

高三

数学

一轮闯关训练

集合&简易逻辑&不等式

Math

产品亮点

- ▶ 分层合理效率高
- ▶ 精选分类覆盖广
- ▶ 题目典型收获多

目录



第 1 讲

集合的概念与表示 1

第 2 讲

集合间的关系 7

第 3 讲

集合的运算 13

第 4 讲

简易逻辑 19

第 5 讲

不等式的性质与解不等式 25

第 6 讲

均值不等式 31

第 7 讲

基础检测卷

37

第 8 讲

中档检测卷

39

参考答案与解析

41

第 1 讲

集合的概念与表示



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

集合及其确定性

练1 (★☆☆☆☆)

下列各组对象不能组成集合的是 ()

- A. 俄罗斯世界杯的参赛队伍
- B. 中国文学四大名著
- C. 我国的直辖市
- D. 抗日战争中著名的民族英雄

练2 (★☆☆☆☆)

下列集合中有限集的个数是 ()

- ①不超过 π 的正整数构成的集合
- ②平方后等于自身的数构成的集合
- ③高一(2)班中体重在55kg以上的同学构成的集合
- ④所有小于2的整数构成的集合

- A. 1
- B. 3
- C. 2
- D. 4

练3 (★★☆☆☆)

集合 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 是_____ (填“有”或“无”) 限集.

元素与集合的关系

练4 (★☆☆☆☆)

用“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空.

0 _____ $\mathbf{N}^*$, $\sqrt{2}$ _____ $\mathbf{Q}$, 0 _____ $\mathbf{N}$,
 3.1415926 _____ $\mathbf{Q}$, -4 _____ $\mathbf{Z}$, 0 _____ $\emptyset$.

练5 (★☆☆☆☆)

设集合 $M = \{(1, 2)\}$, 则下列关系成立的是 ()

- A. $1 \in M$ B. $2 \in M$ C. $(1, 2) \in M$ D. $(2, 1) \in M$

练6 (★★☆☆☆)

已知集合 $A = \{x | x(x-1) = 0\}$, 那么 ()

- A. $0 \in A$ B. $1 \notin A$ C. $-1 \in A$ D. $0 \notin A$

集合的无序性和互异性

练7 (★☆☆☆☆)

若“booknote中的字母”构成一个集合, 则该集合的元素个数是 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

练8 (★★☆☆☆)

以方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 和方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的解为元素的集合中共有 _____ 个元素.

练9 (★☆☆☆☆)

数集 $\{1, 2, x^2 - 3\}$ 中的 x 不能取的值构成的集合是 ()

- A. $\{2, \sqrt{5}\}$ B. $\{-2, -\sqrt{5}\}$ C. $\{-2, 2, -\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$ D. $\{2, -\sqrt{5}\}$

练15 (★★☆☆☆)

集合 $\left\{x \in \mathbf{N}^* \mid \frac{12}{x} \in \mathbf{Z}\right\}$ 中含有的元素个数为 ()

A. 4

B. 6

C. 8

D. 12

集合的无序性和互异性

练16 (★☆☆☆☆)

若集合 $M = \{a, b, c\}$ 中的元素是 $\triangle ABC$ 的三边长, 则 $\triangle ABC$ 一定不是_____三角形.

练17 (★☆☆☆☆)

若以集合 $\{a, b, c, d\}$ 的四个元素为边长构成一个四边形, 则这个四边形可能是 ()

A. 梯形

B. 平行四边形

C. 菱形

D. 矩形

空集概念

练18 (★☆☆☆☆)

下列四个集合中, 是空集的是 ()

A. $\{x \mid x + 3 = 3\}$

B. $\{(x, y) \mid y^2 = -x^2, x, y \in \mathbf{R}\}$

C. $\{x \mid x^2 \leq 0\}$

D. $\{x \mid x^2 - x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$

练19 (★★☆☆☆)

已知非空集合 $A = \{x \mid ax = 1\}$, 则 a 的取值范围是_____.

答案: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

解答: $a = 0$ 时, $ax = 1$ 即 $x \in \emptyset$, $A = \emptyset$, 不符合要求

$a \neq 0$ 时, $ax = 1$ 有一个解

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

故答案为: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

练20 (★★☆☆☆)

已知集合 $M = \{x \mid x^2 - 2x + m = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 非空, 求集合 M 中所有元素的和.

提能力 本模块适合90-120分水平学生 (满分150分).

元素与集合的关系

练21 (★★☆☆☆)

设集合 $A = \{-1, 1, 2\}$, 集合 $B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } 2 - x \notin A\}$, 则 $B = (\quad)$

- A. $\{-1\}$ B. $\{2\}$ C. $\{-1, 2\}$ D. $\{1, 2\}$

练22 (★★☆☆☆)

若集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{x \mid -x \in A, 1 - x \notin A\}$, 则集合 B 的元素的个数为 ($\quad$)

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

练23 (★★☆☆☆)

已知集合 $M = \left\{x \mid x = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $N = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + 1, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 若 $x_0 \in M$, 则 x_0 与 N 的关系是 ($\quad$)

- A. $x_0 \in N$ B. $x_0 \notin N$ C. $x_0 \subseteq N$ 或 $x_0 \notin N$ D. 不能确定

集合的描述法和列举法

练24 (★★★★☆☆)

已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{z \mid z = x + y, x \in A, y \in A\}$, 则 $B = (\quad)$.

- A. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{0, 2, 4\}$ D. $\{1, 2\}$

练25 (★★★☆☆)

若集合 $A = \{x \mid ax^2 + (a-6)x + 2 = 0\}$ 是单元素集合, 则实数 $a =$ ()

A. 2或18

B. 0或2

C. 0或18

D. 0或2或18

练26 (★★☆☆☆)

若 $A = \{x \mid ax^2 + x + 1 = 0\}$ 中只有一个元素, 则 $a =$ _____.

第 2 讲

集合间的关系



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

子集概念与应用

练1 (★★☆☆☆)

下列命题：

- ①空集没有子集；
- ②任何集合至少有两个子集；
- ③空集是任何集合的真子集；
- ④若 $\emptyset \subsetneq A$ ，则 $A \neq \emptyset$ 。

其中正确的个数是（ ）

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

练2 (★★☆☆☆)

下列关于子集、真子集说法正确的个数是（ ）

- ①空集是任何一个集合的子集；
- ②空集是任何一个非空集合的真子集；
- ③任何一个集合是它本身的子集；
- ④任何一个集合是它本身的真子集；
- ⑤若一个集合只有两个子集，则该集合只有一个元素。

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

练3 (★☆☆☆☆)

已知集合 $A = \{a, b, c\}$, 下列可以作为集合 A 的子集的是 ()

- A. a B. $\{a, c\}$ C. $\{a, e\}$ D. $\{a, b, c, d\}$

练4 (★★☆☆☆)

已知集合 $M = \{x \mid -\sqrt{5} < x < \sqrt{3}, x \in \mathbf{Z}\}$, 则下列集合是集合 M 的子集的为 ()

- A. $P = \{-3, 0, 1\}$ B. $Q = \{-1, 0, 1, 2\}$
C. $R = \{y \mid -\pi < y < -1, y \in \mathbf{Z}\}$ D. $S = \{x \mid |x| \leq \sqrt{3}, x \in \mathbf{N}\}$

练5 (★☆☆☆☆)

下列关于各种数集之间的关系, 表述正确的是 ()

- A. $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$ B. $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}$
C. $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$ D. $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{C}$

练6 (★★☆☆☆)

已知集合 $A = \{x \mid x \text{ 是平行四边形}\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是矩形}\}$, $C = \{x \mid x \text{ 是正方形}\}$, $D = \{x \mid x \text{ 是菱形}\}$, 则 ()

- A. $A \subseteq B$ B. $C \subseteq B$ C. $D \subseteq C$ D. $A \subseteq D$

集合相等

练7 (★★☆☆☆)

下列关系式中, 正确的是 ()

- A. $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ B. $\{(a, b)\} = \{(b, a)\}$ C. $2 \in \{1, 2\}$ D. $\emptyset = \{0\}$

练8 (★★☆☆☆)

下列六个关系式:

$$\textcircled{1} \{a, b\} \subseteq \{b, a\} \quad \textcircled{2} \{a, b\} = \{b, a\} \quad \textcircled{3} 0 = \varnothing \quad \textcircled{4} 0 \in \{0\} \quad \textcircled{5} \varnothing \in \{0\} \quad \textcircled{6} \varnothing \subseteq \{0\}$$

其中正确的个数为 ()

A. 6个

B. 5个

C. 4个

D. 少于4个

练9 (★★☆☆☆)

下列集合中表示同一集合的是 ()

A. $M = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $N = \{2, 3\}$

B. $M = \{1, 2\}$, $N = \{(1, 2)\}$

C. $M = \{x \mid y = \sqrt{x-1}\}$, $N = \{y \mid y = \sqrt{x-1}\}$

D. $M = \{(2, 3)\}$, $N = \{(3, 2)\}$

练10 (★★☆☆☆)

用列举法表示下列集合并判断两集合是否为同一集合.

$$\left\{x \in \mathbf{N} \mid \frac{8}{6-x} \in \mathbf{N}\right\}; \left\{\frac{8}{6-x} \in \mathbf{N} \mid x \in \mathbf{N}\right\}.$$

刷中档 本模块适合60-90分水平学生 (满分150分) .

