

利用单调性比较大小

练15 (★★★★☆)

函数 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的减函数, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 与 $f(a^2 - a + 1)$ 的大小关系为 ()

- A. $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(a^2 - a + 1)$ B. $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(a^2 - a + 1)$
C. $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(a^2 - a + 1)$ D. 无法比较大小

利用单调性解不等式

练16 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, $A(0, -1)$, $B(3, 1)$ 是其图象上的两点, 那么 $|f(x+1)| < 1$ 的解集的补集是 ()

- A. $(-1, 2)$ B. $(1, 4)$
C. $(-\infty, -1) \cup [4, +\infty)$ D. $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

练17 (★★☆☆☆)

若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 且 $f(x)$ 的图象经过点 $A(0, 3)$ 和 $B(3, -1)$, 则不等式 $|f(x+1) - 1| < 2$ 的解集是_____.

练18 (★★☆☆☆)

函数 $f(x)$ 在定义域 $(1, 4)$ 上单调递增, 且 $f(m^2) > f(m)$, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(0, +\infty)$
C. $(1, 2)$ D. $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

练19 (★★★★☆)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \geq 0 \\ 4x - x^2, & x < 0 \end{cases}$, 若 $f(2 - a^2) > f(a)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-2, 1)$ B. $(-1, 2)$
C. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

利用单调性求最值

练20 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ($x \geq 2$) 的最大值为_____.

提能力 本模块适合90-120分水平学生(满分150分).

抽象函数的单调性

练21 (★★★★☆)

函数 $y = f(x)$ 对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$, 且 $f(3) = 4$, 则 ()

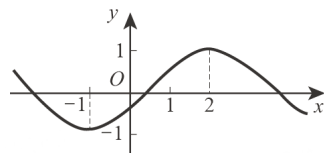
- A. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 且 $f(1) = 3$ B. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 且 $f(1) = 3$
C. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 且 $f(1) = 2$ D. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 且 $f(1) = 2$

复合函数单调性

练22 (★★★★☆)

已知函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象如图所示, 则函数 $g(x) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 的单调递减区间是 ()

- A. $(-\infty, 0], [3, +\infty)$
B. $[-1, 1), (1, 2]$
C. $(-\infty, 1), (1, +\infty)$
D. $[-1, 1)$



分段函数单调性

练23 (★★★★☆)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq a \\ x+2, & x < a \end{cases}$, 若存在实数 x_1, x_2 , 使得 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 则实数 a 的取值范围为_____.

单调性解不等式

练24 (★★★★☆)

已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{|x|+1}$, $x \in \mathbf{R}$, 则不等式 $f(x^2 - 2x) < f(3x - 4)$ 的解集为 ()

- A. $(1, 2)$ B. $(1, 4)$ C. $(0, 2)$ D. $\left(1, \frac{4}{3}\right]$

练25 (★★★★☆)

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y = f(x)$ 对任意的 $a, b \in \mathbf{R}$ 满足: $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$, 当 $x > 0$ 时, 有 $f(x) > 1$, 其中 $f(1) = 2$.

- (1) 求 $f(0)$, $f(-1)$ 的值;
(2) 判断该函数的单调性, 并证明;
(3) 求不等式 $f(x+1) < 4$ 的解集.

单调性求最值

练26 (★★★★☆)

已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{4}{x^2} - 3$, $g(x) = kx + 2$, 若对任意的 $x_1 \in [-1, 2]$, 总存在 $x_2 \in [1, \sqrt{3}]$, 使得 $g(x_1) > f(x_2)$, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ B. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ D. 以上都不对

第 3 讲

函数的奇偶性



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

奇偶性函数特征判断

练1 (★★☆☆☆)

下列说法中不正确的是 ()

- A. 图象关于原点成中心对称的函数一定是奇函数
- B. 奇函数的图象一定经过原点
- C. 偶函数的图象若经过原点，则它与 x 轴交点的个数一定是偶数
- D. 图象关于 y 轴成轴对称的函数一定是偶函数

练2 (★★☆☆☆)

下面四个结论：

- ①偶函数的图象一定与 y 轴相交；
- ②奇函数的图象一定通过原点；
- ③偶函数的图象关于 y 轴对称；
- ④既是奇函数又是偶函数的函数一定是 $f(x) = 0$ ($x \in \mathbf{R}$)。

其中正确命题的个数是 ()

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

简单函数奇偶性的判断

练3 (★☆☆☆☆)

已知 $f(x) = x^2 - 2$, $x \in (-5, 5]$, 则 $f(x)$ 是 ()

- A. 奇函数 B. 偶函数 C. 既奇又偶函数 D. 非奇非偶函数

练4 (★☆☆☆☆)

函数 $f(x) = x^3 + 5x$ 是 ()

- A. 奇函数 B. 偶函数 C. 既是奇函数又是偶函数 D. 非奇非偶函数

练5 (★☆☆☆☆)

下列函数为偶函数的是 ()

- A. $f(x) = x^4 - 1$ B. $f(x) = x^2 \ (-1 < x < 3)$
C. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ D. $f(x) = \frac{x^4}{x}$

已知奇偶性求参数

练6 (★☆☆☆☆)

若函数 $f(x) = x^2 - ax$ 是偶函数, 则 $a =$ _____.

练7 (★☆☆☆☆)

若函数 $f(x)$ 的定义域为 $(3 - 2a, a + 1)$, 且函数 $f(x)$ 为奇函数, 则实数 a 的值为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. 4

根据奇偶性判断函数的对称性

练8 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x$ 的图象关于 ()

- A. 原点对称 B. 直线 $y = x$ 对称 C. y 轴对称 D. x 轴对称

利用奇偶性求函数值

练9 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, 则 $f(-1) = (\quad)$

- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

练10 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = ax^3 + bx + 1$, 若 $f(-1) = 2$, 则 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分).

函数奇偶性的判断

练11 (★★☆☆☆)

下列函数既不是奇函数也不是偶函数的是 ()

A. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$

B. $y = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}$

C. $y = -2$

D. $y = 2x + 1$

练12 (★★★★☆☆)

下列判断正确的是 ()

A. 函数 $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-2}$ 是奇函数

B. 函数 $f(x) = (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 是偶函数

C. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{|x+6|+|x-4|}$ 是偶函数

D. 函数 $f(x) = 1$ 既是奇函数又是偶函数

利用奇偶性求函数的值

练13 (★★☆☆☆)

已知 $f(x) = g(x) + 2$, 且 $g(x)$ 为奇函数, 若 $f(2) = 3$, 则 $f(-2) = (\quad)$

- A. 0 B. -3 C. 1 D. 3

练14 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = ax^3 + \frac{b}{x} + 1$, 若 $f(2017) = -1$, 则 $f(-2017)$ 的值为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

利用奇偶性求函数解析式

练15 (★★☆☆☆)

函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x + 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 的表达式为 ()

- A. $f(x) = -x + 1$ B. $f(x) = -x - 1$ C. $f(x) = x + 1$ D. $f(x) = x - 1$

练16 (★★☆☆☆)

已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - x$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) = ()$

- A. $-x^2 + x$ B. $-x^2 - x$ C. $x^2 + x$ D. $x^2 - x$

奇偶性和单调性结合比较大小

练17 (★★★★☆)

函数 $y = f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 ()

- A. $f(-\pi) > f(-1) > f(\sqrt{2})$ B. $f(-1) > f(-\pi) > f(\sqrt{2})$
C. $f(-\pi) > f(\sqrt{2}) > f(-1)$ D. $f(-1) > f(\sqrt{2}) > f(-\pi)$

练18 (★★☆☆☆)

已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 则 $f(-1)$ 与 $f(a^2 - 2a + 3)$ 的大小关系是 ()

- A. $f(-1) \geq f(a^2 - 2a + 3)$ B. $f(-1) \leq f(a^2 - 2a + 3)$
C. $f(-1) > f(a^2 - 2a + 3)$ D. $f(-1) < f(a^2 - 2a + 3)$

奇偶性和单调性结合解不等式

练19 (★★★★☆☆)

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且 $f(2) = 0$, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是()

- A. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ B. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ C. $(-2, 0) \cup (0, 2)$ D. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

练20 (★★★★☆☆)

设函数 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 内是增函数, 又 $f(-3) = 0$, 则 $f(x) < 0$ 的解集是()

- A. $\{x \mid -3 < x < 0 \text{ 或 } x > 3\}$ B. $\{x \mid x < -3 \text{ 或 } 0 < x < 3\}$
C. $\{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 3\}$ D. $\{x \mid -3 < x < 0 \text{ 或 } 0 < x < 3\}$

提能力 本模块适合90-120分水平学生(满分150分)。

抽象函数单调性判断

练21 (★★★★☆☆)

若 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 则函数 $f(x)$ ()

- A. $f(0) = 0$ 且 $f(x)$ 为奇函数 B. $f(0) = 0$ 且 $f(x)$ 为偶函数
C. $f(x)$ 为增函数且为奇函数 D. $f(x)$ 为增函数且为偶函数

练22 (★★★★☆☆)

若函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 是奇函数, 函数 $g(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 是偶函数, 则()

- A. 函数 $f(x) - g(x)$ 是奇函数 B. 函数 $f(x) \cdot g(x)$ 是奇函数
C. 函数 $f[g(x)]$ 是奇函数 D. 函数 $g[f(x)]$ 是奇函数

利用奇偶性求函数解析式

练23 (★★★★☆☆)

已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是偶函数和奇函数, 且 $f(x) + g(x) = \frac{1}{x-1}$, 则 $f(x) =$ _____.

练24 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 且 $e^x = f(x) + g(x)$, 则 $f(x) = (\quad)$

- A. $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ B. $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ C. $\frac{e^{-x} - e^x}{2}$ D. $\frac{-e^{-x} - e^x}{2}$

奇偶性和单调性综合解不等式

练25 (★★★☆☆)

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f(2-a) + f(1-2a) < 0$, 则 a 的取值范围是 ($\quad$)

- A. $(1, +\infty)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1)$

练26 (★★★☆☆)

已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 单调递增, 则满足 $f(2x-1) < f(-3)$ 的 x 的取值范围是 ($\quad$)

- A. $(-1, 2)$ B. $(-\infty, -1)$ C. $(-\infty, 2)$ D. $(-2, 1)$

第 4 讲

函数的对称性与周期性



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

分式型函数对称型识别

练1 (★★★☆☆)

函数 $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ 的对称中心是 ()

- A. $(1, \frac{1}{2})$ B. $(1, 2)$ C. $(2, -1)$ D. $(-1, 2)$

练2 (★★☆☆☆)

函数 $y = \frac{3x-1}{x+2}$ 的图象的对称中心是_____。

抽象函数对称性识别

练3 (★★☆☆☆)

$\forall x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) + f(2-x) + 2 = 0$, 则函数 $y = f(x)$ 的图象关于 ()

- A. 直线 $x = 1$ 对称 B. 直线 $x = 2$ 对称 C. 点 $(1, -1)$ 对称 D. 点 $(-1, 1)$ 对称

练4 (★★☆☆☆)

若 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(2-x)$, 那么函数 $y = f(x)$ 的图象关于_____对称.

抽象函数周期性的判定

练5 (★★☆☆☆)

函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = -f(x+6)$, 则函数的一个周期为 ()

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

练6 (★★☆☆☆)

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 的周期是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 无周期

利用周期性求值

练7 (★☆☆☆☆)

函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期函数, 最小正周期是 π , 若 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ 的值为 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

练8 (★★☆☆☆)

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x+2)$, 当 $x \in [3, 5]$ 时, $f(x) = |2x-1|$, 则 $f(-1) =$ _____.

练9 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x)$ 满足: $\forall x \in \mathbf{R}, f(x+2) = f(x-2)$, 且当 $x \in [0, 4)$ 时, $f(x) = x^2$, 则 $f(2018) =$ _____.

利用对称性求值

练10 (★★☆☆☆)

已知奇函数 $y = f(x)$ 的图象关于 $x = 2$ 对称, 且 $f(1) = 3$, 则 $f(-3) =$ _____.

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分).

利用对称性求参

练11 (★★☆☆☆)

若函数 $f(x) = \frac{ax-2}{x-1}$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称, 则实数 $a =$ _____.

练12 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = x^2 + ax$ 对于定义域内任意 x , 有 $f(1-x) = f(1+x)$, 则实数 a 等于 ()

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

利用对称性比大小

练13 (★★★★☆)

若函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, 对任意实数 x 都有 $f(2+x) = f(2-x)$, 那么 ()

- A. $f(2) < f(1) < f(4)$ B. $f(1) < f(2) < f(4)$ C. $f(2) < f(4) < f(1)$ D. $f(4) < f(2) < f(1)$

利用对称性解不等式

练14 (★★☆☆☆)

若函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(x)$, 且在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 又 $f(0) = 0$, 则 $f(x) > 0$ 的解集为_____.

周期性的判定与证明

练15 (★ ★ ☆ ☆ ☆)

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足下列各条件, 不能得出函数 $f(x)$ 具有周期性的是()

- A. $f(x)f(x+2)=2009$
- B. $f(x)=f(4-x)$
- C. $f(x+1)=f(x)+f(x+2)$
- D. $f(x)$ 为奇函数且 $f(x)=f(2-x)$

练16 (★ ★ ☆ ☆ ☆)

设 $f(x)$ 的定义域是全体实数, 且 $f(x)$ 的图形关于直线 $x = a$ 和 $x = b$ 对称, 其中 $a < b$, 则 $f(x)$ 是 ().

- A. 一个以 $b - a$ 为周期的周期函数
- B. 一个以 $2b - 2a$ 为周期的周期函数
- C. 一个非周期函数
- D. 以上均不对

利用周期性求值

练17 (★ ★ ☆ ☆ ☆)

设函数 $f(x)$ 对任意实数 x 满足 $f(x+3) = -\frac{1}{f(x)}$ ，且 $f(1) = \frac{1}{2}$ ，则 $f(2008) =$ _____.

练18 (★★★☆☆)

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+2) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$, $f(2) = \frac{1}{4}$, 则 $f(2010)$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{5}$

周期性 与 奇偶性 结合求值

练19 (★ ★ ☆ ☆ ☆)

设 $f(x)$ 是周期为 2 的偶函数, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = 2x(1-x)$, 则 $f\left(-\frac{5}{2}\right) =$ _____.

练20 (★★★★☆☆)

若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上周期为 5 的奇函数, 且满足 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, 则 $f(23) + f(-14) = (\quad)$.

- A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

提能力 本模块适合 90-120 分水平学生 (满分 150 分) .