子集个数问题

练11 (★★☆☆☆)

已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 则 A 的子集个数为_____.

练12 (★☆☆☆☆)

已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 则 A 的非空真子集的个数为_____.

练13 (★★★☆☆)

若集合 $A = \{-1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$, 则集合 $\{z \mid z = x + y, x \in A, y \in B\}$ 的子集共有 ()

- A. 2个 B. 4个 C. 8个 D. 16个

练14 (★★☆☆☆)

已知集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{x \mid x = ab, a, b \in M, a \neq b\}$, 则集合 N 的真子集个数为 ()

- A. 8 B. 7 C. 4 D. 3

练15 (★★☆☆☆)

已知集合 $A = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0\}$, 若集合 A 有且仅有2个子集, 则 a 的取值是 ()

- A. 1 B. -1 C. 0或1 D. -1, 0或1

练16 (★★★☆☆)

已知集合 $A = \{x \mid (a-1)x^2 + 3x - 2 = 0\}$, 若集合 A 有且仅有两个子集, 则实数 a 的取值为 ()

- A. $a > -\frac{1}{8}$ B. $a \geq -\frac{1}{8}$ C. $a = -\frac{1}{8}$ D. $a = -\frac{1}{8}$ 或 1

集合相等

练17 (★★☆☆☆)

已知 $M = \{0, 2, b\}$, $N = \{0, 2, b^2\}$, 且 $M = N$, 则实数 b 的值为_____.

练18 (★★☆☆☆)

已知集合 $A = \{a, b, 2\}$, $B = \{2, b^2, 2a\}$, $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $a =$ _____.

已知集合包含关系求参数范围

练19 (★★☆☆☆)

集合 $A = \{2, 0, 1, 6\}$, $B = \{x \mid x + a > 0, x \in \mathbf{R}\}$, $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是_____.

练20 (★☆☆☆☆)

已知集合 $A = \{x \mid 1 \leq x < 2\}$, $B = \{x \mid x > b\}$, 若集合 A 是 B 的子集, 则实数 b 的取值范围是 ()

A. $b \geq 2$ B. $1 < b \leq 2$ C. $b \leq 2$ D. $b < 1$

提能力

本模块适合90-120分水平学生 (满分150分) .

子集个数问题

练21 (★★★★☆☆)

满足条件 $\{1, 2\} \subseteq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的集合 M 的个数是_____.

练22 (★★★★☆☆)

满足条件 $\{1, 2, 3\} \subsetneq M \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的集合 M 的个数是 ()

A. 8

B. 7

C. 6

D. 5

已知集合包含关系求参数范围

练23 (★★★★☆☆)

设 $P = \{x \mid |x - 1| \leq 1 \text{ 且 } x^2 \geq 1\}$, $Q = \{x \mid x^2 - 2ax + a + 2 \leq 0\}$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 求集合 P ;

(2) 若 $P \subseteq Q$, 求实数 a 的取值范围.

练24 (★★★★☆☆)

已知集合 $A = \{x \mid x^2 + 2(a + 1)x + a^2 - 1 = 0, x, a \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x^2 + 4x = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的值为_____.

练25 (★★☆☆☆)

$M = \{x \mid 6x^2 - 5x + 1 = 0\}$, $P = \{x \mid ax = 1\}$, 若 $P \subseteq M$, 则 a 的取值集合为 ()

- A. $\{2\}$ B. $\{3\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{0, 2, 3\}$

练26 (★★★☆☆)

已知 $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 满足这个关系式的集合 X 共有 () 个

- A. 2 B. 6 C. 4 D. 8

第 3 讲

集合的运算



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

并集

练1 (★☆☆☆☆)

设集合 $M = \{x \mid |x| < 2, x \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{-2, -1, 0\}$, 则 $M \cup N = (\quad)$

- A. M B. N C. $\{-2, -1, 0, 1\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

练2 (★★☆☆☆)

已知集合 $P = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$, $Q = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 3\}$, 则 $P \cup Q = (\quad)$

- A. $[3, 4]$ B. $(-3, 4]$ C. $(-\infty, 4]$ D. $(-3, +\infty)$

练3 (★★☆☆☆)

已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid (x+1)(x-2) < 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cup B$ 等于 $(\quad)$

- A. $\{1\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{0, 1, 2, 3\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

连续数集的交集

练4 (★☆☆☆☆)

集合 $P = \{x \mid 0 < x < 2\}$, $Q = \{x \mid -1 < x < 1\}$, 则 $P \cap Q = (\quad)$

- A. $\{x \mid x < 1\}$ B. $\{x \mid 0 < x < 1\}$ C. $\{x \mid -1 < x < 1\}$ D. $\{0\}$

练5 (★★☆☆☆)

设集合 $A = \{x \mid x > 0\}$, $B = \{x \mid x \leq 1\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$ B. $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x \mid x < 0\}$ D. $\{x \mid x > 1\}$

练6 (★★☆☆☆)

设集合 $A = [-1, 2]$, $B = \{y \mid y = x^2, x \in A\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $[1, 4]$ B. $[1, 2]$ C. $[-1, 0]$ D. $[0, 2]$

练7 (★☆☆☆☆)

若 $A = \{x \mid y = \sqrt{x+1}\}$, $B = \{y \mid y = x^2 + 1\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

连续数集的补集

练8 (★☆☆☆☆)

已知集合 $A = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}} A$ 等于 $(\quad)$

- A. $\{x \mid x < 3\}$ B. $\{x \mid x > -1\}$ C. $\{x \mid -1 \leq x < 3\}$ D. $\emptyset$

练9 (★☆☆☆☆)

设集合 $U = \{x \mid x < 3\}$, $A = \{x \mid x < 1\}$, 则 $\complement_U A = (\quad)$

- A. $\{x \mid 1 \leq x < 3\}$ B. $\{x \mid 1 < x \leq 3\}$ C. $\{x \mid 1 < x < 3\}$ D. $\{x \mid x \geq 1\}$

练10 (★★☆☆☆)

设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $B = \{y | y = x^2\}$, 则 $\complement_U B = (\quad)$

- A. $[0, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0]$ D. $(-\infty, 0)$

刷中档 本模块适合60-90分水平学生 (满分150分) .

不等式与并集

练11 (★★☆☆☆)

若集合 $A = \{x | x^2 \leq 9\}$, $B = \{x | x^2 - 5x - 6 < 0\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$

- A. $\{x | 3 \leq x < 6\}$ B. $\{x | -3 \leq x < 6\}$
C. $\{x | -1 < x \leq 3\}$ D. $\{x | -3 \leq x < -1\}$

练12 (★★☆☆☆)

已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{x-2}{x-12} < 0\right\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$

- A. $(2, 12)$ B. $(-1, 3)$ C. $(2, 3)$ D. $(-1, 12)$

点集的交集

练13 (★★☆☆☆)

已知集合 $M = \{(x, y) | x + y = 3\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 3\}$, 则集合 $M \cap N = (\quad)$

- A. $\{0, 3\}$ B. $(3, 0)$ C. $\{(0, 3)\}$ D. $\{(3, 0)\}$

练14 (★★☆☆☆)

已知集合 $A = \{(x, y) | y = x^2\}$, 集合 $B = \{(x, y) | y = -x + 2\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

交并补混合运算

练15 (★★☆☆☆)

已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $M = \{2, 3, 5\}$, $N = \{1, 4, 6\}$, 则 $(\complement_U M) \cap N = (\quad)$

- A. $\{4, 6\}$ B. $\{1, 4, 6\}$ C. $\emptyset$ D. $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

练16 (★★☆☆☆)

已知集合 $A = \{-1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $\complement_B (A \cap B) = (\quad)$

- A. $\{0, 4\}$ B. $\{0, 1, 4\}$ C. $\{1, 4\}$ D. $\{0, 1\}$

练17 (★★☆☆☆)

已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M = \{3, 4, 5\}$, $N = \{1, 2, 5\}$, 则集合 $\{1, 2\}$ 可表示为 $(\quad)$

- A. $M \cap N$ B. $(\complement_U M) \cap N$ C. $M \cap (\complement_U N)$ D. $(\complement_U M) \cup (\complement_U N)$

练18 (★★☆☆☆)

已知全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 6\}$, 那么集合 $\{2, 7, 8\}$ 是 $(\quad)$

- A. $A \cup B$ B. $A \cap B$ C. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B)$ D. $(\complement_I A) \cap (\complement_I B)$

练19 (★★☆☆☆)

已知全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $M = \{-1, 0, 1, 5\}$, $N = \{x \mid x^2 - x - 2 \geq 0\}$, 则 $M \cap (\complement_{\mathbf{R}} N) = (\quad)$

- A. $\{0, 1\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{0, 1, 5\}$ D. $\{-1, 1\}$

练20 (★★☆☆☆)

已知集合 $M = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 - 2x < 8\}$, $P = \{1, 3\}$, $Q = \{0, 7\}$, 则 $Q \cup (\complement_M P) = (\quad)$

- A. $\{0, 1, 7\}$ B. $\{-1, 0, 7\}$ C. $\{0, 1, 3, 7\}$ D. $\{-1, 0, 2, 7\}$

提能力

本模块适合90-120分水平学生(满分150分)。

图示法解决人数问题

练21 (★★★☆☆)

某班学生进行了三次数学测试,第一次有8名学生得满分,第二次有10名学生得满分,第三次有12名学生得满分,已知前两次均为满分的学生有5名,三次测试中至少有一次得满分的学生有15名.若后两次均为满分的学生至少有 n 名,则 n 的值为()

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

点集的补集

练22 (★★☆☆☆)

已知集合 $U = \{(x, y) \mid y = x - 1\}$, $M = \left\{ (x, y) \mid \frac{y-1}{x-2} = 1 \right\}$, 则 $\complement_U M =$ _____.

已知集合交并补求参

练23 (★★☆☆☆)

已知集合 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x \mid mx = 1\}$, 且 $A \cup B = A$, 则 m 的值为()

A. 1

B. -1

C. 1或-1

D. 1或-1或0

练24 (★★★☆☆)

已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$, $B = \{x \mid ax = 1\}$, 若 $A \cap B = B$, 则实数 a 组成的集合是()

A. $\left\{ \frac{1}{4} \right\}$ B. $\{1\}$ C. $\left\{ 1, \frac{1}{4} \right\}$ D. $\left\{ 0, 1, \frac{1}{4} \right\}$

练25 (★★☆☆☆)

设全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 且 $A = \{x \mid x^2 - 5nx + m = 0, x \in U\}$, 若 $\complement_U A = \{1, 4\}$, 则 m , n 的值分别是()

A. -5, 1

B. -6, -1

C. 6, 1

D. 5, 1

练26 (★★★☆☆)

已知集合 T 是关于 x 的方程 $x^2 + px + q = 0$ ($p^2 - 4q > 0$) 的解组成的集合, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 4, 7, 10\}$, 且 $T \cap A = \emptyset$, $T \cap B = T$, 试求实数 p 和 q 的值.

第 4 讲

简易逻辑



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

命题的概念

练1 (★☆☆☆☆)

下列语句是命题的是 ()

- A. 今天天气真好啊！ B. 你怎么又没交作业？ C. $x > 2$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, x > 2$

练2 (★☆☆☆☆)

下列语句是命题的是 ()

- A. 2007是一个大数 B. 若两直线平行，则这两条直线没有公共点
C. 对数函数是增函数吗？ D. $a \leq 15$

命题的真假

练3 (★★☆☆☆)

下列命题是真命题的为 ()

- A. 若 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ ，则 $x = y$ B. 若 $x^2 = 1$ ，则 $x = -1$
C. 若 $x = y$ ，则 $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ D. 若 $x < y$ ，则 $x^2 < y^2$

练4 (★★☆☆☆)

下列命题中是真命题的是 ()

- A. 互余的两个角不相等
B. 相等的两个角是内错角
C. 若 $a^2 = b^2$, 则 $|a| = |b|$
D. 三角形的一个外角等于和它不相邻的一个内角

练5 (★★☆☆☆)

下列命题中, 真命题是 ()

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, 2^x > x^2$
B. $\exists x \in \mathbf{R}, e^x < 0$
C. 若 $a > b, c > d$, 则 $a - c > b - d$
D. $ac^2 < bc^2$ 是 $a < b$ 的充分不必要条件

练6 (★★★★☆)

下列说法中, 正确的是 ()

- A. 命题“若 $am^2 < bm^2$, 则 $a < b$ ”的逆命题是真命题
B. 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x > 0$ ”的否定是: “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x \leq 0$ ”
C. 命题“ p 或 q ”为真命题, 则命题“ p ”和命题“ q ”均为真命题
D. “ $b = 0$ ”是“函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 是偶函数”的充分不必要条件

全称命题与特称命题的概念

练7 (★★☆☆☆)

将“ $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ”改写成全称命题, 下列说法正确的是 ()

- A. $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 都有 $x^2 + y^2 \geq 2xy$
B. $\exists x, y \in \mathbf{R}$, 使得 $x^2 + y^2 \geq 2xy$
C. $\forall x > 0, y > 0$, 都有 $x^2 + y^2 \geq 2xy$
D. $\exists x < 0, y < 0$, 使得 $x^2 + y^2 \leq 2xy$

练8 (★☆☆☆☆)

命题“有些负数满足不等式 $(1+x)(1-9x)^2 > 0$ ”用“ $\exists$ ”写成特称命题.

练9 (☆☆☆☆)

下列命题中, 真命题的是 ()

A. $\forall x \in \mathbf{R}, x > 0$

B. 如果 $x < 2$, 那么 $x < 1$

C. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 \leq -1$

D. $\forall x \in \mathbf{R}$, 使 $x^2 + 1 \neq 0$

练10 (★★☆☆)

下列命题中是真命题的是 ()

A. 对 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geq x$

B. 对 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 < x$

C. 对 $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, y^2 < x$

D. $\exists x \in \mathbf{R}$, 对 $\forall y \in \mathbf{R}, xy = x$

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分).

全特称命题的否定

练11 (★★☆☆)

命题“ $\exists x_0 \in (0, +\infty), \ln x_0 = 2x_0 + 1$ ”的否定是 ()

A. $\exists x_0 \in (0, +\infty), \ln x_0 \neq 2x_0 + 1$

B. $\exists x_0 \notin (0, +\infty), \ln x_0 = 2x_0 + 1$

C. $\forall x \in (0, +\infty), \ln x \neq 2x + 1$

D. $\forall x \notin (0, +\infty), \ln x \neq 2x + 1$

练12 (★★☆☆)

命题“ $\exists x_0 \in \mathbb{C}_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}, x_0^3 \in \mathbf{Q}$ ”的否定是 ()

A. $\exists x_0 \notin \mathbb{C}_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}, x_0^3 \in \mathbf{Q}$

B. $\exists x_0 \in \mathbb{C}_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}, x_0^3 \notin \mathbf{Q}$

C. $\forall x \notin \mathbb{C}_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}, x^3 \in \mathbf{Q}$

D. $\forall x \in \mathbb{C}_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}, x^3 \notin \mathbf{Q}$

由全称命题的真假求参

练13 (★★☆☆☆)

若命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + ax + 1 \geq 0$ 为真命题, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2]$
C. $[-2, 2]$ D. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

练14 (★★☆☆☆)

若命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2ax_0 + 2 - a = 0$ 是真命题”, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty]$ B. $[-2, 1]$
C. $[-1, 2]$ D. $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty]$

充分、必要、充要条件

练15 (★☆☆☆☆)

已知 $p: 2 < x < 5$, $q: 1 \leq x < 6$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

练16 (★★☆☆☆)

若 $x, y \in \mathbf{R}$, 则“ $x^2 > y^2$ ”是“ $x > y$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

练17 (★★☆☆☆)

“两个三角形面积相等”是“两个三角形全等”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

练18 (★★☆☆☆)

“两个三角形相似”的一个充分不必要条件是 ()

- A. 它们的面积相等
B. 它们的三边对应成比例
C. 这两个三角形全等
D. 这两个三角形有两个对应角相等

练19 (★★★★☆)

设集合 $A = \{x \mid x > -1\}$, $B = \{x \mid x \geq 1\}$, 则“ $x \in A$ 且 $x \notin B$ ”成立的充要条件是 ()

- A. $-1 < x \leq 1$ B. $x \leq 1$ C. $x > -1$ D. $-1 < x < 1$

练20 (★★★★☆)

若集合 $A = \{x \mid 1 < x < 2\}$, $B = \{x \mid x > b, b \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \subseteq B$ 的一个充分不必要条件是 ()

- A. $b \geq 2$ B. $1 < b \leq 2$ C. $b \leq 1$ D. $b < 1$

提能力 本模块适合90-120分水平学生 (满分150分) .

已知条件类型求参数范围

练21 (★★★★☆)

已知 $p: x \leq m$, $q: |x - 2| < 1$, 若 p 是 q 的必要不充分条件, 则实数 m 的取值范围是_____.

练22 (★★☆☆☆)

已知 $p: |x - 6| \leq 4$, $q: a - 1 < x < a + 1$, $a \in \mathbf{R}$, 且 p 是 q 成立的必要不充分条件, 则实数 a 的取值范围是_____.

练23 (★★★★☆)

设 $p: 2x^2 - x - 1 \leq 0$, $q: x^2 - (2a - 1)x + a(a - 1) \leq 0$, 若 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的必要不充分条件, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ D. $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

练24 (★★★★☆☆)

已知 $p: -2 \leq x \leq 10$, $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$ ($m > 0$), 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, 求实数 m 的取值范围.

练25 (★★★★☆☆)

已知 $p: x \in A$, $A = \left\{ x \mid \frac{5}{x+3} > 1 \right\}$, $q: x \in B$, $B = \{x \mid -1-a < x < -1+a, a > 0\}$, 若 p 是 q 的必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.

练26 (★★★★☆☆)

已知 $p: \frac{1}{x-2} > 1$; $q: |x-a| < 1$, 若 p 是 q 的充分不必要条件, 求实数 a 的取值范围.