比较大小

练21 (★★★★☆☆)

二次函数 $f(x) = ax^2 + 2a$ 是区间 $[-a, a^2]$ 上的偶函数, 又 $g(x) = f(x-1)$, 则 $g(0)$, $g\left(\frac{3}{2}\right)$, $g(3)$ 的大小关系为 ()

- A. $g\left(\frac{3}{2}\right) < g(0) < g(3)$ B. $g(0) < g\left(\frac{3}{2}\right) < g(3)$ C. $g\left(\frac{3}{2}\right) < g(3) < g(0)$ D. $g(3) < g\left(\frac{3}{2}\right) < g(0)$

练22 (★★★★☆☆)

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 已知 $y = f(x+2)$ 是奇函数, 当 $x > 2$ 时, $f(x)$ 单调递增, 若 $x_1 + x_2 > 4$ 且 $(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) < 0$, 则 $f(x_1) + f(x_2)$ 的值 ()

- A. 恒大于 0 B. 恒小于 0 C. 可正可负 D. 可能为 0

练23 (★★★★☆☆)

定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 且在 $[0, 1]$ 上是减函数, 则有 ()

- A. $f\left(\frac{3}{2}\right) < f\left(-\frac{1}{4}\right) < f\left(\frac{1}{4}\right)$ B. $f\left(\frac{1}{4}\right) < f\left(-\frac{1}{4}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right)$
C. $f\left(\frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{1}{4}\right) < f\left(-\frac{1}{4}\right)$ D. $f\left(-\frac{1}{4}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{1}{4}\right)$

解不等式

练24 (★★★☆☆)

二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为正数, 且对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x) = f(4-x)$ 成立, 若 $f(2-a^2) < f(1+a-a^2)$, 那么 a 的取值范围是 ()

- A. $1 < a < 2$ B. $a > 1$ C. $a > 2$ D. $a < 1$

多值相加

练25 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$, 若函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$ 图象的交点为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , $\dots$, (x_m, y_m) , 则 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) =$ ()

- A. 0 B. m C. $2m$ D. $4m$

练26 (★★★☆☆)

定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, 恒有 $f\left(x + \frac{3}{2}\right) = -f(x)$, $f(-1) = 1$, $f(0) = -2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2012) =$ ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

第 5 讲

指数函数



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

指数运算

练1 (★☆☆☆☆)

计算： $64^{-\frac{1}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

练2 (★★☆☆☆)

根式 $\sqrt[5]{a^{-3}}$ 化为分数指数幂是 ()

A. $a^{-\frac{3}{5}}$

B. $a^{\frac{8}{5}}$

C. $-a^{\frac{3}{5}}$

D. $-a^{\frac{8}{3}}$

练3 (★★☆☆☆)

下列运算结果中，正确的是 ()

A. $a^2 a^3 = a^5$

B. $(-a^2)^3 = (-a^3)^2$

C. $(\sqrt{a} - 1)^0 = 1$

D. $(-a^2)^3 = a^6$

练4 (★★☆☆☆)

已知 $x + x^{-1} = 5$ ，则 $x^2 + x^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

指数函数的概念

练5 (★☆☆☆☆)

下列各函数中, 是指数函数的是 ()

- A. $y = (-3)^x$ B. $y = -3^x$ C. $y = 3^{x-1}$ D. $y = 3^{-x}$

练6 (★☆☆☆☆)

下列函数中指数函数的个数是 ()

- ① $y = 2^x$; ② $y = x^2$; ③ $y = 2^{x+1}$; ④ $y = x^3$; ⑤ $y = (6a-3)^x$ ($a > \frac{1}{2}$ 且 $a \neq \frac{2}{3}$).

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

求解析式

练7 (★★☆☆☆)

已知指数函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象经过点 $(3, 8)$, 则 $f(-1)$ 的值为_____.

指数函数的图象

练8 (★☆☆☆☆)

函数 $y = a^{x+1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过的定点坐标为_____.

练9 (★★☆☆☆)

已知对不同的 a 值, 函数 $f(x) = 2 + a^{x-1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 P , 则 P 点的坐标是 ()

- A. $(0, 3)$ B. $(0, 2)$ C. $(1, 3)$ D. $(1, 2)$

利用指数函数比大小

练10 (★☆☆☆☆)

已知实数 $3^{0.8}$, $3^{0.7}$, 则它们的大小关系是_____.

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分).

根式与指数的计算与化简

练11 (★★☆☆☆)

化简 $\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}$ 的结果是()

A. $-2^{\frac{1}{3}}$

B. $-2^{\frac{1}{2}}$

C. $-2^{\frac{2}{3}}$

D. $-2^{\frac{3}{2}}$

练12 (★★☆☆☆)

已知 $3^a = 2$, $3^b = 5$, 则 $3^{2a-b} =$ _____.

练13 (★★★★☆☆)

已知 $a + \frac{1}{a} = 7$, 则 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} =$ ()

A. 3

B. 9

C. -3

D. ± 3

指数函数的图象

练14 (★★★★☆☆)

若 $0 < a < 1$, $b > 0$, 则函数 $f(x) = a^x + b$ 的图象一定经过()

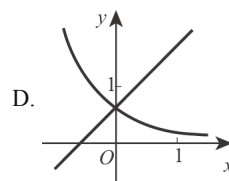
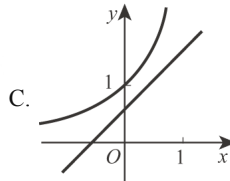
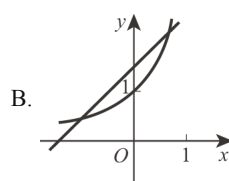
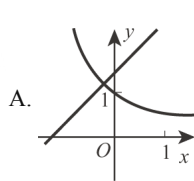
A. 第一、二象限

B. 第二、四象限

C. 第一、二、四象限

D. 第二、三、四象限

练15 (★★☆☆☆)

若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 则在同一直角坐标系下, 函数 $y = x + a$ 与函数 $y = a^x$ 的图象可能是()

指数函数单调性

练16 (★★★★☆)

函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$ 的单调递减区间为 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, -1)$

练17 (★★★★☆)

函数 $y = a^{-x^2+4x}$ ($a > 1$) 的单调递增区间是 ()

- A. $(2, +\infty)$ B. $(-2, +\infty)$ C. $(-\infty, -2)$ D. $(-\infty, 2)$

利用指数函数比大小

练18 (★★★★☆)

设 $y_1 = 4^{0.9}$, $y_2 = 8^{0.48}$, $y_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1.5}$, 则 ()

- A. $y_1 > y_2 > y_3$ B. $y_1 > y_3 > y_2$ C. $y_2 > y_1 > y_3$ D. $y_3 > y_1 > y_2$

练19 (★★☆☆☆)

已知 $a = 0.3^2$, $b = 0.3^{1.5}$, $c = 2^{0.3}$, 则 ()

- A. $b > c > a$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $a > b > c$

利用指数函数解不等式

练20 (★★★★☆)

函数 $f(x) = \sqrt{2^x - 8}$ 的定义域为_____.

能力 本模块适合90-120分水平学生(满分150分).

指数运算

练21 (★★★★☆☆)

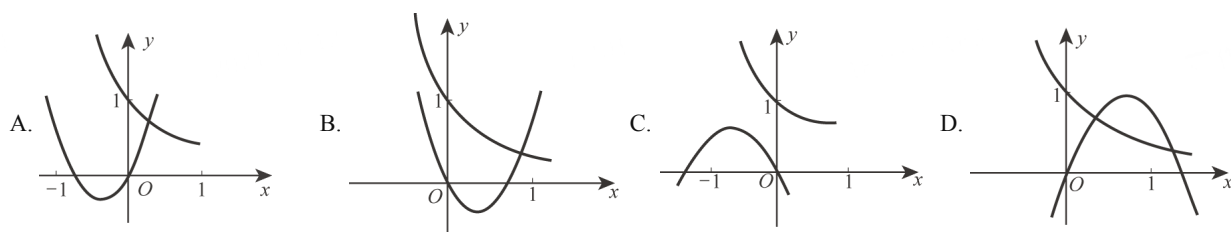
若 $0 < a < 1$, $b > 0$, 且 $a^b + a^{-b} = 2\sqrt{2}$, 则 $a^b - a^{-b}$ 等于 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. 2或-2 C. -2 D. 2

指数函数图象

练22 (★★★★☆☆)

二次函数 $y = ax^2 + bx$ 与指数函数 $y = \left(\frac{b}{a}\right)^x$ 的图象只可能是 ()



利用指数函数比大小

练23 (★★★★☆☆)

三个数 $a = 0.3^2$, $b = 3^{0.2}$, $c = 2^{0.3}$ 之间的大小关系是 ()

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

练24 (★★★★☆☆)

已知 $3^x - 3^{-y} \geq 5^{-x} - 5^y$ 成立, 则下列正确的是 ()

- A. $x + y \leq 0$ B. $x + y \geq 0$ C. $x - y \geq 0$ D. $x - y \leq 0$

利用指数函数解不等式

练25 (★★★☆☆)

若函数 $f(x) = \sqrt{2^{x^2-2ax-a} - 1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则 a 的取值范围为_____.

与指数函数有关的函数奇偶性

练26 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x - a^x$, $a > 1$, 则 $f(x)$ ()

A. 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

B. 是偶函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

C. 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

D. 是偶函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

第 6 讲

对数函数



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

对数运算

练1 (★☆☆☆☆)

$\log_2 \sqrt{2}$ 的值为 ()

A. $-\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

练2 (★☆☆☆☆)

计算: $e^{\ln 1} =$ _____.

练3 (★☆☆☆☆)

$\log_6 3 + \log_6 2 =$ ()

A. 6

B. 5

C. $\log_6 5$

D. 1

对数函数的概念

练4 (★☆☆☆☆)

下列函数是对数函数的是 ()

A. $y = \log_3(x+1)$

B. $y = \log_a(2x)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

C. $y = \ln x$

D. $y = \log_a x^2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

根据对数函数求值

练5 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = \log_a(x-2) + 3$, $a > 0$, $a \neq 1$ 的图象过点 $\left(4, \frac{7}{2}\right)$, 则 a 的值为 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. 4

D. $\frac{1}{2}$

对数函数定义域

练6 (★★☆☆☆)

函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ 的定义域为 ()

A. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

B. $[1, +\infty)$

C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$

D. $(-\infty, 1)$

练7 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = \ln(x-1) + \sqrt{2-x}$ 的定义域为_____.

对数函数的单调性

练8 (★☆☆☆☆)

函数 $y = \ln x$ 的单调递增区间是 ()

A. $[e, +\infty)$

B. $(0, +\infty)$

C. $(-\infty, +\infty)$

D. $[1, +\infty)$

利用对数函数比大小

练9 (★★☆☆☆)

已知 $a = \lg 2$, $b = \lg 3$, 则 ()

- A. $1 < b < a$ B. $b < a < 1$ C. $1 < a < b$ D. $a < b < 1$

练10 (★★☆☆☆)

已知 $\log_{\frac{1}{2}} b < \log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} c$, 则 ()

- A. $2^b > 2^a > 2^c$ B. $2^a > 2^b > 2^c$ C. $2^c > 2^b > 2^a$ D. $2^c > 2^a > 2^b$

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分).

对数运算

练11 (★★☆☆☆)

若 $\lg a - 2 \lg 2 = 1$, 则 $a =$ ()

- A. 4 B. 10 C. 20 D. 40

练12 (★★☆☆☆)

若 $3^a = 4$, 则 $\log_3 2$ 的值等于 ()

- A. $2a$ B. a C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{a}{4}$

练13 (★★☆☆☆)

若 $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 6$, 则 $\log_{abc} x$ 的值为_____.

对数函数定义域

练14 (★★☆☆☆)

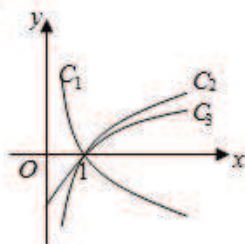
函数 $f(x) = \frac{\sqrt{|x-2|-1}}{\log_2(x-1)}$ 的定义域为_____.

对数函数图象

练15 (★★☆☆☆)

小华同学作出当 $a = 2, 3, \frac{1}{2}$ 时的对数函数 $y = \log_a x$ 的图象如图所示, 则对应 C_1, C_2, C_3 的 a 的值分别为 ()

- A. $2, 3, \frac{1}{2}$
- B. $3, 2, \frac{1}{2}$
- C. $\frac{1}{2}, 2, 3$
- D. $\frac{1}{2}, 3, 2$



对数函数单调性

练16 (★★★★☆)

函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$ 的单调递减区间为 ()

- A. $(-\infty, 1]$
- B. $(3, +\infty)$
- C. $(-\infty, -1)$
- D. $(1, +\infty)$

练17 (★★★★☆)

函数 $y = \lg(x^2 - 5x + 6)$ 的单调递减区间为 ()

- A. $(2, +\infty)$
- B. $(3, +\infty)$
- C. $(-\infty, 3)$
- D. $(-\infty, 2)$

对数函数的值域

练18 (★★☆☆☆)

函数 $y = \log_2(x^2 - 6x + 17)$ 的值域是_____.

利用对数函数比大小

练19 (★★☆☆☆)

已知 $a = \log_{\sqrt{2}} 0.7$, $b = \log_2 0.6$, $c = \log_4 0.49$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > b > a$ D. $b > a > c$

练20 (★★☆☆☆)

设 $a = \log_{0.3} 7$, $b = \log_{0.3} 6$, $c = \frac{1}{2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

提能力 本模块适合90-120分水平学生(满分150分).

对数运算

练21 (★★★☆☆)

若 $2.5^x = 0.25^y = 1000$, 则 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 的值为 ()

- A. 3 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. -3

对数函数单调性

练22 (★★★★☆☆)

函数 $f(x) = \log_2(-x^2 + ax + 3)$ 在 $(2, 4)$ 是单调递减的, 则 a 的范围是 ()

- A. $\left(\frac{13}{4}, 4\right]$ B. $\left[\frac{13}{4}, 4\right]$ C. $[8, +\infty)$ D. $(-\infty, 4]$

练23 (★★★★☆☆)

$y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x + 5)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 是减函数, 则实数 a 的取值范围为_____.

对数函数的最值值域

练24 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \lg(mx^2 + 2x + 1)$ ，若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ ，则 m 的取值范围是 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $[-1, 0]$ C. $(0, 1]$ D. $[0, 1]$

利用对数函数比大小

练25 (★★★☆☆)

设 $a = \log_{1.4} 0.7$ ， $b = 1.4^{0.7}$ ， $c = 0.7^{1.4}$ ，则 a ， b ， c 的大小关系是 ()

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

与对数函数有关的函数奇偶性

练26 (★★★☆☆)

函数 $f(x) = \ln \frac{1+ax}{1+2x}$ ($a \neq 2$) 为奇函数，则实数 a 等于_____.

第 7 讲

幂函数与零点问题



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

幂函数概念

练1 (★☆☆☆☆)

下列函数为幂函数的是 ()

A. $y = x^2$

B. $y = -x^2$

C. $y = 2^x$

D. $y = 2x^2$

练2 (★★☆☆☆)

幂函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(2, 4)$ ，则该幂函数的解析式为 ()

A. $y = 2^x$

B. $y = x^2$

C. $y = x + 2$

D. $y = 2x$

幂函数性质

练3 (★★☆☆☆)

下列幂函数中过点 $(0, 0)$ 的奇函数是 ()

A. $y = x^{\frac{1}{2}}$

B. $y = x^2$

C. $y = x^{-1}$

D. $y = x^3$

利用幂函数比大小

练4 (★☆☆☆☆)

$0.3^{\frac{1}{2}}$, $2.2^{\frac{1}{2}}$, $2.1^{\frac{1}{2}}$ 这三个数从小到大排列为_____.