第 5 讲

不等式的性质与解不等式



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

利用不等式性质判断大小关系

练1 (★☆☆☆☆)

如果 $-1 < a < b < 0$ ，则有 ()

- A. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < b^2 < a^2$ B. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < a^2 < b^2$ C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < b^2 < a^2$ D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < a^2 < b^2$

练2 (★★★★☆)

已知 $a > b$ ，则下列不等式中不成立的个数是 ()

- ① $a^2 > b^2$ ② $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ③ $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

一元二次不等式的解法

练3 (★☆☆☆☆)

解关于 x 的不等式： $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ 。

练4 (★★☆☆☆)

解不等式: $4x \geq 4x^2 + 1$.

分式不等式解法

练5 (★★☆☆☆)

不等式 $\frac{x-3}{x-1} < 0$ 的解集是 ()

A. $\{x \mid -1 < x < 3\}$

B. $\{x \mid 1 < x < 3\}$

C. $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$

D. $\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$

练6 (★★☆☆☆)

不等式 $\frac{x+1}{2x-1} \leq 0$ 的解集为 ()

A. $\left[-1, \frac{1}{2}\right)$

B. $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

C. $(-\infty, -1] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

D. $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

高次不等式解法

练7 (★☆☆☆☆)

不等式 $(x-1)(x-2)(x+1) > 0$ 的解集是 ()

A. $(-1, 1) \cup (2, +\infty)$

B. $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$

C. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

D. $(-1, 1) \cup (1, 2)$

练8 (★★☆☆☆)

求不等式 $(x-2)^2(x-3)^3(x+1) < 0$ 的解集.

绝对值不等式的解法

练9 (★★☆☆☆)

不等式 $|2x - 1| > x + 2$ 的解集是 ()

A. $\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$

B. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$

C. $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

D. $(-3, +\infty)$

练10 (★★☆☆☆)

求解关于 x 的不等式: $|3x - 4| > 2x + 1$.解答: 若 $2x + 1 < 0$, 即 $x < -\frac{1}{2}$, 不等式恒成立若 $2x + 1 \geq 0$, 则原不等式可化为 $\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 3x - 4 > 2x + 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ -3x + 4 > 2x + 1 \end{cases}$ 分别解得 $x > 5$ 或 $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{5}$ 综上所述, 不等式的解集为 $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right) \cup (5, +\infty)$

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分).

利用不等式性质求取值范围

练11 (★★☆☆☆)

已知 $-1 \leq x + y \leq 1$, $1 \leq x - y \leq 3$, 则 $3x - y$ 的取值范围是 ()

A. $[1, 7]$

B. $[-1, 8]$

C. $[1, 8]$

D. $[-1, 7]$

练12 (★★★★☆)

已知 $-1 \leq x + y \leq 4$, 且 $2 \leq x - y \leq 3$, 则 $z = 2x - 3y$ 的取值范围是_____ (用区间表示).

练13 (★★★★☆)

若角 α, β 满足 $-\frac{\pi}{3} < -\alpha < \beta < \frac{3\pi}{4}$, 则 $\alpha + \beta$ 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{5\pi}{12}\right)$ B. $\left(0, \frac{13\pi}{12}\right)$ C. $\left(-\frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right)$ D. $\left(-\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$

练14 (★★★★☆)

若 $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha - \beta}{2}$ 的取值范围分别是 ()

- A. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ B. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$
C. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ D. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

练15 (★★☆☆☆)

已知 $12 < m < 60, 15 < n < 36$, 则 $\frac{m}{n}$ 的取值范围是_____.

一元二次不等式的逆向思维

练16 (★★☆☆☆)

若关于 x 的不等式 $mx^2 + 8mx + 28 < 0$ 的解集是 $\{x \mid -7 < x < -1\}$, 则实数 m 的值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

练17 (★★★★☆)

若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx - 2 > 0$ 的解集是 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, 则 ab 等于_____.

练18 (★★★★☆)

若不等式 $ax^2 + bx - 2 < 0$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\right\}$, 则 $b(a - b)$ 的值是 ()

- A. -20 B. -120 C. 20 D. 120

含参二次不等式的解法

练19 (★★☆☆☆)

解关于 x 的不等式 $(x+1)\left(x-\frac{1}{a}\right) < 0$, $a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$.

练20 (★★☆☆☆)

解关于 x 的不等式 $x^2 - (a+1)x + a < 0$.

提能力 本模块适合90-120分水平学生(满分150分).

含参二次不等式的解法

练21 (★★★★☆)

解不等式 $mx^2 + (m^2 - 1)x - m \geq 0$.

练22 (★★★★☆)

解关于 x 的不等式: $ax^2 - (a^2 + 2)x + 2a \leq 0$.

一元二次不等式的恒成立与存在性

练23 (★★☆☆☆)

若不等式 $x^2 - 2x + 5 \geq a^2 - 3a$ 对任意实数 x 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()A. $[-1, 4]$ B. $(-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$ C. $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$ D. $[-2, 5]$

练24 (★★☆☆☆)

若不等式 $-3x^2 + 2x + t \leq 0$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上恒成立, 则 t 的取值范围为_____.

练25 (★★★★☆☆)

若不等式 $x^2 - kx + k - 1 > 0$ 对 $x \in (1, 2)$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是_____.

练26 (★★★★☆☆)

已知不等式 $x^2 + px + 1 > 2x + p$.

- (1) 如果不等式当 $|p| \leq 2$ 时恒成立, 求 x 的范围;
- (2) 如果不等式当 $2 \leq x \leq 4$ 时恒成立, 求 p 的范围.

第 6 讲

均值不等式



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

均值不等式求最值之直接或配凑

练1 (★★☆☆☆)

已知 $x, y \in (0, +\infty)$, $x + y = 10$, 则 xy 的最大值为 ()

A. 15

B. 20

C. 25

D. 30

练2 (★★☆☆☆)

已知 $xy > 0$, 则 $\frac{x}{y} + \frac{9y}{x}$ 的最小值为_____.

练3 (★★☆☆☆)

已知 $a < b$, 则 $\frac{b-a+1}{b-a} + b-a$ 的最小值为 ()

A. 3

B. 2

C. 4

D. 1

练4 (★★☆☆☆)

设 x, y 为正数, 则 $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right)$ 的最小值为 ()

A. 6

B. 9

C. 12

D. 15

练5 (★★☆☆☆)

已知 $a > 3$, 则 $\frac{4}{a-3} + \frac{a-3}{16}$ 的最小值为_____.

均值不等式求最值之等号取不到

练6 (★★★★☆)

下列结论正确的是 ()

A. 当 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $\lg x + \frac{1}{\lg x} \geq 2$

B. 当 $x > 0$ 时, $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$

C. 当 $x \geq 2$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最小值为 2

D. 当 $0 < x \leq 2$ 时, $x - \frac{1}{x}$ 无最大值

练7 (★★★★☆)

下列说法正确的是 ()

A. $x + \frac{1}{x}$ 的最小值为 2

B. $\sin x + \frac{4}{\sin x}$ 的最小值为 4, $x \in (0, \pi)$

C. $x^2 + 1$ 的最小值为 $2x$

D. $4x(1-x)$ 的最大值为 1

练8 (★★☆☆☆)

下列代数式最小值为 2 的是 ()

A. $x + \frac{1}{x}$

B. $x^3 + \frac{1}{x^3}$

C. $|x| + \frac{1}{|x|}$

D. $\sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$

练9 (★★★☆☆)

下列各式中, 最小值为2的是 ()

A. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

B. $\sin x + \frac{1}{\sin x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

C. $\frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 2}}$

D. $x + \frac{1}{x}$

练10 (★★★☆☆)

下列函数:

① $y = x + \frac{1}{x} (x \geq 2)$; ② $y = \tan x + \frac{1}{\tan x}$; ③ $y = x - 3 + \frac{1}{x - 3}$.

其中最小值为2的个数有 ()

A. 0个

B. 1个

C. 2个

D. 3个

刷中档 本模块适合60-90分水平学生 (满分150分) .

均值不等式求最值之直接或配凑

练11 (★★☆☆☆)

已知 $a > 0, b > 0$, 若 $a + b = 4$, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为_____.

练12 (★★☆☆☆)

已知 $0 < x < 1$, 则 $x\sqrt{1-x^2}$ 的最大值为 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 1

均值不等式求最值之1的代换

练13 (★★☆☆☆)

若 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{9}{b}$ 的最小值为_____.

练14 (★★☆☆☆)

设 x, y 都是正数, 且 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{3}$, 则 $x + y$ 的最小值是_____.

练15 (★★★★☆)

已知 $a, b \in \mathbf{R}_+$, 且 $3a + 2b = 2$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是 ()

- A. 5 B. $2\sqrt{6}$ C. $\frac{5+2\sqrt{6}}{2}$ D. 无最小值

练16 (★★★★☆)

若正实数 x, y 满足 $x + y = 1$, 则 $\frac{4}{x+1} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{44}{7}$ B. $\frac{27}{5}$ C. $\frac{14}{3}$ D. $\frac{9}{2}$

练17 (★★★★☆)

若 $a > 0, b > 2$, 且 $a + b = 3$, 则使得 $\frac{4}{a} + \frac{1}{b-2}$ 取得最小值的实数 $a =$ _____.

均值不等式求最值之和积转换

练18 (★★☆☆☆)

若实数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \sqrt{ab}$, 则 ab 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4

练19 (★★★★☆)

若正数 a, b 满足 $ab = a + b + 3$, 则 ab 的取值范围是 ()

- A. $[6, +\infty)$ B. $[9, +\infty)$ C. $(-\infty, 9]$ D. $(-\infty, 6]$

练20 (★★★★☆☆)

已知 $x > 0$, $y > 0$, $2x + y + 2xy = 8$, 则 $2x + y$ 的最小值是 ()

- A. 3 B. 4 C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{11}{2}$

提能力 本模块适合90-120分水平学生(满分150分).

均值不等式综合应用

练21 (★★★★☆☆)

已知 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $x - y + 2z = 0$, 则 $\frac{xz}{y^2}$ 的 ()

- A. 最小值为8 B. 最大值为8 C. 最小值为 $\frac{1}{8}$ D. 最大值为 $\frac{1}{8}$

练22 (★★☆☆☆☆)

设 x, y, z 为正实数, 满足 $x - 3y + 2z = 0$, 则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值为_____.

练23 (★★☆☆☆☆)

已知 $a > 0$, $b > 0$ 且 $a + b = 1$, 则 $\left(\frac{1}{a^2} - 1\right)\left(\frac{1}{b^2} - 1\right)$ 的最小值是 ()

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

练24 (★★★★☆☆)

已知非负实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $(1 - xy)(1 + xy)$ 有 ()

- A. 最小值 $\frac{1}{2}$ 和最大值1 B. 最小值 $\frac{3}{4}$ 和最大值1 C. 最小值 $\frac{1}{2}$ 和最大值 $\frac{3}{4}$ D. 最小值1

练25 (★★★★☆☆)

已知实数 x, y, z 满足 $x + y + 2z = 1$, $x^2 + y^2 + 2z^2 = \frac{1}{2}$, 则 z 的取值范围是 ()

- A. $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$ B. $0 < z \leq \frac{1}{4}$ C. $0 \leq z \leq 2$ D. $0 < z \leq 1$

练26 (★★★★☆)

设实数 a, b, c , 满足 $a + b = 2c - 1$, $a^2 + b^2 = c^2 + 2c - 3$, 则 ab 的取值范围是_____.

第 7 讲

基础检测卷

本试卷共9个题目，选择5个，填空3个，解答1个，均为基础水平题目。限时30分钟。得分在70分以上视为合格，可以去做【刷中档】模块题目，冲刺更高的水平。

一、单选题，共5题，每题10分.

练1 (★★☆☆☆)

已知集合 $M = \{y \mid y = x^2 - 2x - 1, x \in \mathbf{R}\}$, $P = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$, 则 M 与 P 满足 ()

- A. $M = P$ B. $P \in M$ C. $P \subseteq M$ D. $M \not\subset P$ 且 $P \not\subset M$

练2 (★★☆☆☆)

已知全集 $U = \{-3, -1, 0, 2, 4\}$, $A = \{-1, 0\}$, $B = \{0, 2\}$, 则 $\complement_U (A \cup B) = ()$

- A. $\{-3, 1\}$ B. $\{-3, 4\}$ C. $\{-3, -1, 2, 4\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$

练3 (★★☆☆☆)

集合 $A = \{x \mid 0 \leq x < 3 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}\}$ 的真子集的个数是 ()

- A. 15 B. 8 C. 7 D. 3

练4 (★★☆☆☆)

“ $\frac{1}{x} < 2$ ”是“ $x > \frac{1}{2}$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

练5 (☆☆☆☆)

对于命题 $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + x_0 + 1 = 0$, 则命题 $\neg p$ 为 ()

- A. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + x_0 + 1 \neq 0$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \neq 0$
C. $\forall x \notin \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \neq 0$ D. $\exists x_0 \notin \mathbf{R}, x_0^2 + x_0 + 1 \neq 0$

二、填空题, 共3题, 每题10分.

练6 (★★★★☆)

若不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\right\}$, 则 $a + b =$ _____.

练7 (★★★★☆)

已知 $x, y \in \mathbf{R}_+$, 且 $x + 4y = 1$, 则 $x \cdot y$ 的最大值为_____.

练8 (★★★★☆)

若 $m > 0, n > 0, \frac{1}{m} + \frac{1}{2n} = 1$, 则 $m + 2n$ 的最小值为 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

三、解答题, 共1题, 每题20分.

练9 (★★★★☆)

设命题 $p: |x - a| < 4$, 命题 $q: (x - 2)(x - 3) < 0$.

- (1) 写出命题 p 的否定 $\neg p$;
(2) 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件, 求实数 a 的取值范围.

第8讲

中档检测卷

本试卷共9个题目，选择5个，填空3个，解答1个，均为中档水平题目。限时30分钟。得分在70分以上视为合格，可以去做【提能力】模块题目，冲刺更高的水平。

一、单选题，共5题，每题10分.

练1 (★★☆☆☆)

设全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x \mid 0 < x < 4\}$ ，集合 $B = \{x \mid 3 \leq x < 5\}$ ，则 $A \cap (\complement_U B) = (\quad)$

- A. $\{x \mid 1 \leq x < 3\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{x \mid x \geq 5\}$ D. $\{x \mid 0 < x < 3\}$

练2 (★★☆☆☆)

已知全集 $U = \mathbf{R}$ ， $A = \left\{x \mid -4 < x < \frac{1}{2}\right\}$ ， $B = \{x \mid x \leq -4\}$ ， $C = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$ ，则集合 $C = (\quad)$

- A. $A \cap B$ B. $\complement_U (A \cup B)$ C. $\complement_U (A \cap B)$ D. $A \cup B$

练3 (★★☆☆☆)

设全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ ，且 $A = \{x \mid x^2 - 5nx + m = 0, x \in U\}$ ，若 $\complement_U A = \{1, 4\}$ ，则 m, n 的值分别是 ()

- A. $-5, 1$ B. $-6, -1$ C. $6, 1$ D. $5, 1$

练4 (★★☆☆☆)

“ $x \neq y$ ”是“ $|x| \neq |y|$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

练5 (★★☆☆☆)

不等式 $x^3 - x \geq 0$ 的解集为 ()

A. $(1, +\infty)$

B. $[1, +\infty)$

C. $[0, 1) \cup (1, +\infty)$

D. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$

二、填空题，共3题，每题10分.

练6 (★★☆☆☆)

设 $x > 0$ ，则函数 $y = 3 - 3x - \frac{1}{x}$ 的最大值是_____.

练7 (★★★★☆☆)

已知实数 x, y 满足 $x > y > 0$ 且 $x + y = 2$ ，则 $\frac{4}{x+3y} + \frac{1}{x-y}$ 的最小值是_____.

练8 (★★★★☆☆)

已知实数 x, y 满足: $x^2 + xy + 4y^2 = 1$ ，则 $x + 2y$ 的最大值是_____.

三、解答题，共1题，每题20分.

练9 (★★★★☆☆)

已知 a, b 均为正实数，且 $a + b = 1$ ，求 $y = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right)$ 的最小值.

参考答案与解析

第 1 讲 集合的概念与表示

练1

答案：D

解答：

A、B、C所表示的对象都能确定，能组成集合，选项D抗日战争中著名的民族英雄，怎样算著名，不能确定，不能组成集合

故选：D.

练2

答案：B

解答：

- ①不超过 π 的正整数构成的集合为 $\{1, 2, 3\}$ ，为有限集
- ②平方后等于自身的数构成的集合为 $\{0, 1\}$ ，为有限集
- ③高一（2）班中体重在55kg以上的同学构成的集合为有限集
- ④所有小于2的整数构成的集合为无限集

故选：B.

练3

答案：有

解答：

$$\because x^2 + y^2 = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$$

$$\therefore x = y = 0$$

$\therefore$ 集合中只有一个元素 $(0, 0)$

故答案为：有.

练4

答案： $\notin$ ； $\notin$ ； $\in$ ； $\in$ ； $\in$ ； $\notin$

解答：

因为 $\mathbf{N}^*$ 表示正整数，0不是正数，所以 $0 \notin \mathbf{N}^*$

因为 $\mathbf{Q}$ 表示有理数，而 $\sqrt{2}$ 是无理数，3.1415926是有理数，所以 $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ ， $3.1415926 \in \mathbf{Q}$

因为 $\mathbf{N}$ 表示自然数，0是自然数，所以 $0 \in \mathbf{N}$

因为 $\mathbf{Z}$ 表示整数，-4是负整数，所以 $-4 \in \mathbf{Z}$

因为 $\emptyset$ 不含任何元素，所以 $0 \notin \emptyset$

故答案为： $\notin$ ； $\notin$ ； $\in$ ； $\in$ ； $\in$ ； $\notin$ 。

练5

答案：C

解答：

集合 M 是只含有一个元素 $(1, 2)$ 的集合

所以 $(1, 2) \in M$ ，但 $1 \notin M$ ， $2 \notin M$ ， $(2, 1) \notin M$

故选：C.

练6

答案：A

解答：

由 $x(x-1)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=1$

$\therefore A = \{0, 1\}$

$\therefore 0 \in A$

故选：A.

练7

答案：B

解答：

根据集合元素的互异性

booknote中的不同字母共有“b, o, k, n, t, e”6个

故该集合的元素个数是6

故选：B.