零点的概念

练5 (★☆☆☆☆)

函数 $y = 2x - 1$ 的零点是_____.

练6 (★★☆☆☆)

函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的零点是 ()

A. 1, -3

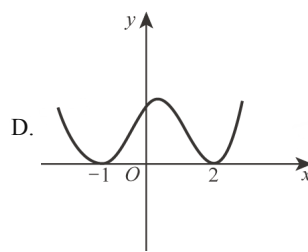
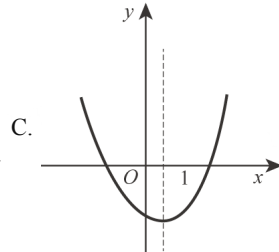
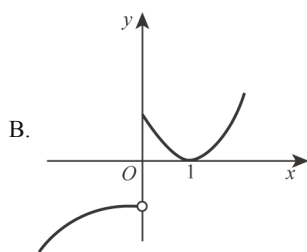
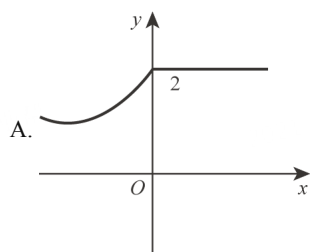
B. 3, -1

C. 1, 2

D. (3, 0), (-1, 0)

练7 (★☆☆☆☆)

下列图象对应的函数中没有零点的是 ()



已知零点求参数的值

练8 (★☆☆☆☆)

函数 $f(x) = -2x + m$ 的零点为 3, 则实数 m 的值为 ()

A. -6

B. 6

C. $\frac{3}{2}$

D. $-\frac{3}{2}$

练9 (★☆☆☆☆)

一元二次方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 没有实数根, 则 m 的取值范围为 ()

- A. $m < 2$ B. $m > 4$ C. $m > 16$ D. $m < 8$

求零点个数问题

练10 (★★☆☆☆)

函数 $y = x - \frac{4}{x}$ 的零点个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 无数个

刷中档 本模块适合60-90分水平学生 (满分150分) .

幂函数概念

练11 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = (a^2 - a - 1)x^{\frac{1}{a-2}}$ 为幂函数, 则 $a =$ ()

- A. -1 或 2 B. -2 或 1 C. -1 D. 1

幂函数性质

练12 (★★☆☆☆)

设 $a \in \{-1, 1, 2, 3\}$, 则使函数 $y = x^a$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 且为奇函数的所有 a 值为 ()

- A. 1, 3 B. -1, 1 C. -1, 3 D. -1, 1, 3

练13 (★★☆☆☆)

若幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{1-m}$ 是偶函数, 则实数 $m =$ ()

- A. -1 B. 2 C. 3 D. -1 或 2

利用幂函数比大小

练14 (★★☆☆☆)

下列式子正确的是 ().

A. $1.3^{\frac{1}{2}} > 1.5^{\frac{1}{2}}$

B. $3.14^{\frac{1}{3}} > \pi^{\frac{1}{3}}$

C. $0.7^3 > 0.6^3$

D. $(-0.5)^{-1} > (-0.6)^{-1}$

练15 (★★☆☆☆)

设 $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$, $b = 1$, $c = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

A. $a > c > b$

B. $a > b > c$

C. $c > a > b$

D. $b > a > c$

零点存在性定理

练16 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = 2^x - \frac{3}{x}$ 的零点所在的区间为 ()

A. (0, 1)

B. (1, 2)

C. (2, 3)

D. (3, 4)

求零点个数问题

练17 (★★☆☆☆)

直线 $y = 2$ 与函数 $y = |x^2 - 6x|$ 图象的交点个数为 ()

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

练18 (★★☆☆☆)

方程 $e^x \ln x = 1$ (其中 e 为自然对数的底数) 解的个数为_____.

已知零点个数求参

练19 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = |x| - k$ 有两个零点, 则 ()

- A. $k = 0$ B. $k > 0$ C. $0 \leq k < 1$ D. $k < 0$

练20 (★★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-3x+2, & x \geq 0 \end{cases}$, 函数 $g(x) = f(x) - a$ 恰有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, -\frac{1}{4}]$ B. $(-\frac{1}{4}, 2)$ C. $[2, +\infty)$ D. $[0, 2)$

提能力 本模块适合90-120分水平学生 (满分150分) .

幂函数

练21 (★★★★☆☆)

已知幂函数 $y = x^{m^2-2m-3}$ ($m \in \mathbf{Z}$) 的图象与 x 轴, y 轴没有交点, 且关于 y 轴对称, 则 $m =$ ()

- A. 1 B. 0, 2 C. -1, 1, 3 D. 0, 1, 2

求零点个数问题

练22 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = 2^x \cdot \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right| - 1$ 的零点的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

练23 (★★★★☆☆)

设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ -\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $F(x) = f(x) + x$ 的零点个数是_____.

已知零点个数求参数

练24 (★★★☆☆)

若函数 $f(x) = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^x - 1 \right| - 2a$ 有两个零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(0, 1)$ C. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

练25 (★★★★☆)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_3 x, & 0 < x \leq 3 \\ |x-4|, & x > 3 \end{cases}$, 若函数 $h(x) = f(x) - mx + 2$ 有三个不同的零点, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(\frac{1}{2}, 1)$ B. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$ C. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup [1, +\infty)$ D. $(\frac{1}{2}, 1]$

复合函数零点问题

练26 (★★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln|x||, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则方程 $f^2(x) - f(x) = 0$ 的不相等的实根个数有 ()

- A. 5个 B. 6个 C. 7个 D. 8个

4. (★★☆☆☆)

函数 $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 且 $f(2m) > f(m+9)$, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(9, +\infty)$ B. $[9, +\infty)$ C. $(-\infty, -9)$ D. $(-\infty, 9]$

5. (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x$ 的图象关于 ()

- A. 原点对称 B. 直线 $y = x$ 对称 C. y 轴对称 D. x 轴对称

二、填空题, 共3题, 每题10分.

6. (★☆☆☆☆)

函数 $y = \lg x - 1$ 的零点是_____.

7. (★☆☆☆☆)

函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$, $x \in [-1, 1]$ 的值域是_____.

8. (★☆☆☆☆)

已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(2, \sqrt{2})$, 则 $f(9) =$ _____.

三、解答题, 共1题, 每题20分.

9. (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的定义域;
(2) 求使 $f(x) > 0$ 的 x 的取值范围.

函数

中档检测卷

本试卷共9个题目，选择5个，填空3个，解答1个，均为中档水平题目。限时30分钟。得分在70分以上视为合格，可以去做【提能力】模块题目，冲刺更高的水平。

一、单选题，共5题，每题10分.

练1 (★★★★☆☆)

已知函数 $y = f(x+1)$ 定义域是 $[-2, 3]$ ，则 $y = f(x-1)$ 的定义域是 ()

A. $[0, 5]$ B. $[-1, 4]$ C. $[-3, 2]$ D. $[-2, 3]$

练2 (★★★★☆☆)

已知 $f(1-2x) = x^2 + 1$ ，那么 $f\left(\frac{1}{2}\right) = ()$

A. 16

B. 17

C. $\frac{17}{16}$ D. $\frac{16}{17}$

练3 (★★★★☆☆)

下列函数中，在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递减的是 ()

A. $y = \frac{1}{x} - x$ B. $y = x^2 - x$ C. $y = \ln x - x$ D. $y = e^x - x$

练4 (★★★☆☆)

定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ ，对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ ，都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ ， $f(-1) = 0$ ，则不等式 $xf(x) < 0$ 的解集是()

- A. $(-1, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

练5 (★★★☆☆)

若 $\log_5 \frac{1}{3} \cdot \log_3 6 \cdot \log_6 x = 2$ ，则 x 等于()

- A. 9 B. $\frac{1}{9}$ C. 25 D. $\frac{1}{25}$

二、填空题，共3题，每题10分.

练6 (★★★☆☆)

若函数 $f(x) = \frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{a}$ 是奇函数，则实数 a 的值为_____.

练7 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = a^x + b$ ($a > 0, a \neq 1$) 的定义域和值域都是 $[-2, 0]$ ，则 $f(-1) =$ _____.

练8 (★★★☆☆)

已知 $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 1 \\ -x^2 + 2x + 3, & x > 1 \end{cases}$ ，则函数 $g(x) = f(x) - e^x$ 的零点个数为_____.

三、解答题，共1题，每题20分.

练9 (★★★☆☆)

设 $f(x) = \log_a(1+x) + \log_a(3-x)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)， $f(1) = 2$.

- (1) 求 a 的值及 $f(x)$ 的定义域；
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ 上的最大值.

参考答案与解析

第1讲 函数的概念与表示

练1

答案: D

解答:

作直线 $x = a$ 与曲线相交, 由函数的概念可知, 定义域中任意一个自变量对应唯一的函数值

$\therefore y$ 是 x 的函数, 那么直线 $x = a$ 移动中始终与曲线至多有一个交点

于是可排除, A, B, C. 只有D符合

故选: D.

练2

答案: B

解答:

A. 函数 $y = \sqrt{x^2} = |x|$ 与函数 $y = x$ 的解析式不同, 不是相同函数

所以不正确

B. 函数 $y = \sqrt[3]{x^3} = x$ 与函数 $y = x$ 的解析式相同, 定义域相同都是 $\mathbf{R}$, 是相同函数

所以正确

C. 函数 $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为: $[0, +\infty)$, 与函数 $y = x$ 的定义域不同, 不是相同函数

所以不正确

D. 函数 $y = \frac{x^2}{x}$ 的定义域为: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 与函数 $y = x$ 的定义域不同, 不是相同函数

所以不正确

故选: B.

练3

答案: B

解答:

A. 分母不为0, 故A中函数的定义域为 $\{x | x \neq 1\}$, 与函数 $y = x + 1$ 不相同

B. 定义域为 $\mathbf{R}$, 且对应法则与函数 $y = x + 1$ 相同, 故是同一函数

C. $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = |x + 1|$, 与函数 $y = x + 1$ 的对应法则不相同, 故不是同一函数

D. 定义域为 $[-1, +\infty)$, 与函数 $y = x + 1$ 不相同

故选: B.

练4

答案: 2

解答:

$\therefore$ 函数 $f(x) = \sqrt{x+1}$

$\therefore f(3) = \sqrt{3+1} = 2$

故答案为: 2.

练5

答案: B

解答:

函数 $f(x) = x^2 - 3x + 1$

则 $f(a) - f(-a) = a^2 - 3a + 1 - (a^2 + 3a + 1) = -6a$

故选: B.

练6

答案: B

解答:

要使函数有意义, 需 $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 3-4x \geq 0 \end{cases}$

解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$

故选: B.

练7

答案: $\{x|x \neq -1\}$

解答:

由 $x+1 \neq 0$, 得 $x \neq -1$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ 的定义域为 $\{x | x \neq -1\}$

故答案为: $\{x | x \neq -1\}$.

练8

解答:

由题意, $x = 1$ 时, y 取得最小值, 为 2, $x = 3$ 时, y 取得最大值, 为 4所以 $y = x + 1$ ($1 \leq x \leq 3$) 的值域为 $[2, 4]$ **练9**

答案: C

解答:

当 $x = 0$ 时, $y = 3 - 2 \times 0 = 3$ $\because$ 函数 $y = 3 - 2x$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减 $\therefore y \leq 3$ $\therefore$ 函数 $y = 3 - 2x$ ($x \geq 0$) 的值域是 $(-\infty, 3]$

故选: C.

练10

答案: D

解答:

 $\because f(x) = x^2 - 4x$ $\therefore f(x-1) = (x-1)^2 - 4(x-1) = x^2 - 6x + 5$

故选: D.

练11

答案: -1

解答:

由题意, $f(a) = \frac{4}{1-a} = 2$ 解得, $a = -1$

故答案为: -1.

练12

答案: -3

解答:

 $f(f(2)) = f(2^2 + 2 - 6) = f(0) = -0^2 - 3 = -3$

故答案为: -3.

练13

答案: D

解答:

由题意得: $\begin{cases} x(3-x) \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$, 解得: $1 < x \leq 3$

故选: D.

练14

答案: A

解答:

要使函数有意义, 则 $\frac{x}{1-x} \geq 0$, 即 $\frac{x}{x-1} \leq 0$

解得 $0 \leq x < 1$

即函数的定义域为 $[0, 1)$

故选: A.

练15

答案: C

解答:

$\because f(x)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$

$\therefore$ 要使 $f(2x+1)$ 有意义

则 $2x+1 > 1$, 得 $x > 0$

即函数 $f(2x+1)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$

故选: C.

练16

答案: A

解答:

在函数 $f(x-1)$ 中

$\because -2 \leq x \leq 3$

$\therefore -3 \leq x-1 \leq 2$

$\therefore$ 在函数 $f(2x-1)$ 中

$-3 \leq 2x-1 \leq 2$

解得 $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$

故选: A.

练17

答案: A

解答:

$$\because \text{函数 } f(x) = x^2 + 1 \geqslant 1$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) = x^2 + 1 \text{ 的值域为 } [1, +\infty)$$

故选: A.

练18

$$\text{答案: } \left(\frac{1}{3}, 1\right]$$

解答:

$$\because 3 \leqslant x < 5$$

$$\therefore 1 \leqslant x - 2 < 3$$

$$\therefore \frac{1}{3} < \frac{1}{x-2} \leqslant 1$$

$$\text{所以函数 } f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ (} 3 \leqslant x < 5 \text{) 的值域是 } \left(\frac{1}{3}, 1\right]$$

$$\text{故答案为: } \left(\frac{1}{3}, 1\right].$$

练19

答案: C

解答:

$$\because f(x) \text{ 是一次函数}$$

$$\therefore \text{设 } f(x) = ax + b, \quad a \neq 0$$

$$\because f(x+1) = 3x + 2$$

$$\therefore f(x+1) = a(x+1) + b = ax + a + b = 3x + 2$$

$$\text{即 } a = 3, \quad a + b = 2$$

$$\therefore a = 3, \quad b = -1$$

$$\therefore f(x) = 3x - 1$$

故选: C.

练20

答案: A

解答:

$$\because f(x+1) = 3x + 2 = 3(x+1) - 1$$

$$\therefore f(x) = 3x - 1$$

故选：A.

练21

答案：C

解答：

令 $x = 1, y = 0$

因为 $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy + 1$ ，若 $f(1) = 1$

所以 $f(1+0) = f(0) + f(1) + 0 + 1 = 1$

所以 $f(0) = -1$

因为 $f(0) = f(-1+1) = f(-1) + f(1) - 1 + 1 = -1$

所以 $f(-1) = -2$

所以 $f(-2) = f(-1-1) = f(-1) + f(-1) + 1 + 1 = -2 - 2 + 1 + 1 = -2$

$f(-4) = f(-2-2) = f(-2) + f(-2) + 4 + 1 = -2 - 2 + 4 + 1 = 1$

$f(-8) = f(-4-4) = f(-4) + f(-4) + 16 + 1 = 1 + 1 + 16 + 1 = 19$

故选：C.