练8

答案: 3

解答:

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = 3$

由 $x^2 - x - 2 = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = -1$

$\therefore$ 以方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 和方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的解为元素的集合为 $\{2, 3, -1\}$, 共有 3 个元素

故答案为: 3.

练9

答案: C

解答:

由 $x^2 - 3 \neq 1$ 解得 $x \neq \pm 2$

由 $x^2 - 3 \neq 2$ 解得 $x \neq \pm\sqrt{5}$

$\therefore x$ 不能取的值构成的集合是 $\{-2, 2, -\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

故选: C.

练10

答案: D

解答:

根据题意, 由集合中元素的互异性, 可得集合 $\{x^2 + x, 2x\}$ 中, $x^2 + x \neq 2x$

即 $x \neq 0$, $x \neq 1$

则 x 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

故选: D.

练11

答案: A

解答:

$\because A = \{x \mid x > a\}$, $3 \notin A$

$\therefore a \geq 3$

$\therefore a$ 的取值范围是 $[3, +\infty)$

故选: A.

练12

答案: $\{a | 1 \leq a \leq 25\}$

解答:

因为 $5 \notin M$

所以当 $x = 5$ 时, $(5a - 5)(5^2 - a) \geq 0$

即 $(5a - 5)(25 - a) \geq 0$

所以 $5(a - 1)(a - 25) \leq 0$

解得 $1 \leq a \leq 25$

故答案为: $\{a | 1 \leq a \leq 25\}$.

练13

答案: A

解答:

方程组 $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, 因此由方程组的解构成的集合中的元素应为有序数对 $(1, 1)$, 集合为 $\{(1, 1)\}$

故选: A.

练14

答案: B

解答:

集合 $\{x \in \mathbf{Z} | (2x - 1)(x - 3) = 0\}$ 可化简为 $\{3\}$

故选: B.

练15

答案: B

解答:

由题意, 集合 $\left\{x \in \mathbf{N}^* \mid \frac{12}{x} \in \mathbf{Z}\right\}$ 中的元素满足 x 是正整数, 且 $\frac{12}{x}$ 是整数

由此列出下表

x	1	2	3	4	6	12
$\frac{12}{x}$	12	6	4	3	2	1

根据表格, 可得符合条件的 x 共有 6 个, 即集合 $\left\{x \in \mathbf{N}^* \mid \frac{12}{x} \in \mathbf{Z}\right\}$ 中有 6 个元素

故选: B.

练16

答案：等腰

解答：

根据集合的性质可知， $a \neq b \neq c$

$\therefore \triangle ABC$ 一定不是等腰三角形

故答案为：等腰.

练17

答案：A

解答：

因为集合中的元素是互异的，也是无序的

所以平行四边形的边长构成的集合只有2个元素

菱形的边长构成的集合只有1个元素

矩形的边长构成的集合只有2个元素

所以满足题意的可能是梯形

故选：A.

练18

答案：D

解答：

空集中没有任何元素

A. $x = 0$ 是集合中的元素

B. $(0, 0)$ 是集合中的元素

C. $x = 0$ 是集合中的元素

D. 方程无解

故选：D.

练19

答案： $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

解答：

$a = 0$ 时， $ax = 1$ 即 $x \in \emptyset$ ， $A = \emptyset$ ，不符合要求

$a \neq 0$ 时， $ax = 1$ 有一个解

综上， a 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

故答案为： $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

练20

解答:

若集合 M 只有一个元素, 则方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个相等的实数根

此时 $\Delta = 4 - 4m = 0$, 解得 $m = 1$

方程为 $x^2 - 2x + 1 = 0$, 解得 $x = 1$

所以 $M = \{1\}$, 集合 M 中所有元素的和为 1

若集合 M 有两个元素, 则方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个不相等的实数根, 设为 x_1, x_2 , 则 $M = \{x_1, x_2\}$

此时 $\Delta = 4 - 4m > 0$, 解得 $m < 1$

由根与系数的关系可知 $x_1 + x_2 = 2$, 即集合 M 中所有元素的和为 2

答案: 1或2

练21

答案: C

解答:

集合 $B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } 2 - x \notin A\}$, 集合 $A = \{-1, 1, 2\}$

当 $x = -1$ 时, 可得 $2 - (-1) = 3 \notin A$

当 $x = 1$ 时, 可得 $2 - 1 = 1 \in A$

当 $x = 2$ 时, 可得 $2 - 2 = 0 \notin A$

$\therefore B = \{-1, 2\}$

故选: C.

练22

答案: A

解答:

若 $-x = 0 \in A$, 则 $1 - x = 1 \in A$

$\therefore$ 此时 $x = 0$, 不成立

若 $-x = 1 \in A$, 则 $1 - x = 2 \in A$

$\therefore$ 此时 $x = -1$, 不成立

若 $-x = 2 \in A$, 则 $1 - x = 3 \in A$

$\therefore$ 此时 $x = -2$, 不成立

若 $-x = 3 \in A$, 则 $1 - x = 4 \notin A$

$\therefore$ 此时 $x = -3$, 满足条件

故 $B = \{-3\}$

故选: A.

练23

答案: A

解答:

由题意, 集合 $M = \left\{ x \mid x = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\} = \left\{ x \mid x = \frac{2k+1}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 此集合是全体奇数的一半组成的集合

集合 $N = \left\{ x \mid x = \frac{k}{2} + 1, k \in \mathbf{Z} \right\} = \left\{ x \mid x = \frac{k+2}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 此集合是全体整数的一半组成的集合

$\therefore x_0 \in M$, 必有 $x_0 \in N$, 而当 $x_0 \in N$ 时, 不一定有 $x_0 \in M$

故选: A.

练24

答案: A

解答:

$\because A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{z \mid z = x + y, x \in A, y \in A\}$,

①当 $x = 0, y = 0$; $x = 1, y = 1$; $x = 2, y = 2$ 时, $x + y = 0, 2, 4$,

②当 $x = 0, y = 1$; $x = 1, y = 2$ 时, $x + y = 1, 3$,

③当 $x = 1, y = 0$; $x = 2, y = 1$ 时, $x + y = 1, 3$,

④当 $x = 0, y = 2$ 时, $x + y = 2$,

⑤当 $x = 2, y = 0$ 时, $x + y = 2$,

综上, 集合 B 为: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

故选: A.

练25

答案: D

解答:

当 $a = 0$ 时, $-6x + 2 = 0$, $x = \frac{1}{3}$, 只有一个解, 集合 $A = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$, 满足题意

当 $a \neq 0$ 时, 方程 $ax^2 + (a - 6)x + 2 = 0$ 有两相等实根

判别式 $\Delta = 0$

$$\Delta = (a - 6)^2 - 8a = 0$$

$$a^2 - 20a + 36 = 0$$

解得 $a = 2$ 或 $a = 18$

$\therefore$ 实数 a 的值为 0 或 2 或 18

故选: D.

练26

答案：0或 $\frac{1}{4}$

解答：

对于方程 $ax^2 + x + 1 = 0$

①若 $a = 0$ ，则 $x = -1$

所以 A 只有一个元素 -1

②若 $a \neq 0$ ，则一元二次方程 $ax^2 + x + 1 = 0$ 只有一个解

所以 $\Delta = 1 - 4a = 0$ ，解得 $a = \frac{1}{4}$

综上， $a = 0$ 或 $\frac{1}{4}$

故答案为：0或 $\frac{1}{4}$ 。

第 2 讲 集合间的关系

练1

答案: B

解答:

在①中, 空集的子集是空集, 故①错误

在②中, 空集只有一个子集, 还是空集, 故②错误

在③中, 空集是任何非空集合的真子集, 故③错误

在④中, 若 $\emptyset \subsetneq A$, 则 $A \neq \emptyset$, 故④正确

故选: B.

练2

答案: C

解答:

①空集是任何一个集合的子集, 正确

②空集是任何一个非空集合的真子集, 正确

③任何一个集合是它本身的子集, 正确

④任何一个集合是它本身的真子集, 不正确

⑤若一个集合只有两个子集, 则该集合只有一个元素, 正确

故选: C.

练3

答案: B

解答:

根据集合的子集的定义

集合 $A = \{a, b, c\}$ 的子集为: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

对应选项, 则可以作为集合 A 的子集的是 $\{a, c\}$

故选: B.

练4

答案: D

解答:

$\therefore$ 集合 $M = \{x \mid -\sqrt{5} < x < \sqrt{3}, x \in \mathbb{Z}\} = \{-2, -1, 0, 1\}$

$\therefore A. P = \{-3, 0, 1\}$ 不是集合 M 的子集, 故 A 错误

B. $Q = \{-1, 0, 1, 2\}$ 不是集合 M 的子集, 故B错误

C. $R = \{y \mid -\pi < y < -1, y \in \mathbf{Z}\} = \{-3, -2\}$ 不是集合 M 的子集, 故C错误

D. $S = \{x \mid |x| \leq \sqrt{3}, x \in \mathbf{N}\} = \{0, 1\}$ 是集合 M 的子集, 故D正确

故选: D.

练5

答案: C

解答:

自然数一定是整数, 整数一定是有理数, 有理数一定是实数, 实数一定是复数

所以 $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

故选: C.