练22

答案： $\sqrt{2}$

解答：

设 $t = f(a)$ ，则 $f(t) = 2$

若 $t > 0$ ，则 $f(t) = -t^2 = 2$ ，此时不成立

若 $t \leq 0$ ，由 $f(t) = 2$ 得， $t^2 + 2t + 2 = 2$

即 $t^2 + 2t = 0$ ，解得 $t = 0$ 或 $t = -2$

即 $f(a) = 0$ 或 $f(a) = -2$

若 $a > 0$ ，则 $f(a) = -a^2 = 0$ ，此时不成立

或 $f(a) = -a^2 = -2$ ，即 $a^2 = 2$

解得 $a = \sqrt{2}$

若 $a \leq 0$ ，由 $f(a) = 0$ 得， $a^2 + 2a + 2 = 0$ ，此时无解

或 $f(a) = -2$ ，即 $a^2 + 2a + 4 = 0$ ，此时无解

综上： $a = \sqrt{2}$

故答案为： $\sqrt{2}$.

练23

答案: $0; (-\infty, \sqrt{3}]$

解答:

根据题意, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

则 $f(1) = -(1)^2 = -1$, 则 $f[f(1)] = (-1)^2 + (-1) = 0$

对于 $f[f(m)] \leq 6$, 分3种情况讨论

①当 $m = 0$ 时, $f(m) = 0$, $f[f(m)] = 0 \leq 6$, 符合题意

②当 $m > 0$ 时, $f(m) = -m^2 < 0$, 则 $f[f(m)] = m^4 - m^2$

若 $f[f(m)] \leq 6$, 即 $m^4 - m^2 \leq 6$

又由 $m > 0$, 解可得 $0 < m \leq \sqrt{3}$

此时 m 的取值范围为 $(0, \sqrt{3}]$

③当 $m < 0$ 时, $f(m) = m^2 + m$

当 $m \leq -1$ 时, $f(m) = m^2 + m \geq 0$, 此时 $f[f(m)] = -(m^2 + m)^2 \leq 0$, 满足 $f[f(m)] \leq 6$

当 $-1 < m < 0$ 时, $f(m) = m^2 + m < 0$, 分析可得: $-\frac{1}{4} \leq f(m) < 0$

此时 $f[f(m)] = (f(m))^2 + f(m) \leq 6$ 恒成立

此时 m 的取值范围为 $(-\infty, 0)$

综合可得: m 的取值范围为 $(-\infty, \sqrt{3}]$

故答案为: $0; (-\infty, \sqrt{3}]$.

练24

答案: $[0, 4)$

解答:

由 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 8]$

得 $0 \leq 2x \leq 8$, 解得: $0 \leq x \leq 4$

得 $f(2x)$ 的定义域是 $[0, 4]$

而 $x - 4 \neq 0$, 解得: $x \neq 4$

故函数 $y = \frac{f(2x)}{x-4}$ 的定义域是 $[0, 4)$

故答案为: $[0, 4)$.

练25

答案: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

解答:

因为 $x > 0$, $y > 0$, 且 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$, 则解出 $x = \sqrt{1 - \frac{y^2}{2}}$

$$\therefore x \cdot \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{2}} \cdot \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

当且仅当 $y^2 = \frac{1}{2}$, 即 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号

故答案为: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

练26

答案: $\left[\frac{3}{7}, 1\right)$

解答:

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 2} = 1 - \frac{1}{x^2 + x + 2}$$

$$\therefore x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$$

$$\therefore 0 < \frac{1}{x^2 + x + 2} \leq \frac{4}{7}$$

$$\therefore -\frac{4}{7} \leq -\frac{1}{x^2 + x + 2} < 0$$

$$\therefore \frac{3}{7} \leq 1 - \frac{1}{x^2 + x + 2} < 1$$

故函数 $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 2}$ 的值域为 $\left[\frac{3}{7}, 1\right)$

故答案为: $\left[\frac{3}{7}, 1\right)$.

第 2 讲 函数的单调性**练1**

答案: A

解答:

函数 $y = x^2$ 的图象开口向上, 对称轴是 y 轴

所以函数 $y = x^2$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0]$

故选: A.

练2

答案: A

解答:

$\because$ 函数 $y = (2k - 1)x + b$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数

$$\therefore 2k - 1 < 0$$

$$\text{解得 } k < \frac{1}{2}$$

故选: A.

练3

答案: $f(3) < f(2)$

解答:

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 所以 $f(3) < f(2)$

故答案为: $f(3) < f(2)$.

练4

答案: A

解答:

$$\because a + b > 0$$

$$\therefore a > -b, \quad b > -a$$

$\because$ 函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数

$$\therefore f(a) > f(-b), \quad f(b) > f(-a)$$

$$\therefore f(a) + f(b) > f(-a) + f(-b)$$

故选: A.

练5

答案: $(-\infty, -2)$

解答:

$\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, 且 $f(2m-1) < f(m-3)$

则 $2m-1 < m-3$, 求得 $m < -2$

故答案为: $(-\infty, -2)$.

练6

答案: D

解答:

$\because f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数

$\therefore$ 由 $f\left(\frac{1}{x-1}\right) > f(1)$ 得: $\frac{1}{x-1} < 1$

解得 $x < 1$ 或 $x > 2$

$\therefore x$ 的取值范围是 $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

故选: D.

练7

答案: D

解答:

根据题意, 函数 $f(x) = -x^2 + 2x + 4 = -(x-1)^2 + 5$, 其图象的对称轴为 $x = 1$, 开口向下

则当 $x \in (0, 3]$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = 5$

故选: D.

练8

答案: C

解答:

函数 $f(x) = x^2 + 2x + 3$ 的图象开口向上, 对称轴为 $x = -1$

因为 $-1 \in [-3, 4]$

所以函数的最小值为: $f(-1) = 1 - 2 + 3 = 2$

故选: C.

练9

解答:

任取实数 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = -2x_1 + 1 - (-2x_2 + 1) = -2(x_1 - x_2)$$

$$\because x_1 < x_2$$

$$\therefore x_1 - x_2 < 0, \quad -2(x_1 - x_2) > 0$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0, \text{ 即 } f(x_1) > f(x_2)$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = -2x + 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

练10

解答:

令 $x_1 > x_2 > 0$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^2 + 1 - x_2^2 - 1 \\ &= x_1^2 - x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

由 $x_1 > x_2 > 0$ 得 $x_1 - x_2 > 0, \quad x_1 + x_2 > 0$ 故 $f(x_1) - f(x_2) > 0$ 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数**练11**

答案: B

解答:

对于任意的 $x_1, x_2 \in [1, 2]$ 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $[f(x_1) - f(x_2)] \cdot (x_1 - x_2) < 0$ 恒成立可知函数 $f(x) = 4x^2 + ax - 1$ 在区间 $[1, 2]$ 上是减函数

$f(x) = 4x^2 + ax - 1$ 的对称轴为 $x = -\frac{a}{8}$, 开口向上

可得 $2 \leq -\frac{a}{8}$, 即 $a \leq -16$

故选: B.

练12

解答:

设 $-2 < x_1 < x_2$, 则 $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$

$$f(x) = \frac{ax + 2a + 1 - 2a}{x + 2} = a + \frac{1 - 2a}{x + 2}$$

$$\therefore \Delta y = f(x_2) - f(x_1) = \left(a + \frac{1 - 2a}{x_2 + 2} \right) - \left(a + \frac{1 - 2a}{x_1 + 2} \right)$$

$$= (1-2a) \left(\frac{1}{x_2+2} - \frac{1}{x_1+2} \right)$$

$$= (1-2a) \cdot \frac{x_1-x_2}{(x_2+2)(x_1+2)}$$

又 $\because -2 < x_1 < x_2$

$$\therefore \frac{x_1-x_2}{(x_2+2)(x_1+2)} < 0$$

$\therefore$ 当 $1-2a > 0$, 即 $a < \frac{1}{2}$ 时, $\Delta y < 0$, 即 $f(x_2) < f(x_1)$

当 $1-2a < 0$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, $\Delta y > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$

$\therefore$ 当 $a < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ 在 $(-2, +\infty)$ 上为减函数

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ 在 $(-2, +\infty)$ 上为增函数

练13

答案: A

解答:

由 $-x^2 + x + 2 \geq 0$, 得 $-1 \leq x \leq 2$

求函数 $y = \sqrt{-x^2 + x + 2}$ 的单调递增区间

也就是求 $y = -x^2 + x + 2$, $-1 \leq x \leq 2$ 的单调递增区间

$\therefore$ 函数 $y = \sqrt{-x^2 + x + 2}$ 的单调递增区间是 $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

故选: A.

练14

答案: $a \geq \frac{1}{2}$

解答:

因为当 $x < 1$ 时, $f(x) = -x + 3a$ 为单调递减函数

所以当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = \frac{a}{x}$ 也单调递减

因此 $a > 0$ 且 $-1 + 3a \geq a$

故答案为: $a \geq \frac{1}{2}$.

练15

答案: B

解答:

$\because a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$, 且函数 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的减函数

$$\therefore f(a^2 - a + 1) < f\left(\frac{1}{2}\right)$$

故选: B.

练16

答案: D

解答:

不等式 $|f(x+1)| < 1$ 可变形为 $-1 < f(x+1) < 1$

$\because A(0, -1), B(3, 1)$ 是函数 $f(x)$ 图象上的两点

$$\therefore f(0) = -1, f(3) = 1$$

$\therefore -1 < f(x+1) < 1$ 等价于不等式 $f(0) < f(x+1) < f(3)$

又 $\because$ 函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数

$\therefore f(0) < f(x+1) < f(3)$ 等价于 $0 < x+1 < 3$

解得 $-1 < x < 2$

$\therefore$ 不等式 $|f(x+1)| < 1$ 的解集 $M = (-1, 2)$

$$\therefore \complement_{\mathbf{R}} M = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$$

故选: D.

练17

答案: $(-1, 2)$

解答:

由 $|f(x+1) - 1| < 2$, 得 $-2 < f(x+1) - 1 < 2$, 即 $-1 < f(x+1) < 3$

又因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 且 $f(x)$ 的图象过点 $A(0, 3), B(3, -1)$

所以 $f(3) < f(x+1) < f(0)$

所以 $0 < x+1 < 3, -1 < x < 2$

故答案为: $(-1, 2)$.

练18

答案: C

解答:

$$\text{由题意可知} \begin{cases} m^2 > m \\ 1 < m^2 < 4 \end{cases}, \text{解得} 1 < m < 2$$

故选: C.

练19

答案: A

解答:

由题意可得, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$ 为增函数

当 $x < 0$ 时, $f(x) = 4x - x^2 = -(x-2)^2 + 4$ 为增函数

$\therefore f(x)$ 在定义域上是增函数

若 $f(2-a^2) > f(a)$

则 $2-a^2 > a$, 即 $a^2 + a - 2 < 0$

解得: $-2 < a < 1$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(-2, 1)$

故选: A.

练20

答案: 2

解答:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

$\because x \geq 2$

$$\therefore x-1 \geq 1, 0 < \frac{1}{x-1} \leq 1$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{x-1} \in (1, 2]$$

故当 $x=2$ 时, 函数 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 取得最大值 2

故答案为: 2.

练21

答案: D

解答:

设 $x_1 > x_2$

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2 + x_2) - f(x_2)$$

$$= f(x_1 - x_2) + f(x_2) - 1 - f(x_2)$$

$$= f(x_1 - x_2) - 1$$

$$> 1 - 1$$

$$= 0$$

$$\text{即 } f(x_1) > f(x_2)$$

$\therefore f(x)$ 为增函数

$$\text{又 } \because f(3) = f(1) + f(2) - 1$$

$$= f(1) + f(1) + f(1) - 1 - 1$$

$$= 3f(1) - 2$$

$$= 4$$

$$\therefore f(1) = 2$$

故选: D.

练22

答案: A

解答:

由图象可知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $[-1, 2]$ 上单调递增

$$\text{令 } z = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} \quad (x \neq 1)$$

$$\therefore z = \frac{x+1}{x-1} \text{ 在 } (-\infty, 1), (1, +\infty) \text{ 上单调递减}$$

$$g(x) = f(z), \quad z = \frac{x+1}{x-1}$$

欲使得 $g(x) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 单调递减, 只需 $f(z)$ 单调递增, 即 $-1 \leq z = \frac{x+1}{x-1} \leq 2$, 解得 $x \leq 0$ 或 $x \geq 3$

故函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$, $[3, +\infty)$ 上单调递减

故选: A.

练23

答案: $(-\infty, 2)$

解答:

依题意, 当 $x < a$ 时, $f(x) = x + 2$ 单调递增

当 $x \geq a$ 时, $f(x) = x^2$, 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增

若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 $a \geq 0$ 且 $f(a) \geq a + 2$

由 $f(a) \geq a + 2$ 得: $a^2 - a - 2 \geq 0$, 解得: $a \geq 2$ 或 $a \leq -1$

$\therefore a \geq 2$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

$\therefore$ 存在实数 x_1, x_2 , 使得 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$

$\therefore f(x)$ 不能在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

$\therefore a < 2$

故答案为: $(-\infty, 2)$.

练24

答案: A

解答:

依题意, $f(x) = \frac{x+1}{|x|+1}$

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 1$

当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{x+1}{-x+1} = -1 - \frac{2}{x-1}$

结合反比例函数性质可得, $f(x) = -1 - \frac{2}{x-1}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数

$\therefore$ 不等式 $f(x^2 - 2x) < f(3x - 4)$ 可以转化为

$$\begin{cases} x^2 - 2x < 3x - 4 \\ x^2 - 2x < 0 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} 1 < x < 4 \\ 0 < x < 2 \end{cases}$$

$\therefore 1 < x < 2$

故选: A.

练25

解答:

(1) 令 $a = 1, b = 0$, 则 $f(1) = f(0) \cdot f(1)$

$\therefore f(1) > 1$

$\therefore f(0) = 1$

令 $a = 1, b = -1$, 则 $f(0) = f(1) \cdot f(-1)$

$\therefore f(1) = 2$

$\therefore f(-1) = \frac{1}{2}$

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增

任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$, 由题设得 $f(x_2 - x_1) > 1$

对任意 $x < 0, f(x) \cdot f(-x) = f(0) = 1$

$\therefore -x > 0$

$\therefore f(-x) > 1, f(x) > 0$

$\therefore$ 对任意 $x \in \mathbf{R}, f(x) > 0$

$\therefore f(x_1) > 0$

$\therefore f(x_2) = f[(x_2 - x_1) + x_1] = f(x_2 - x_1) \cdot f(x_1) > f(x_1)$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增

(3) $f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot f(1) = 4$

$f(x+1) < 4 = f(2)$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增

$\therefore x+1 < 2$

$\therefore x < 1$

$\therefore$ 不等式的解集为 $(-\infty, 1)$

练26

答案: A

解答:

对任意的 $x_1 \in [-1, 2]$, 总存在 $x_2 \in [1, \sqrt{3}]$, 使得 $g(x_1) > f(x_2)$

$$\therefore g(x)_{\min} > f(x)_{\min}$$

$$\because f(x) = x^2 + \frac{4}{x^2} - 3 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{4}{x^2}} - 3 = 4 - 3 = 1, \text{ 当且仅当 } x = \sqrt{2} \text{ 时取等号}$$

$$\therefore f(x)_{\min} = 1$$

当 $k > 0$ 时, $g(x) = kx + 2$, 在 $x \in [-1, 2]$ 为增函数

$$\therefore g(x)_{\min} = g(-1) = 2 - k$$

$$\therefore 2 - k > 1, \text{ 解得 } 0 < k < 1$$

当 $k < 0$ 时, $g(x) = kx + 2$, 在 $x \in [-1, 2]$ 为减函数

$$\therefore g(x)_{\min} = g(2) = 2k + 2$$

$$\therefore 2k + 2 > 1, \text{ 解得 } -\frac{1}{2} < k < 0$$

当 $k = 0$ 时, $g(x) = 2$, $2 > 1$ 成立

综上所述 k 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

故选: A.

第3讲 函数的奇偶性

练1

答案: B

解答:

对于选项A, 奇函数的图象关于原点对称与函数图象关于原点成中心对称的函数是奇函数是等价的, 故A正确

对于选项B, 当一个奇函数在原点有定义时, 奇函数的图象过原点, 本题不能保证函数在原点有定义, 故B错误

对于选项C, 由于偶函数的图象关于 y 轴对称, 故其图象与 x 轴的交点要么是关于 y 轴对称, 要么就是原点, 本题中已经排除了图象过原点, 故此偶函数的图象与 x 轴的交点个数一定是偶数个, 故C正确

对于选项D, 函数是偶函数等价于其图象关于 y 轴成轴对称, 故D正确

故选: B.

练2

答案: A

解答:

偶函数的图象关于 y 轴对称, 但不一定与 y 轴相交, 因此①错误, ③正确

奇函数的图象关于原点对称, 但不一定经过原点, 只有在原点处有定义才通过原点, 因此②错误

若 $y = f(x)$ 既是奇函数, 又是偶函数, 由定义可得 $f(x) = 0$, 但不一定 $x \in \mathbf{R}$, 只要定义域关于原点对称即可, 因此④错误

故选: A.

练3

答案: D

解答:

因函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-5, 5]$, 它不关于原点对称, 故函数 $f(x)$ 是非奇非偶函数

故选: D.

练4

答案: A

解答:

由函数的定义域是 $\mathbf{R}$

$f(-x) = (-x)^3 - 5x = -f(x)$, 故 $f(x)$ 是奇函数

故选: A.

练5

答案：A

解答：

$f(-x) = (-x)^4 - 1 = x^4 - 1 = f(x)$ ，且定义域为 $\mathbf{R}$ ，关于原点对称

故 $f(x) = x^4 - 1$ 是偶函数

故选：A.

练6

答案：0

解答：

由题得 $f(-x) = f(x)$

$$\therefore x^2 + ax = x^2 - ax$$

$$\therefore 2ax = 0$$

$$\therefore a = 0$$

故答案为：0.

练7

答案：D

解答：

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(3 - 2a, a + 1)$ ，且函数 $f(x)$ 为奇函数

可得 $3 - 2a + a + 1 = 0$

解得 $a = 4$

故选：D.

练8

答案：A

解答：

$f(x) = \frac{1}{x} - x$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\text{又 } f(-x) = \frac{1}{-x} - (-x) = -\left(\frac{1}{x} - x\right) = -f(x)$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数，则其图象关于原点对称

故选：A.

练9

答案: A

解答:

由已知 $f(-1) = -f(1) = -2$

故选: A.

练10

答案: 0

解答:

$\because$ 函数 $f(x) = ax^3 + bx + 1$, $f(-1) = 2$

$\therefore f(-1) = a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1) + 1 = -a - b + 1 = 2$

$\therefore a + b = -1$

$\therefore f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1 + 1 = a + b + 1 = 0$

故答案为: 0.

练11

答案: D

解答:

由于函数 $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$ 的定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$

故函数的解析式即 $y = f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2-2} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, 显然满足 $f(-x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{-x} = -f(x)$

故函数为奇函数

由于函数 $f(x) = y = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}$ 的定义域 $\{x \mid x^2 = 1\} = \{\pm 1\}$ 显然既满足 $f(-x) = f(x)$ 又满足

$f(-x) = -f(x)$

故函数既为偶函数又为奇函数

由于函数 $y = f(x) = -2$, 显然满足 $f(-x) = -2 = f(x)$, 故函数为偶函数

由于函数 $y = f(x) = 2x + 1$, 由于 $f(-x) = -2x + 1$

显然, $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$

故函数不是奇函数、也不是偶函数

故选: D.

练12

答案: C

解答:

A. 由 $x - 2 \neq 0$, 解得 $x \neq 2$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, 显然其定义域不关于原点对称, 则 $f(x)$ 不是奇函数

所以不正确

B. 由 $\begin{cases} 1 - x \neq 0 \\ \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \end{cases}$ 解得 $-1 \leq x < 1$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1)$, 显然其定义域不关于原点对称, 则 $f(x)$ 不是偶函数

所以不正确

C. 由 $\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0 \\ |x+6| + |x-4| \neq 0 \end{cases}$, 解得 $-4 \leq x \leq 4$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4, 4]$, 显然其定义域关于原点对称, 且 $x+6 \geq 0$, $x-4 \leq 0$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{(x+6)+(4-x)} = \frac{1}{10} \sqrt{16-x^2}$$

$$\text{又因为, 有 } f(-x) = \frac{1}{10} \sqrt{16-(-x)^2} = \frac{1}{10} \sqrt{16-x^2} = f(x)$$

所以函数 $f(x)$ 是偶函数

所以正确

D. 显然函数 $f(x) = 1$ 的图象不关于原点对称

所以 $f(x) = 1$ 不是奇函数

所以不正确

故选: C.

练13

答案: C

解答:

$$\because f(x) = g(x) + 2, \quad f(2) = 3$$

$$\therefore f(2) = g(2) + 2 = 3$$

$$\therefore g(2) = 1$$

$\because g(x)$ 为奇函数

则

$$\begin{aligned} f(-2) &= g(-2) + 2 \\ &= -g(2) + 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

故选: C.

练14

答案: D

解答:

$$\because f(x) = ax^3 + \frac{b}{x} + 1$$

$\therefore f(x) - 1 = ax^3 + \frac{b}{x}$ 是奇函数

$\therefore f(2017) = -1$

$\therefore f(-2017) - 1 = -[f(2017) - 1] = -(-1 - 1) = 2$

则 $f(-2017) = 2 + 1 = 3$

故选: D.

练15

答案: C

解答:

常规解析:

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数

$\therefore f(x) = f(-x) = -(-x) + 1 = x + 1$

故选: C.

大招解析:

根据半区间求解解析式方法

当 $x < 0$ 时, $f(x) = -(-x) + 1 = x + 1$

故选: C.

练16

答案: B

解答:

设 $x < 0$, 则 $-x > 0$

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - x$

$\therefore f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x$

又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$

$\therefore f(x) = -f(-x) = -x^2 - x$

故选: B.

练17

答案: D

解答:

根据题意, 函数 $y = f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数

则 $f(-1) = f(1)$, $f(-\pi) = f(\pi)$

又由函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $1 < \sqrt{2} < \pi$

则有 $f(1) > f(\sqrt{2}) > f(\pi)$

则有 $f(-1) > f(\sqrt{2}) > f(-\pi)$

故选: D.

练18

答案: D

解答:

$$a^2 - 2a + 3 = (a - 1)^2 + 2 \geq 2$$

因为偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数

所以 $f(-1) = f(1)$

且 $f(-1) < f(a^2 - 2a + 3)$

故选: D.

练19

答案: A

解答:

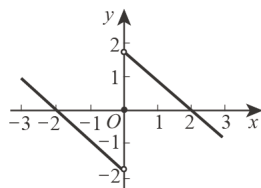
$\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $f(2) = 0$, 在 $(-\infty, 0)$ 是减函数

$\therefore f(-2) = -f(2) = 0$, $f(0) = 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 是减函数

函数图象示意图如图所示

$\therefore$ 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

故选: A.



练20

答案: B

解答:

$\because f(x)$ 是奇函数, $f(-3) = 0$

$\therefore f(-3) = -f(3) = 0$, 解 $f(3) = 0$

$\because$ 函数在 $(0, +\infty)$ 内是增函数

$\therefore$ 当 $0 < x < 3$ 时, $f(x) < 0$

当 $x > 3$ 时, $f(x) > 0$

$\because$ 函数 $f(x)$ 是奇函数

$\therefore$ 当 $-3 < x < 0$ 时, $f(x) > 0$

当 $x < -3$ 时, $f(x) < 0$

则不等式 $f(x) < 0$ 的解集是 $0 < x < 3$ 或 $x < -3$

故选: B.

练21

答案: A

解答:

$\therefore$ 对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$\therefore$ 令 $x = y = 0$ 得, $f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$

$\therefore f(0) = 0$

令 $y = -x$ 得, $f(x-x) = f(x) + f(-x) = f(0) = 0$

$\therefore f(-x) = -f(x)$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数

故选: A.

练22

答案: B

解答:

$\therefore$ 函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 是奇函数, 函数 $g(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 是偶函数

$\therefore f(-x) = -f(x), g(-x) = g(x)$

$\therefore f(-x) - g(-x) = -f(x) - g(x) \neq f(x) - g(x)$, 且 $f(-x) - g(-x) \neq -[f(x) - g(x)]$, 故 $f(x) - g(x)$ 是非奇非

偶函数, 故排除 A

根据 $f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x)$, 故 $f(x) \cdot g(x)$ 是奇函数, 故 B 正确

根据 $f[g(-x)] = f[g(x)]$, 故 $f[g(x)]$ 是偶函数, 故 C 错误

根据 $g[f(-x)] = g[-f(x)] = g[f(x)]$, 故 $g[f(x)]$ 为偶函数, 故 D 错误

故选: B.

练23

答案: $\frac{1}{x^2 - 1}$

解答:

$\therefore$ 函数 $f(x), g(x)$ 分别是偶函数、奇函数

$\therefore f(-x) = f(x), g(-x) = -g(x)$

令 x 取 $-x$, 代入 $f(x) + g(x) = \frac{1}{x-1}$ ①

$f(-x) + g(-x) = \frac{1}{-x-1}$

$$\text{即 } f(x) - g(x) = \frac{1}{-x-1} \text{ ②}$$

$$\text{由 ①② 解得, } f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{x^2-1}.$$

练24

答案: A

解答:

$$\text{由题意可得: } f(-x) + g(-x) = -f(x) + g(x) = e^{-x} \text{ ①}$$

$$f(x) + g(x) = e^x \text{ ②}$$

$$\text{①} - \text{② 可得 } -2f(x) = e^{-x} - e^x$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

故选: A.

练25

答案: B

解答:

根据题意, $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数

$$\text{则 } f(2-a) + f(1-2a) < 0 \Leftrightarrow f(2-a) < -f(1-2a) \Leftrightarrow f(2-a) < f(2a-1)$$

由于 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 则函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减

$$\text{则 } f(2-a) < f(2a-1) \Rightarrow 2-a > 2a-1$$

$$\text{解得 } a < 1$$

即 a 的取值范围是 $(-\infty, 1)$

故选: B.

练26

答案: A

解答:

$\therefore$ 偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 单调递增

$$\therefore \text{不等式 } f(2x-1) < f(-3) \text{ 等价于 } f(|2x-1|) < f(3)$$

$$\text{即 } |2x-1| < 3$$

$$\text{则 } -3 < 2x-1 < 3$$

$$\text{解得 } -1 < x < 2$$

故选: A.

第4讲 函数的对称性与周期性

练1

答案: D

解答:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ 的对称中心的坐标为 $(-1, 2)$

故选: D.

练2

答案: $(-2, 3)$

解答:

$$y = \frac{3x-1}{x+2} = \frac{3(x+2)-7}{x+2} = 3 - \frac{7}{x+2}$$

则函数的对称中心为 $(-2, 3)$

故答案为: $(-2, 3)$.

练3

答案: C

解答:

设点 (x, y) 是函数图象上的一点, 则有 $y = f(x)$

所以点 (x, y) 关于 $(1, -1)$ 的对称点为 $(2-x, -2-y)$

因为 $\forall x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) + f(2-x) + 2 = 0$

所以 $f(2-x) = -2 - f(x) = -2 - y$

所以点 $(2-x, -2-y)$ 也在函数的图象上

所以函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(1, -1)$ 对称

故选: C.

练4

答案: $(2, 0)$

解答:

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 关于点 (a, b) 对称的充要条件是 $f(x) + f(2a-x) = 2b$

$$\therefore f(x+2) = -f(2-x)$$

$$\therefore f(x+2) + f(2-x) = 0$$

$$\text{即 } f(x) + f(4-x) = 0$$

$$\therefore 2a = 4, 2b = 0$$

$$\text{即 } a = 2, b = 0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 关于点 $(2, 0)$ 对称

故答案为: $(2, 0)$.

练5

答案: D

解答:

$$\text{由于 } f(x) = -f(x+6)$$

$$\text{则 } f(x+6) = -f[(x+6)+6] = -f(x+12)$$

$$\text{所以 } f(x) = f(x+12)$$

$$\text{则 } T = 12$$

故选: D.

练6

答案: B

解答:

$$\text{由题意可得 } f(x+2) = f[(x+1)+1] = -f(x+1) = f(x)$$

由周期性的定义可得 $f(x)$ 的周期 $T = 2$

故选: B.

练7

答案: B

解答:

$\therefore f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期函数, 最小正周期是 π

$$\therefore f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = f\left(\frac{5\pi}{3} - \pi\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故选: B.

练8

答案: 5

解答:

$\therefore$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x+2)$

$\therefore f(x)$ 为周期为 2 的周期函数

$\because x \in [3, 5]$ 时, $f(x) = |2x - 1|$

$\therefore f(-1) = f(-1 + 2 \times 2) = f(3) = |2 \times 3 - 1| = 5$

故答案为: 5.

练9

答案: 4

解答:

$\because \forall x \in \mathbf{R}, f(x+2) = f(x-2)$

$\therefore f(x+4) = f(x)$, 即 $f(x)$ 是最小正周期为 4 的函数

$\therefore f(2018) = f(4 \times 504 + 2) = f(2)$

$\because x \in [0, 4)$ 时, $f(x) = x^2$

$\therefore f(2) = 2^2 = 4$

$\therefore f(2018) = 4$

故答案为: 4.

练10

答案: -3

解答:

奇函数 $y = f(x)$ 的图象关于 $x = 2$ 对称, 故 $f(x) = f(4 - x)$

$\therefore f(1) = 3$

$\therefore f(-3) = -f(3) = -f(4 - 3) = -f(1) = -3$

故答案为: -3.

练11

答案: 1

解答:

$\because f(x)$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称, 且 $f(0) = 2$

$\therefore f(2) = 0$

$\therefore 2a - 2 = 0$, 即 $a = 1$

故答案为: 1.

练12

答案: D

解答:

$$\text{由 } f(1-x) = f(1+x)$$

可知二次函数 $f(x) = x^2 + ax$ 的对称轴方程为 $x = -\frac{a}{2} = 1$, 即 $a = -2$

故选: D.