练6

答案: B

解答:

因为菱形是平行四边形的特殊情形

所以 $D \subseteq A$

矩形与正方形是平行四边形的特殊情形

所以 $B \subseteq A, C \subseteq A$

正方形是特殊的矩形

所以 $C \subseteq B$

故选: B.

练7

答案: C

解答:

A. 在A中, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, 故A错误

B. 在B中, $\{(a, b)\} \neq \{(b, a)\}$, 故B错误

C. 在C中, $2 \in \{1, 2\}$, 故C正确

D. 在D中, $\emptyset \subseteq \{0\}$, 故D错误

故选: C.

练8

答案: C

解答:

根据集合自身是自身的子集, 可知①正确

根据集合无序性可知②正确

根据元素与集合只有属于与不属于关系, 集合与集合只有包含与不包含关系可知③⑤不正确

根据元素与集合之间的关系可知④正确

根据空集是任何集合的子集可知⑥正确

故选: C.

练9

答案: A

解答:

A. 由 $M = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{3, 2\}$, $\therefore M = N$

B. N 为点集, M 为数集, 集合元素不同. $\therefore M \neq N$

C. $M = \{x \mid x \geq 1\}$, $N = \{y \mid y \geq 0\}$, $\therefore M \neq N$

D. 集合 M , N 中的元素是不同的点, $M \neq N$

故选: A.

练10

解答:

$$\left\{x \in \mathbf{N} \mid \frac{8}{6-x} \in \mathbf{N}\right\} \Rightarrow \{2, 4, 5\}; \left\{\frac{8}{6-x} \in \mathbf{N} \mid x \in \mathbf{N}\right\} \Rightarrow \{2, 4, 8\}$$

故这两个集合不是同一集合

练11

答案: 8

解答:

由题意, 集合 A 中有三个元素, 则集合 A 的子集个数为 $2^3 = 8$

故答案为: 8.

练12

答案: 6

解答:

根据题意知，集合 A 中有 3 个元素，则 A 的非空真子集的个数为 $2^3 - 1 - 1 = 6$

故答案为：6.

练13

答案：D

解答：

$$A = \{-1, 2\}, B = \{0, 1\}$$

$$\text{则集合 } \{z \mid z = x + y, x \in A, y \in B\} = \{-1, 0, 2, 3\}$$

其子集的个数是 $2^4 = 16$

故选：D.

练14

答案：D

解答：

$$N = \{0, -1\}$$

所以真子集有 3 个

故选：D.

练15

答案：C

解答：

若集合 A 有且仅有 2 个子集

则集合 A 有且仅有 1 个元素

即方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 只有一个实根

故 $a = 0$ ，或 $a \neq 0$ 时， $\Delta = 4 - 4a = 0$ ，解得 $a = 1$

故 a 的取值是 0 或 1

故选：C.

练16

答案: D

解答:

若 A 恰有两个子集, 则关于 x 的方程 $(a-1)x^2 + 3x - 2 = 0$ 恰有一个实数解①当 $a=1$ 时, $x = \frac{2}{3}$, 满足题意②当 $a-1 \neq 0$ 时, $\Delta = 8a+1=0$, $a = -\frac{1}{8}$ 综上所述, 实数 a 的取值为 $-\frac{1}{8}, 1$

故选: D.

练17

答案: 1

解答:

 $\because M = \{0, 2, b\}$, $N = \{0, 2, b^2\}$, 且 $M = N$ $\therefore b = b^2$, 即 $b = 0$ 或 1 当 $b = 0$ 时, 不合题意 $\therefore$ 实数 b 的值为 1

故答案为: 1.

练18答案: 0 或 $\frac{1}{4}$

解答:

 $\because A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ $\therefore A = B$ $\because A = \{a, b, 2\}$, $B = \{2, b^2, 2a\}$ $\therefore \begin{cases} a = 2a \\ b = b^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b = 2a \\ a = b^2 \end{cases}$ 由 $\begin{cases} a = 2a \\ b = b^2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ 由 $\begin{cases} b = 2a \\ a = b^2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ 若 $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$, 则 $a = b$, $b^2 = 2a$

不满足集合中元素的互异性, 不合题意

若 $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$, 则 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 1, 0\}$, 符合题意

若 $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$, 则 $A = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2 \right\}$, $B = \left\{ 2, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\}$ 符合题意

故答案为: 0 或 $\frac{1}{4}$.

练19

答案: $(0, +\infty)$

解答:

$$B = \{x \mid x + a > 0, x \in \mathbf{R}\} = (-a, +\infty)$$

$$\text{又 } A \subseteq B$$

$$\therefore -a < 0$$

$$\therefore a > 0$$

故答案为: $(0, +\infty)$.

练20

答案: D

解答:

由题意得 $A \subseteq B$, 则 $b < 1$

故选: D.

练21

答案: 8

解答:

若 M 满足条件 $\{1, 2\} \subseteq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

则 M 可能为: $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

共8个

故答案为: 8.

练22

答案: C

解答:

由题意得, M 的个数应为集合 $\{4, 5, 6\}$ 的非空真子集的个数

集合 $\{4, 5, 6\}$ 有3个元素, 有 $2^3 - 2 = 6$ 个非空真子集

故选: C.

练23

解答:

(1) 由 $|x-1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$, 由 $x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ 或 $x \leq -1$ 故集合 $P = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$ (2) 若 $P \subseteq Q$, 则设 $f(x) = x^2 - 2ax + a + 2$ 令 $f(x) = x^2 - 2ax + a + 2 = 0$, 显然 $\Delta = 4a^2 - 4(a+2) > 0$ 则 a 还需同时满足 $\begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases}$, 解得 $a \geq 3$ 故实数 a 的取值范围为 $[3, +\infty)$ **练24**

答案: 1

解答:

由题意得: $B = \{-4, 0\}$ 因为方程 $x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$ 最多有2个实根, 且 $B \subseteq A$ 所以只可能是 $A = B = \{-4, 0\}$ 所以 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ -2(a+1) = -4, \text{ 解得 } a = 1 \\ a^2 - 1 = 0 \end{cases}$

故答案为: 1.

练25

答案: D

解答:

由题意可得 $M = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\}$ 若 $a = 0$, 则 $P = \emptyset$, 满足 $P \subseteq M$ 若 $a \neq 0$, 则 $P = \left\{ \frac{1}{a} \right\}$, 由题意可得 $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{a} = \frac{1}{3}$ 解得 $a = 2$ 或 $a = 3$ 所以 a 的取值集合为 $\{0, 2, 3\}$

故选: D.

练26

答案：D

解答：

由题意知集合 X 中的元素 1，2 必取，另外可从 3，4，5 中取

可以不取，即取 0 个，取 1 个，取 2 个，取 3 个

故有 $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 8$ 个满足这个关系式的集合

故选：D.

第 3 讲 集合的运算**练1**

答案: C

解答:

集合 $M = \{x \mid |x| < 2, x \in \mathbf{Z}\} = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{-2, -1, 0\}$

所以 $M \cup N = \{-1, 0, 1\} \cup \{-2, -1, 0\} = \{-2, -1, 0, 1\}$

故选: C.

练2

答案: B

解答:

依题意得: $Q = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 < x < 3\}$

又 $P = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$

所以 $P \cup Q = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 < x \leq 4\}$

故选: B.

练3

答案: C

解答:

$B = \{x \mid -1 < x < 2, x \in \mathbf{Z}\} = \{0, 1\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$

故选: C.

练4

答案: B

解答:

$P \cap Q = \{x \mid 0 < x < 1\}$

故选: B.

练5

答案: B

解答:

$$A = \{x \mid x > 0\}, B = \{x \mid x \leq 1\}, A \cap B = \{x \mid 0 < x \leq 1\}$$

故选: B.

练6

答案: D

解答:

$$\because \text{集合 } A = [-1, 2]$$

$$B = \{y \mid y = x^2, x \in A\} = [0, 4]$$

$$\therefore A \cap B = [0, 2]$$

故选: D.

练7

答案: $[1, +\infty)$

解答:

$$\because A = \{x \mid y = \sqrt{x+1}\}, B = \{y \mid y = x^2 + 1\}$$

可知集合 A 中的元素是 x , 集合 B 中的元素是 y

$$\therefore x + 1 \geq 0, y = x^2 + 1 \geq 1$$

$$\therefore A = \{x \mid x \geq -1\}, B = \{y \mid y \geq 1\}$$

$$\therefore A \cap B = [1, +\infty)$$

故答案为: $[1, +\infty)$.

练8

答案: C

解答:

$$\because A = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$$

$$\therefore \complement_{\mathbf{R}} A = \{x \mid -1 \leq x < 3\}$$

故选: C.

练9

答案: A

解答:

因为集合 $U = \{x \mid x < 3\}$, $A = \{x \mid x < 1\}$

所以 $\complement_U A = \{x \mid 1 \leq x < 3\}$

故选: A.

练10

答案: D

解答:

由 $y = x^2 \geq 0$, 得 $B = [0, +\infty)$

又 $\because U = \mathbf{R}$

$\therefore \complement_U B = (-\infty, 0)$

故选: D.

练11

答案: B

解答:

由 A 中的不等式解得: $-3 \leq x \leq 3$, 即 $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$

由 B 中的不等式解得: $-1 < x < 6$, 即 $B = \{x \mid -1 < x < 6\}$

则 $A \cup B = \{x \mid -3 \leq x < 6\}$

故选: B.