练13

答案: A

解答:

$\because$ 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 对任意实数 x 都有 $f(2+x) = f(2-x)$ 成立

$\therefore$ 函数图象关于 $x = 2$ 对称

当 $a > 0$ 时 $f(2)$ 最小

由 $2-1 < 4-2$, 得: $f(1) < f(4)$

故选: A.

练14

答案: $(0, 2)$

解答:

因为 $f(2-x) = f(x)$

所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称

因为 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递增

因为 $f(0) = 0$

所以 $f(2) = f(2-0) = f(0) = 0$

所以由 $f(x) > 0$ 可得 $0 < x < 2$

所以不等式的解集为 $(0, 2)$

故答案为: $(0, 2)$.

练15

答案: B

解答:

A 选项: $f(x) = \frac{2009}{f(x+2)} = \frac{2009}{\frac{2009}{f(x+4)}} = f(x+4)$, 周期为 4

C选项: $f(x+1) = f(x) + f(x+2) = f(x) + f(x+1) + f(x+3)$

解 $f(x) = -f(x+3) = f(x+6)$, 周期是6

D选项: $f(x) = f(2-x) = -f(x-2) = f(x-4)$, 周期是4

B选项: 由 $f(x) = f(4-x)$, 可知函数关于 $x=2$ 对称, 但不能得出其为周期函数

故选: B.

练16

答案: B

解答:

由题意得, $f(x)$ 的图形关于 $x=a$ 和 $x=b$ 对称

$$\therefore f(x) = f(2a-x), f(x) = f(2b-x)$$

$$\therefore f(2a-x) = f(2b-x)$$

$$\therefore f(2a-x) = f(2a-x+2b-2a)$$

$$\therefore f(x) = f(x+2b-2a)$$

$$\therefore f(x) \text{ 的周期为 } 2b-2a$$

故选: B.

练17

答案: -2

解答:

$$\text{因为 } f(x+3) = -\frac{1}{f(x)}$$

$$\text{所以 } f(x+6) = -\frac{1}{f(x+3)} = f(x)$$

所以 $f(x)$ 是周期为6的函数

$$\text{所以 } f(2008) = f(6 \times 334 + 4) = f(4) = -\frac{1}{f(1)} = -2$$

故答案为: -2.

练18

答案: A

解答:

$$\text{由条件 } f(2) = \frac{1}{4} \text{ 以及 } f(x+2) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \text{ 得, } f(4) = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$f(6) = \frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{4}; f(8) = \frac{3}{5}, f(10) = \frac{1}{4}, \dots$$

即偶数中4的倍数对应的为 $\frac{3}{5}$ ，不是4的倍数对应的值为 $\frac{1}{4}$

而2010不能被4整除，故 $f(2010) = \frac{1}{4}$

故选：A.

练19

答案： $\frac{1}{2}$

解答：

$\because f(x)$ 是周期为2的偶函数

$$\therefore f\left(-\frac{5}{2}\right) = f\left(-\frac{5}{2} + 2\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\because$ 当 $0 \leq x \leq 1$ 时， $f(x) = 2x(1-x)$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{故 } f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

练20

答案：A

解答：

$\because f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上周期为5的奇函数，且满足 $f(1) = 1$ ， $f(2) = 2$

$$\therefore f(23) + f(-14) = f(25 - 2) + f(-15 + 1) = f(-2) + f(1)$$

$$= -f(2) + f(1) = -2 + 1 = -1$$

故选：A.

练21

答案：A

解答：

$\because$ 二次函数 $f(x) = ax^2 + 2a$ 是区间 $[-a, a^2]$ 上的偶函数

$$\therefore \begin{cases} a \neq 0 \\ -a = -a^2 \end{cases}$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 2$$

$$\therefore g(x) = f(x-1) = (x-1)^2 + 2$$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

$$\therefore g(0) = g(2)$$

$\therefore$ 函数 $g(x) = (x-1)^2 + 2$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增

$$\therefore g\left(\frac{3}{2}\right) < g(2) < g(3)$$

$$\therefore g\left(\frac{3}{2}\right) < g(0) < g(3)$$

故选: A.

练22

答案: A

解答:

$\therefore y = f(x+2)$ 是奇函数

$\therefore y = f(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称

$\therefore$ 当 $x > 2$ 时, $f(x)$ 单调递增

$\therefore$ 当 $x < 2$ 时, $f(x)$ 单调递增

$\therefore x_1 + x_2 > 4$, 不妨设 $x_1 > 2$, $x_2 < 2$

$$\therefore (x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) < 0$$

$$\therefore x_1 - 2 > 2 - x_2, \text{ 即 } |x_1 - 2| > |2 - x_2|$$

$$\text{又 } f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$$

$\therefore$ 结合函数对称性可知 $f(x_1) + f(x_2) > 0$

故选: A.

练23

答案: C

解答:

$\therefore f(x+2) = -f(x)$, $f(x)$ 是奇函数

$$\therefore f\left(\frac{3}{2}\right) = -f\left(-\frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2} + 2\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\therefore$ 奇函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是减函数

$\therefore f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为减函数

$$\text{又 } 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{4} > -\frac{1}{4} > -1$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{4}\right) < f\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore f\left(\frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{1}{4}\right) < f\left(-\frac{1}{4}\right)$$

故选: C.

练24

答案: D

解答:

因为该二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为正数, 所以图象开口向上

又对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x) = f(4-x)$ 成立, 所以对称轴为 $x = 2$

因此该函数在 $(-\infty, 2)$ 上递减, 在 $(2, +\infty)$ 上递增

$$\text{而 } 2 - a^2 \leq 2, \text{ 且 } 1 + a - a^2 = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} < 2$$

所以要使 $f(2 - a^2) < f(1 + a - a^2)$

只需 $2 - a^2 > 1 + a - a^2$, 解得 $a < 1$

故选: D.

练25

答案: B

解答:

已知函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$

即为 $f(x) + f(-x) = 2$

可得 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 对称

函数 $y = \frac{x+1}{x}$, 即 $y = 1 + \frac{1}{x}$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 对称

即有 (x_1, y_1) 为交点, 即有 $(-x_1, 2 - y_1)$ 也为交点

即有 (x_2, y_2) 为交点, 即有 $(-x_2, 2 - y_2)$ 也为交点

...

则有 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_m + y_m)$

$$= \frac{1}{2} [(x_1 + y_1) + (-x_1 + 2 - y_1) + (x_2 + y_2) + (-x_2 + 2 - y_2) + \cdots + (x_m + y_m) + (-x_m + 2 - y_m)] = m$$

故选: B.

练26

答案: D

解答:

$$\because f(x) = -f\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$= -[-f(x+3)]$$

$$= f(x+3)$$

$\therefore$ 函数 $y = f(x)$ 周期为 3

所以 $f(1) = f(-1) = 1$

$f(2) = f(-1) = 1$

$f(3) = f(0) = -2$

...

$2012 = 3 \times 670 + 2$

所以 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2012)$

$= 0 + f(1) + f(2)$

$= 1 + 1$

$= 2$

故选：D.

第 5 讲 指数函数

练1

答案: $\frac{1}{4}$

解答:

$$64^{-\frac{1}{3}} = 4^{3 \times (-\frac{1}{3})} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

故答案为: $\frac{1}{4}$.

练2

答案: A

解答:

根式 $\sqrt[5]{a^{-3}}$ 化为分数指数幂是 $a^{-\frac{3}{5}}$

故选: A.

练3

答案: A

解答:

$$a^2 a^3 = a^{2+3} = a^5$$

$$(-a^2)^3 = -a^6 \neq (-a^3)^2 = a^6$$

$$(\sqrt{a} - 1)^0 = 1, \text{ 若成立, 需要满足 } a \neq 1$$

$$(-a^2)^3 = -a^6$$

故选: A.

练4

答案: 23

解答:

$$\text{由题意得 } (x + x^{-1})^2 = 5^2 = 25$$

$$\text{所以 } x^2 + 2 + x^{-2} = 25$$

$$\text{所以 } x^2 + x^{-2} = 23$$

故答案为: 23.

练5

答案：D

解答：

根据指数函数的定义：形如 $y = a^x$ （ $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ）的函数叫做指数函数

结合选项从而可判断选项D正确

故选：D.

练6

答案：C

解答：

只有①⑤是指数函数

③ $y = 2^{x+1} = 2 \times 2^x$ 是2与指数函数 $y = 2^x$ 的乘积

②④中底数 x 不是常数，不符合指数函数的定义

所以指数函数的个数是2

故选：C.

练7

答案： $\frac{1}{2}$

解答：

$\because$ 指数函数 $f(x) = a^x$ 的图象经过点 $(3, 8)$

$$\therefore a^3 = 8$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore f(x) = 2^x$$

$$\therefore f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

练8

答案： $(-1, 1)$

解答：

函数 $y = a^{x+1}$ （ $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ）满足当 $x = -1$ 时， $y = 1$

所以函数 $y = a^{x+1}$ （ $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ）的图象恒过的定点为 $(-1, 1)$

故答案为： $(-1, 1)$.

练9

答案: C

解答:

由指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象恒过 $(0, 1)$ 点

而要得到函数 $y = 2 + a^{x-1}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象

可将指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象向右平移 1 个单位, 再向上平移 2 个单位

则 $(0, 1)$ 点平移后得到 $(1, 3)$ 点

则 P 点的坐标是 $(1, 3)$

故选: C.

练10

答案: $3^{0.8} > 3^{0.7}$

解答:

因为 $y = 3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 且 $0.8 > 0.7$

所以 $3^{0.8} > 3^{0.7}$

故答案为: $3^{0.8} > 3^{0.7}$.

练11

答案: B

解答:

由题意得 $\sqrt[3]{-2\sqrt{2}} = -\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = -\left(2 \times 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = -2^{\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}} = -2^{\frac{1}{2}}$

故选: B.

练12

答案: $\frac{4}{5}$

解答:

$\because 3^a = 2, 3^b = 5$

$\therefore 3^{2a-b} = 3^a \times 3^a \div 3^b = 2 \times 2 \div 5 = \frac{4}{5}$

故答案为: $\frac{4}{5}$.

练13

答案: A

解答：

显然 $a > 0$

$$\text{所以 } \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = a + 2 + a^{-1} = a + \frac{1}{a} + 2 = 9$$

$$\text{所以 } a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$$

故选：A.

练14

答案：A

解答：

因为 $0 < a < 1$ ，则函数 $y = a^x$ 单调递减，且过第一、二象限

而 $f(x) = a^x + b$ 的图象是由 $y = a^x$ 的图象向上平移 b 个单位得到的，故其一定过第一、二象限

故选：A.

练15

答案：B

解答：

函数 $y = x + a$ 和 $y = a^x$

当 $a > 1$ 时， $y = x + a$ 单调递增， $y = a^x$ 单调递增

且直线 $y = x + a$ 与 y 轴交点为 $(0, a)$ ，在 $(0, 1)$ 上边，B 正确，C 不正确

当 $0 < a < 1$ 时，一次函数单调递增，指数函数单调递减

且直线 $y = x + a$ 在 y 轴交点在 $(0, 1)$ 下边， $y = a^x$ 恒过定点 $(0, 1)$ ，A，D 不正确

故选：B.

练16

答案：B

解答：

$$\text{设 } t = x^2 - 2x, \text{ 则 } g(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

$$\text{易知 } g(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t \text{ 是单调递减函数}$$

则由复合函数的单调性可知：函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$ 的减区间即为 $t = x^2 - 2x$ 的增区间

由二次函数的性质可得 $t = x^2 - 2x$ 的增区间为 $(1, +\infty)$

故选：B.

练17

答案: D

解答:

令 $t = -x^2 + 4x$, 则 $y = a^t$, $a > 1$, 故本题即求函数 $t = -x^2 + 4x$ 的增区间

再利用二次函数的性质可得函数 $t = -x^2 + 4x$ 的增区间为 $(-\infty, 2)$

故选: D.

练18

答案: A

解答:

$$y_1 = 4^{0.9} = 2^{1.8}$$

$$y_2 = 8^{0.48} = 2^{1.44}$$

$$y_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1.5} = 2^{-1.5}$$

故 $y_1 > y_2 > y_3$

故选: A.

练19

答案: C

解答:

$\because y = 0.3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数, $2 > 1.5 > 0$

故 $a = 0.3^2 < b = 0.3^{1.5} < 0.3^0 = 1$

$\because y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, $0.3 > 0$

故 $c = 2^{0.3} > 2^0 = 1$

故 $c > b > a$

故选: C.

练20

答案: $[3, +\infty)$

解答:

由 $2^x - 8 \geq 0$, 得 $2^x \geq 8$, 即 $x \geq 3$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \sqrt{2^x - 8}$ 的定义域为: $[3, +\infty)$

故答案为: $[3, +\infty)$.

练21

答案：C

解答：

$$\because a^b + a^{-b} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore a^{2b} + a^{-2b} = 8 - 2 = 6$$

$$\therefore (a^b - a^{-b})^2 = a^{2b} + a^{-2b} - 2 = 4$$

$$\because 0 < a < 1, b > 0$$

$$\therefore a^b < a^{-b}$$

$$\text{则 } a^b - a^{-b} = -2$$

故选：C.

练22

答案：A

解答：

根据指数函数 $y = \left(\frac{b}{a}\right)^x$ 可知 a, b 同号且不相等

则二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的对称轴 $x = -\frac{b}{2a} < 0$ 可排除B与D

观察选项C： $a - b > 0, a < 0$

$\therefore \frac{b}{a} > 1$ ，则指数函数单调递增，故C错误

故选：A.

练23

答案：A

解答：

由指数函数的性质可知： $0 < a < 1, b > 1, c > 1$

$$\text{又 } (3^{0.2})^{10} = 3^2 = 9, (2^{0.3})^{10} = 2^3 = 8$$

所以 $b > c$

$$\therefore a < c < b$$

故选：A.

练24

答案：B

解答：

构造函数 $f(x) = 3^x - 5^{-x}$

$\because y = 3^x$ 为增函数, $y = 5^{-x}$ 为减函数

由函数单调性的性质“增”-“减”=“增”得到函数 $f(x) = 3^x - 5^{-x}$ 为增函数

又 $\because 3^x - 3^{-y} \geq 5^{-x} - 5^y$

即 $3^x - 5^{-x} \geq 3^{-y} - 5^y$

故 $x \geq -y$

即 $x + y \geq 0$

故选: B.

练25

答案: $[-1, 0]$

解答:

$\because f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$

$\therefore 2^{x^2-2ax-a} - 1 \geq 0$ 恒成立

即 $x^2 - 2ax - a \geq 0$ 恒成立

$\therefore \Delta = 4a^2 + 4a \leq 0$, 解得 $-1 \leq a \leq 0$

故答案为: $[-1, 0]$.

练26

答案: C

解答:

函数 $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x - a^x$, $a > 1$

可得 $f(-x) = a^x - a^{-x} = -f(x)$

则 $f(x)$ 为奇函数

由 $y = a^x$ 递增, $y = a^{-x}$ 递减

可得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减

故选: C.

第6讲 对数函数

练1

答案: D

解答:

$$\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

故选: D.

练2

答案: 1

解答:

$$\text{因为 } e^{\ln 1} = e^{\log_e 1} = 1$$

故答案为: 1.

练3

答案: D

解答:

由题意, 根据对数的运算法则可得 $\log_6 3 + \log_6 2 = \log_6 6 = 1$

故选: D.

练4

答案: C

解答:

根据对数函数的定义可得: 只有 $y = \ln x$ 为对数函数

故选: C.

练5

答案: C

解答:

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象过点 $\left(4, \frac{7}{2}\right)$

$$\therefore \frac{7}{2} = \log_a (4 - 2) + 3, \text{ 则 } \log_a 2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a^{\frac{1}{2}} = 2, \text{ 解得 } a = 4$$

故选: C.

练6

答案: A

解答:

要使函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x - 1)$ 有意义, 则 $2x - 1 > 0$

解得 $x > \frac{1}{2}$

即函数的定义域为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

故选: A.

练7

答案: $(1, 2]$

解答:

由题意得

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases}$$

解得: $1 < x \leq 2$

故函数的定义域是 $(1, 2]$

故答案为: $(1, 2]$.

练8

答案: B

解答:

函数 $y = \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$

$y' = \frac{1}{x}$, 令 $y' > 0$, 解得 $x > 0$

所以函数 $y = \ln x$ 的单调递增区间是 $(0, +\infty)$

故选: B.

练9

答案: D

解答:

$\because a = \lg 2, b = \lg 3$

$\therefore a = \lg 2 < b = \lg 3 < \lg 10 = 1$

故选：D.

练10

答案：A

解答：

依题意，函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}} b < \log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} c$$

$$\therefore b > a > c > 0$$

$y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

$$\therefore 2^b > 2^a > 2^c$$

故选：A.

练11

答案：D

解答：

$$\lg a - 2 \lg 2 = \lg a - \lg 4 = \lg \frac{a}{4} = 1$$

$$\therefore \frac{a}{4} = 10$$

$$\therefore a = 40$$

故选：D.

练12

答案：C

解答：

根据 $3^a = 4$ ，得 $a = \log_3 4$

根据对数的运算性质得到， $a = \log_3 4 = \log_3 2^2 = 2 \log_3 2$

$$\therefore \log_3 2 = \frac{a}{2}$$

故选：C.

练13

答案：1

解答：

$$\therefore \log_a x = 2, \log_b x = 3, \log_c x = 6$$

$$\therefore \frac{\lg x}{\lg a} = 2, \frac{\lg x}{\lg b} = 3, \frac{\lg x}{\lg c} = 6, \lg x \neq 0$$

$$\text{则 } \log_{abc} x = \frac{\lg x}{\lg a + \lg b + \lg c} = \frac{\lg x}{\frac{\lg x}{2} + \frac{\lg x}{3} + \frac{\lg x}{6}} = 1$$

故答案为: 1.

练14

答案: $[3, +\infty)$

解答:

$$\text{由题意得, } \begin{cases} |x-2|-1 \geq 0 \\ x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases}$$

解得: $x \in [3, +\infty)$

故函数 $f(x) = \frac{\sqrt{|x-2|-1}}{\log_2(x-1)}$ 的定义域为 $[3, +\infty)$

故答案为: $[3, +\infty)$.

练15

答案: C

解答:

根据对数函数的性质, 显然 C_1 , C_2 , C_3 对应的 a 的值分别为 $\frac{1}{2}$, 2, 3

故选: C.

练16

答案: B

解答:

函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

$$\text{令 } u = x^2 - 2x - 3$$

$$\text{则 } y = \log_{\frac{1}{2}} u$$

由复合函数的单调性可知, $y = \log_{\frac{1}{2}} u$ 单调递减

则 $u = x^2 - 2x - 3$ 单调递增时, 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$ 单调递减

所以 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$ 的单调递减区间为 $(3, +\infty)$

故选: B.

练17

答案: D

解答：

令 $t = x^2 - 5x + 6 > 0$ ，求得 $x < 2$ 或 $x > 3$ ，故函数的定义域为 $\{x \mid x < 2 \text{ 或 } x > 3\}$

由复合函数单调性可知， $y = \lg t$ 单调递增

则 $t = x^2 - 5x + 6$ 单调递减时，函数 $y = \lg(x^2 - 5x + 6)$ 单调递减

再利用二次函数的性质可得函数 t 在定义域内的减区间为 $(-\infty, 2)$

故选：D.

练18

答案： $[3, +\infty)$

解答：

设 $t = x^2 - 6x + 17 = (x - 3)^2 + 8$ ，则 $t \geq 8$

则函数 $y = \log_2 t$ ， $t \in [8, +\infty)$

$\therefore y = \log_2 t$ 在 $t \in [8, +\infty)$ 上单调递增

$\therefore$ 当 $t = 8$ 时，最小值为 $\log_2 8 = 3$

故答案为： $[3, +\infty)$.

练19

答案： C

解答：

$$a = \log_{\sqrt{2}} 0.7 = \log_2 0.49$$

$$c = \log_4 0.49 = \log_2 0.7$$

$y = \log_2 x$ ($x > 0$) 是单调递增函数，而 $0.49 < 0.6 < 0.7$

$$\therefore a < b < c$$

故选： C.

练20

答案： D

解答：

因为 $0 < 0.3 < 1$

所以函数 $y = \log_{0.3} x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是减函数

因为 $1 < 6 < 7$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} > 0 = \log_{0.3} 1 > \log_{0.3} 6 > \log_{0.3} 7$$

所以 $c > b > a$

故选： D.

练21

答案: C

解答:

由题意可得 $x = \log_{2.5} 1000$, $y = \log_{0.25} 1000$

$$\text{所以 } \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \log_{1000} 2.5 - \log_{1000} 0.25 = \log_{1000} 10 = \log_{10^3} 10 = \frac{1}{3}$$

故选: C.

练22

答案: B

解答:

令 $t = -x^2 + ax + 3$, 则原函数化为 $y = \log_2 t$ $\because y = \log_2 t$ 为增函数则由题意可得 $t = -x^2 + ax + 3$ 在 $(2, 4)$ 是单调递减对称轴为 $x = \frac{a}{2}$

$$\therefore \frac{a}{2} \leq 2 \text{ 且 } -4^2 + 4a + 3 \geq 0$$

$$\text{解得: } \frac{13}{4} \leq a \leq 4$$

$$\therefore a \text{ 的范围是 } \left[\frac{13}{4}, 4 \right]$$

故选: B.

练23答案: $[-2, +\infty)$

解答:

 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x + 5)$ 可看作 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 和 $t = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 > 0$ 两个函数的复合形式 $\because y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 在 $t > 0$ 上单调递减 $t = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增 $\therefore$ 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x + 5)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递减 $\therefore a \geq -2$, 即 a 的取值范围是 $[-2, +\infty)$ 故答案为: $[-2, +\infty)$.**练24**

答案: D

解答:

要使函数 $y = \lg(mx^2 + 2x + 1)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

只需 $u(x) = mx^2 + 2x + 1$ 的值域包含 $(0, +\infty)$

当 $m = 0$ 时, $u(x) = 2x + 1$, 满足题意

当 $m \neq 0$ 时, 依题意可得 $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 4 - 4m \geq 0 \end{cases}$

解得: $0 < m \leq 1$

所以 m 的取值范围是 $[0, 1]$

故选: D.

练25

答案: B

解答:

$\log_{1.4} 0.7 < 0$, $1.4^{0.7} > 1$, $0 < 0.7^{1.4} < 1$

故选: B.

练26

答案: -2

解答:

因为 $f(x)$ 为奇函数

所以 $f(-x) = -f(x)$

于是 $\ln \frac{1-ax}{1-2x} = -\ln \frac{1+ax}{1+2x} = \ln \frac{1+2x}{1+ax}$

从而 $\frac{1-ax}{1-2x} = \frac{1+2x}{1+ax}$

所以 $1 - a^2 x^2 = 1 - 4x^2$

故 $a^2 = 4$

因为 $a \neq 2$

所以 $a = -2$

当 $a = -2$ 时, $f(x) = \ln \frac{1-2x}{1+2x}$

令 $\frac{1-2x}{1+2x} > 0$, 得 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

即函数的定义域为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 关于原点对称

又由上面的推导知, 满足 $f(-x) = -f(x)$

故 $f(x)$ 为奇函数

故答案为: -2 .

第 7 讲 幂函数与零点问题

练 1

答案: A

解答:

根据幂函数的定义知, $y = x^2$ 是幂函数

$y = -x^2$ 不是幂函数

$y = 2^x$ 是指数函数, 不是幂函数

$y = 2x^2$ 不是幂函数

故选: A.

练 2

答案: B

解答:

设 $y = f(x) = x^a$

$\because$ 其图象过点 $(2, 4)$

$\therefore 2^a = 4$, 即 $a = 2$

故 $y = f(x) = x^2$

故选: B.

练 3

答案: D

解答:

A. $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 过点 $(0, 0)$, 为非奇非偶函数. 不成立

B. 函数 $y = x^2$ 为偶函数, 不成立

C. $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$

所以函数不过点 $(0, 0)$, 不成立

D. $y = x^3$ 是奇函数, 且过点 $(0, 0)$, 成立

故选: D.

练 4

答案: $0.3^{\frac{1}{2}} < 2.1^{\frac{1}{2}} < 2.2^{\frac{1}{2}}$

解答:

因为函数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ 在 $[0, +\infty)$ 上是递增函数

所以 $f(0.3) < f(2.1) < f(2.2)$, 即 $0.3^{\frac{1}{2}} < 2.1^{\frac{1}{2}} < 2.2^{\frac{1}{2}}$

故答案为: $0.3^{\frac{1}{2}} < 2.1^{\frac{1}{2}} < 2.2^{\frac{1}{2}}$.

练5

答案: $\frac{1}{2}$

解答:

令 $2x - 1 = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$

即函数 $y = 2x - 1$ 的零点是 $\frac{1}{2}$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

练6

答案: B

解答:

由 $y = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$ 得 $x = 3$ 或 $x = -1$

所以函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的零点是 3 或 -1

故选: B.

练7

答案: A

解答:

因为函数的零点是函数图象与 x 轴交点的横坐标

因此, 若函数图象与 x 轴没有交点, 则函数没有零点

观察四个图象, 可知 A 中的图象对应的函数没有零点

故选: A.

练8

答案: B

解答:

由 $-2x + m = 0$, 得 $x = \frac{m}{2} = 3$

$\therefore m = 6$

故选: B.

练9

答案: B

解答:

$\because$ 一元二次方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 没有实数根

$$\therefore \Delta = 16 - 4m < 0$$

即 $m > 4$

故选: B.

练10

答案: C

解答:

函数 $y = x - \frac{4}{x}$ 的零点个数是方程 $x - \frac{4}{x} = 0$ 的解的个数

可得 $x^2 - 4 = 0$, 解得 $x = \pm 2$

所以函数的零点个数有 2 个

故选: C.

练11

答案: C

解答:

因为 $f(x) = (a^2 - a - 1)x^{\frac{1}{a-2}}$ 为幂函数

所以 $a^2 - a - 1 = 1$

所以 $a = 2$ 或 -1

又 $a - 2 \neq 0$

所以 $a = -1$

故选: C.

练12

答案: A

解答:

当 $a = -1$ 时, $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ 为奇函数, 但值域为 $\{x|x \neq 0\}$, 不满足条件

当 $a = 1$ 时, $y = x$ 为奇函数, 值域为 $\mathbf{R}$, 满足条件

当 $a = 2$ 时, $y = x^2$ 为偶函数, 值域为 $\{x|x \geq 0\}$, 不满足条件

当 $a = 3$ 时, $y = x^3$ 为奇函数, 值域为 $\mathbf{R}$, 满足条件

故选: A.

练13

答案: A

解答:

$\because$ 幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{1-m}$ 是偶函数

$\therefore m^2 - m - 1 = 1$ 且 $1 - m$ 是偶数

解得 $m = -1$

故选: A.

练14

答案: C

解答:

A. $1.3^{\frac{1}{2}}$ 和 $1.5^{\frac{1}{2}}$ 看作 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的两个函数值

$\because y = x^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

$\therefore 1.3^{\frac{1}{2}} < 1.5^{\frac{1}{2}}$

所以不正确

B. $3.14^{\frac{1}{3}}$ 和 $\pi^{\frac{1}{3}}$ 看作 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的两个函数值

$\because y = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

$\therefore 3.14^{\frac{1}{3}} < \pi^{\frac{1}{3}}$

所以不正确

D. $(-0.5)^{-1}$ 和 $(-0.6)^{-1}$ 看作 $y = x^{-1}$ 的两个函数值

$\because y = x^{-1}$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减

$\therefore (-0.5)^{-1} < (-0.6)^{-1}$

所以不正确

故选: C.

练15

答案: D

解答:

利用幂函数 $y = x^{\frac{2}{5}}$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增

所以 $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}} > c = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$

由于 $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}} < 1 = b$

则 $b > a > c$

故选: D.

练16

答案: B

解答:

$\because f(1) = 2 - 3 < 0, f(2) = 4 - \frac{3}{2} > 0$, 且函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续且单调递增

$\therefore$ 函数 $f(x) = 2^x - \frac{3}{x}$ 的零点所在的区间为 $(1, 2)$

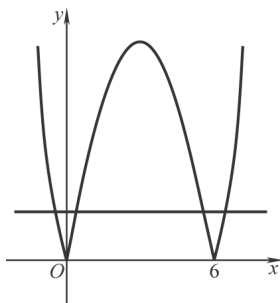
故选: B.

练17

答案: A

解答:

由函数的图象可得, 显然有 4 个交点



故选: A.

练18

答案: 1

解答:

方程 $e^x \ln x = 1$ 解的个数

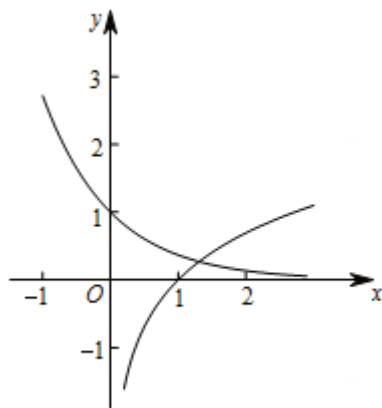
即为 $y = \ln x$ 和 $y = e^{-x}$ 的图象的交点个数

作出 $y = \ln x$ 和 $y = e^{-x}$ 的草图

观察可得图象有 1 个交点

则方程 $e^x \ln x = 1$ 解的个数为 1

故答案为: 1.

**练19**

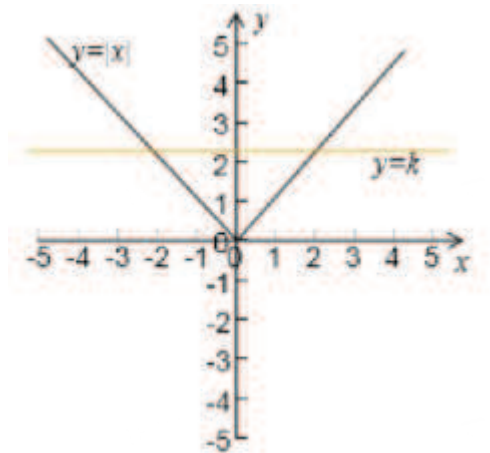
答案: B

解答:

$\because$ 函数 $f(x) = |x| - k$ 有两个零点

$\therefore$ 函数 $y = |x|$ 的图象与函数 $y = k$ 的图象有两个交点, 如图所示

数形结合可得, 当 $k > 0$ 时, 函数 $y = |x|$ 的图象与函数 $y = k$ 的图象有两个交点, 故 k 的范围是 $(0, +\infty)$



故选: B.

练20

答案: B

解答:

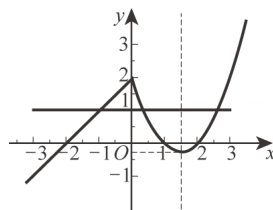
函数 $g(x) = f(x) - a$ 恰有三个不同的零点, 即 $y = f(x)$ 和 $y = a$ 恰有三个不同的交点

画出函数 $f(x)$ 的图象, 如图所示

当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 的最小值是 $-\frac{1}{4}$

结合图象可知, $-\frac{1}{4} < a < 2$

故选: B.



练21

答案: C

解答:

$\therefore$ 幂函数 $y = x^{m^2-2m-3}$ ($m \in \mathbf{Z}$) 的图象与 x 轴, y 轴没有交点, 且关于 y 轴对称

$\therefore m^2 - 2m - 3 \leq 0$ 且 $m^2 - 2m - 3$ 为偶数 ($m \in \mathbf{Z}$)

由 $m^2 - 2m - 3 \leq 0$ 得: $-1 \leq m \leq 3$, 又 $m \in \mathbf{Z}$

$\therefore m = -1, 0, 1, 2, 3$

当 $m = -1$ 时, $m^2 - 2m - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$, 为偶数, 符合题意

当 $m = 0$ 时, $m^2 - 2m - 3 = -3$, 为奇数, 不符合题意

当 $m = 1$ 时, $m^2 - 2m - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$, 为偶数, 符合题意

当 $m = 2$ 时, $m^2 - 2m - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$, 为奇数, 不符合题意

当 $m = 3$ 时, $m^2 - 2m - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$, 为偶数, 符合题意

综上所述, $m = -1, 1, 3$

故选: C.

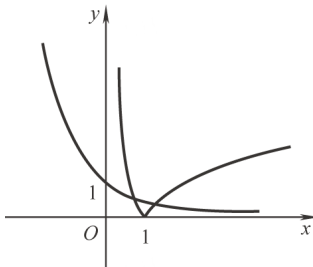
练22

答案: B

解答:

令 $f(x) = 2^x |\log_{0.5} x| - 1 = 0 \Rightarrow |\log_{0.5} x| = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, 等价于函数 $y = |\log_{0.5} x|$ 与 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的交点个数, 作图如下可

得两个交点



故 $f(x) = 2^x |\log_{0.5} x| - 1$ 有两个零点

故选: B.

练23

答案: 2

解答:

根据题意, 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ -\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 2^x$

若函数 $F(x) = f(x) + x = 0$, 即 $f(x) = -x$, 则有 $2^x = -x$

因为函数 $y = 2^x$ 与 $y = -x$ 的图象有 1 个交点

所以此时函数 $F(x) = f(x) + x$ 有 1 个零点

当 $x > 0$ 时, $f(x) = -\frac{1}{x}$

若函数 $F(x) = f(x) + x = 0$, 即 $f(x) = -x$, 则有 $\frac{1}{x} = x$

解得 $x = 1$

此时函数 $F(x) = f(x) + x$ 有 1 个零点

综上: 函数 $F(x) = f(x) + x$ 的零点个数是 2

故答案为: 2.

练24

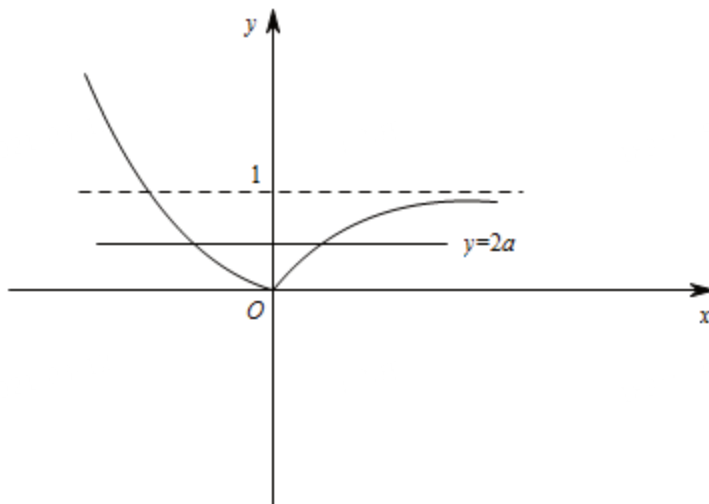
答案: A

解答：

由题意可得 $f(x) = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^x - 1 \right| - 2a = 0$ ，即 $\left| \left(\frac{1}{2} \right)^x - 1 \right| = 2a$

函数 $f(x) = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^x - 1 \right| - 2a$ 有两个零点，则函数 $y = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^x - 1 \right|$ 与 $y = 2a$ 的图象有两个交点

作出图象，如图所示



则 $0 < 2a < 1$

练25

答案：A

解答：

函数 $h(x) = f(x) - mx + 2$ 有三个不同的零点

即为 $f(x) - mx + 2 = 0$ 有三个不同的实根

可令 $y = f(x)$ ， $y = g(x) = mx - 2$

分别画出 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图象

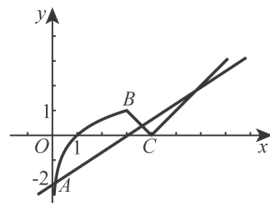
其中 $A(0, -2)$ ， $B(3, 1)$ ， $C(4, 0)$

则 $g(x)$ 的图象介于直线 AB 和 AC 之间

则可得： $k_{AC} < m < k_{AB}$

可得 $\frac{1}{2} < m < 1$

故选：A.



练26

答案: C

解答:

方程 $f^2(x) - f(x) = 0$ 可解出 $f(x) = 0$ 或 $f(x) = 1$

方程 $f^2(x) - f(x) = 0$ 的不相等的实根个数

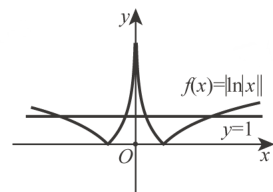
即 $f(x) = 0$ 或 $f(x) = 1$ 的所有不相等的根的个数的和

方程的根的个数与两个函数 $y = 0$, $y = 1$ 的图象与函数 $f(x)$ 的图象的交点个数相同

由图象可知, $y = 1$ 的图象与函数 $f(x)$ 的图象的交点个数有四个, $y = 0$ 的图象与函数 $f(x)$ 的图象的交点个数有三个

故方程 $f^2(x) - f(x) = 0$ 有七个解

故选: C.



第8讲 基础检测卷

1.

答案: C

解答:

由题意可得 $\begin{cases} -x \geq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $x \leq 0$ 且 $x \neq -3$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{x+3}$ 的定义域为 $(-\infty, -3) \cup (-3, 0]$

故选: C.

2.

答案: B

解答:

令 $3x+2=t$, 则 $x = \frac{t-2}{3}$

故 $f(t) = 3(t-2) + 8 = 3t+2$

故 $f(x) = 3x+2$

故选: B.

3.

答案: B

解答:

A. $y = -x+1$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数

$\therefore$ 不满足条件

B. $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数, 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

$\therefore$ 在区间 $(0, 2)$ 上是增函数, 满足条件

C. $y = x^2 - 4x + 5$ 在 $(-\infty, 2)$ 上是减函数, 在 $(2, +\infty)$ 上是增函数

$\therefore$ 不满足条件

D. $y = \frac{2}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上是减函数

$\therefore$ 不满足条件

故选: B.

4.

答案: A

解答:

$\because$ 函数 $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 且 $f(2m) > f(m+9)$

$\therefore 2m > m+9$, 解得 $m > 9$

故选: A.

5.

答案: A

解答:

$f(x) = \frac{1}{x} - x$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\text{又 } f(-x) = \frac{1}{-x} - (-x) = -\left(\frac{1}{x} - x\right) = -f(x)$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数, 则其图象关于原点对称

故选: A.

6.

答案: 10

解答:

根据题意, 函数 $y = \lg x - 1$

若 $f(x) = \lg x - 1 = 0$, 解可得 $x = 10$

则函数 $y = \lg x - 1$ 的零点是 10

故答案为: 10.

7.

答案: $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$

解答:

因为 $x \in [-1, 1]$

所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$

即 $f(x) \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$

故答案为: $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$.

8.

答案: 3

解答:

依题意, 设 $f(x) = x^\alpha$

$$\therefore f(2) = \sqrt{2}, \text{ 即 } 2^\alpha = \sqrt{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$\therefore f(9) = \sqrt{9} = 3$$

故答案为: 3.

9.

解答:

(1) 若函数有意义, 则 $\frac{1+x}{1-x} > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$

所以, $f(x)$ 的定义域是 $(-1, 1)$

$$(2) f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} > 1 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1$$

所以 x 的取值范围为 $0 < x < 1$

第 9 讲 中档检测卷

练1

答案: A

解答:

因为 $y = f(x+1)$ 定义域是 $[-2, 3]$

即 $x \in [-2, 3]$

所以 $x+1 \in [-1, 4]$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 4]$

由 $-1 \leq x-1 \leq 4$, 得: $0 \leq x \leq 5$

所以函数 $y = f(x-1)$ 的定义域是 $[0, 5]$

故选: A.

练2

答案: C

解答:

$$\because f(1-2x) = x^2 + 1$$

$$\text{设 } 1-2x = t, \text{ 则 } x = \frac{1-t}{2}$$

$$\therefore f(t) = \left(\frac{1-t}{2}\right)^2 + 1$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1-\frac{1}{2}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{17}{16}$$

故选: C.

练3

答案: A

解答:

$$\text{A. } y = \frac{1}{x} - x \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 内单调递减}$$

$\therefore$ A 满足条件

$$\text{B. } y = x^2 - x \text{ 的对称轴为 } x = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 内单调递增

$\therefore$ B 不满足条件

$$\text{C. } y = \ln x - x \text{ 的定义域为 } (0, +\infty), y' = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

由 $y' = \frac{1-x}{x} > 0$ 得 $0 < x < 1$, 即函数的单调递增区间为 $(0, 1)$.

由 $y' = \frac{1}{x} < 0$ 得 $x > 1$ ，即函数的单调递减区间为 $(1, +\infty)$

$\therefore$ C 不满足条件

D. $y = e^x - x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $y' = e^x - 1$ ，由 $y' = e^x - 1 < 0$ 得 $x < 0$ ，即函数的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$

$\therefore$ D 不满足条件

故选：A.

练4

答案：D

解答：

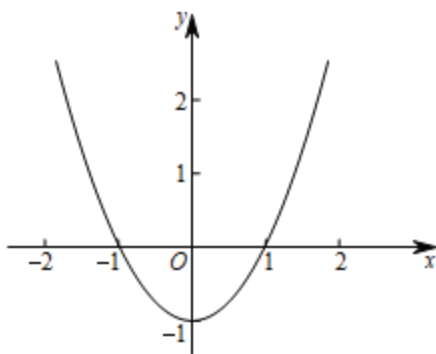
由于对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ ，都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数

由于函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增，且 $f(1) = f(-1) = 0$

由此画出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示



由图可知，不等式 $xf(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

故选：D.

练5

答案：D

解答：

$$\because \log_5 \frac{1}{3} \cdot \log_3 6 \cdot \log_6 x = 2$$

$$\therefore \frac{-\lg 3}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 6}{\lg 3} \cdot \frac{\lg x}{\lg 6} = 2$$

$$\text{化为 } \lg x = -2 \lg 5 = \lg \frac{1}{25}$$

$$\text{解得 } x = \frac{1}{25}$$

故选：D.

练6

答案: 2

解答:

根据题意, $f(x) = \frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{a}$, 有 $2^x - 1 \neq 0$, 解得 $x \neq 0$, 即函数的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 定义域关于原点对称

若 $f(x) = \frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{a}$ 是奇函数, 则当 $x \neq 0$ 时, 有 $f(x) + f(-x) = 0$

$$\text{即} \left(\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{a} \right) + \left(\frac{1}{2^{-x} - 1} + \frac{1}{a} \right) = 0$$

$$\text{变形可得: } \frac{2}{a} = -\frac{1}{2^{-x} - 1} - \frac{1}{2^x - 1} = 1, \text{ 解得 } a = 2$$

经检验, 当 $a = 2$ 时, 满足题意

故答案为: 2.

练 7

答案: $\sqrt{3} - 3$

解答:

当 $0 < a < 1$ 时, 由题意得 $\begin{cases} a^{-2} + b = 0 \\ a^0 + b = -2 \end{cases}$, 解得 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = -3$, 则 $f(-1) = \sqrt{3} - 3$

当 $a > 1$ 时, 由题意得 $\begin{cases} a^{-2} + b = -2 \\ a^0 + b = 0 \end{cases}$, 无解

故答案为: $\sqrt{3} - 3$.

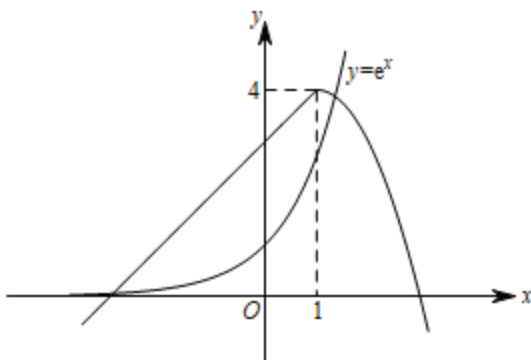
练 8

答案: 2

解答:

把函数 $g(x) = f(x) - e^x$ 的零点个数 $\rightarrow$ 转化为方程 $f(x) - e^x = 0$ 解的个数 $\rightarrow$ 转化为两个函数图象 $y = f(x)$ 与 $y = e^x$ 图象交点的个数, 在同一坐标系中画出这两个函数的图象

$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 1 \\ -x^2 + 2x + 3, & x > 1 \end{cases}$, $y = e^x$ 的图象如图所示



由图象可知, 函数 $g(x) = f(x) - e^x$ 的零点个数为 2

故答案为: 2.

练9

解答:

$$(1) \because f(1) = 2$$

$$\therefore \log_a 4 = 2 \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\therefore a = 2$$

$$\text{由} \begin{cases} 1+x > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases}, \text{得} x \in (-1, 3)$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 3)$

$$(2) f(x) = \log_2(1+x) + \log_2(3-x)$$

$$= \log_2(1+x)(3-x) = \log_2[-(x-1)^2 + 4]$$

$\therefore$ 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)$ 是增函数; 当 $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right]$ 时, $f(x)$ 是减函数

故函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ 上的最大值是 $f(1) = \log_2 4 = 2$