练12

答案: D

解答:

由题意得 $A = (2, 12)$, $B = (-1, 3)$

所以 $A \cup B = (-1, 12)$

故选: D.

练13

答案: D

解答:

$$\text{由} \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=3 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{所以 } M \cap N = \{(3, 0)\}$$

故选: D.

练14

$$\text{答案: } \{(1, 1), (-2, 4)\}$$

解答:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \right\} \\ &= \{(1, 1), (-2, 4)\} \end{aligned}$$

$$\text{故答案为: } \{(1, 1), (-2, 4)\}.$$

练15

答案: B

解答:

$$\text{因为 } \complement_U M = \{1, 4, 6\}$$

$$\text{所以 } (\complement_U M) \cap N = \{1, 4, 6\}$$

故选: B.

练16

答案: C

解答:

$$\because A = \{-1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\therefore A \cap B = \{2, 3\}$$

$$\therefore \complement_B (A \cap B) = \{1, 4\}$$

故选: C.

练17

答案: B

解答:

全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M = \{3, 4, 5\}$

$$\therefore \complement_U M = \{1, 2\}$$

$$\because N = \{1, 2, 5\}$$

$$\therefore (\complement_U M) \cap N = \{1, 2\}$$

故选: B.

练18

答案: D

解答:

$$\complement_I A = \{1, 2, 6, 7, 8\}$$

$$\complement_I B = \{2, 4, 5, 7, 8\}$$

$$(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \{2, 7, 8\}$$

故选: D.

练19

答案: A

解答:

$$\text{因为 } \complement_{\mathbf{R}} N = \{x \mid x^2 - x - 2 < 0\} = (-1, 2)$$

$$\text{所以 } M \cap (\complement_{\mathbf{R}} N) = \{0, 1\}$$

故选: A.

练20

答案: D

解答:

$$\text{集合 } M = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 - 2x < 8\} = \{x \in \mathbf{Z} \mid -2 < x < 4\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$P = \{1, 3\}$$

$$\therefore \complement_M P = \{-1, 0, 2\}$$

$$\because Q = \{0, 7\}$$

$$\therefore Q \cup (\complement_M P) = \{-1, 0, 2, 7\}$$

故选: D.

练21

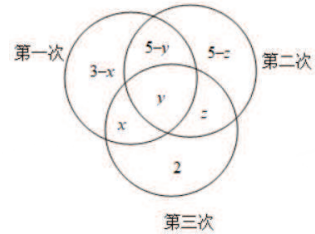
答案: A

解答:

根据题意, 前两次至少有一次得满分的学生有 $8 + 10 - 5 = 13$ (名)

因为三次测试中至少有一次得满分的学生有 15 名

所以仅第三次得满分的学生有 2 名, 如图



由题意得 $x + y + z + 2 = 12$, 即 $x + y + z = 10$

若求 $y + z$ 的最小值, 只需 x 的值最大, 当 $x = 3$ 时, $(y + z)_{\min} = 7$

故后两次均为满分的学生至少有 7 名

故选: A.

练22

答案: $\{(2, 1)\}$

解答:

由 $\frac{y-1}{x-2} = 1$ 得 $\begin{cases} y-1 = x-2 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} y = x-1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

$\therefore M = \{(x, y) \mid y = x-1 \text{ 且 } x \neq 2\}$

$\therefore$ 集合 $U = \{(x, y) \mid y = x-1\}$

$\therefore \complement_U M = \{(2, 1)\}$

故答案为: $\{(2, 1)\}$.

练23

答案: D

解答:

$\because A \cup B = A$, 故 $B \subseteq A$

当 $m = 0$ 时, $B = \emptyset$, 满足要求

当 $x = 1$ 时, $m = 1$

当 $x = -1$ 时, $m = -1$

故选: D.

练24

答案: D

解答:

由题得, $A = \{1, 4\}$

由 $A \cap B = B$, 得 $B \subseteq A$

当 $a = 0$ 时, $B = \emptyset \subseteq A$, 符合题意

当 $a \neq 0$ 时, 依题意, 得 $\frac{1}{a} = 1$ 或 $\frac{1}{a} = 4$

所以 $a = 1$ 或 $\frac{1}{4}$

综上所述, 实数 a 组成的集合是 $\left\{0, 1, \frac{1}{4}\right\}$

故选: D.

练25

答案: C

解答:

$\because$ 全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{x \mid x^2 - 5nx + m = 0, x \in U\}$

又 $\complement_U A = \{1, 4\}$, $\therefore A = \{2, 3\}$

即方程 $x^2 - 5nx + m = 0$ 的根为 2, 3

由根与系数的关系得: $\begin{cases} 2 + 3 = 5n \\ 2 \times 3 = m \end{cases}$

解得 $\begin{cases} m = 6 \\ n = 1 \end{cases}$

$\therefore m, n$ 的值分别是 6, 1

故选: C.

练26

解答:

$\because \Delta = p^2 - 4q > 0$

$\therefore$ 方程 $x^2 + px + q = 0$ 有两个不等的实数根, 即集合 T 中含有两个元素

$\because A \cap T = \emptyset$

$\therefore 1, 3, 5, 7, 9 \notin T$

又 $\because T \cap B = T$

$\therefore T \subseteq B$

$\therefore T = \{4, 10\}$, 即 4 和 10 是方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个实数根

由一元二次方程根与系数的关系, 得

$\begin{cases} 4 + 10 = -p \\ 4 \times 10 = q \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} p = -14 \\ q = 40 \end{cases}$

第4讲 简易逻辑

练1

答案：D

解答：

因为命题是一个能判断真假的陈述句，所以选项A，B，C不是命题

故选：D.

练2

答案：B

解答：

由命题的定义可得，“若两直线平行，则这两条直线没有公共点”是命题

故选：B.

练3

答案：A

解答：

A. 由 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ ，得 $x = y$ ，故正确

B. 由 $x^2 = 1$ ，得 $x = \pm 1$ ，故错误

C. 当 $x = y < 0$ 时， $\sqrt{x}$ ， $\sqrt{y}$ 无意义，故错误

D. 当 $x < y$ 时，可设 $x = -2$ ， $y = -1$ ，则 $x^2 = 4$ ， $y^2 = 1$ ，由 $4 > 1$ 可知 $x^2 > y^2$ ，故错误

故选：A.

练4

答案：C

解答：

若两个角都为 45° ，则两个角既互余又相等

所以选项A错误

正方形的四个内角都相等，但任意两个内角都不是内错角

所以选项B错误

因为 $a^2 = |a|^2$ ， $b^2 = |b|^2$

所以若 $a^2 = b^2$ ，则 $|a|^2 = |b|^2$ ，即 $|a| = |b|$

所以选项C正确

因为三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角和

所以选项D错误

故选: C.

练5

答案: D

解答:

A. 当 $x = 2$ 时, $2^x = x^2$, 故错误

B. 根据指数函数性质可知对任意的 x , 都有 $e^x > 0$, 故错误

C. 若 $a > b$, $c > d$, 根据同向可加性只能得出 $a + c > b + d$, 故错误

D. $ac^2 < bc^2$, 可知 $c \neq 0$, 可推出 $a < b$, 但反之不一定, 故是充分不必要条件, 故正确

故选: D.

练6

答案: B

解答:

A. “若 $am^2 < bm^2$, 则 $a < b$ ”的逆命题是“若 $a < b$, 则 $am^2 < bm^2$ ”, 当 $m = 0$ 时, 逆命题不成立

$\therefore$ 逆命题是假命题, 故A错误

B. 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x > 0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x \leq 0$ ”, 故B正确

C. 当命题“ p 或 q ”是真命题时, p, q 至少有一个为真命题, 不一定都为真命题, 故C错误

D. $f(x) = ax^2 + bx + c$ 是偶函数

$$\Leftrightarrow f(-x) = f(x) \Leftrightarrow a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow ax^2 - bx + c = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow b = 0$$

$\therefore$ “ $b = 0$ ”是“函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 是偶函数”的充要条件, 故D错误

故选: B.

练7

答案: A

解答:

由于对于任意实数 x, y , 不等式 $x^2 + y^2 \geq 2xy$ 都成立

于是将“ $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ”改写成全称命题为: “ $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 都有 $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ”

故选: A.

练8

解答:

命题“有些负数满足不等式 $(1+x)(1-9x)^2 > 0$ ”用“ $\exists$ ”写成特称命题为 $\exists x_0 < 0, (1+x_0)(1-9x_0)^2 > 0$

练9

答案: D

解答:

A. 显然是假命题

B. 取 $x = 1.5$, 满足 $x < 2$, 但 x 不小于1, B是假命题

C. 不存在 x , 使得 $x^2 \leq -1$

D. 对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 总有 $x^2 + 1 \geq 1$, $\therefore \forall x \in \mathbf{R}$, 使 $x^2 + 1 \neq 0$, 故D是真命题

故选: D.

练10

答案: D

解答:

A. 不正确, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 不等式不成立

B. 不正确, 当 $x = 0$ 时, 不等式不成立

C. 不正确, 当 x 是负数时, 不等式不成立

D. 正确, 当 $x = 0$ 时, 不管 y 取什么值, 等式都成立

故选: D.

练11

答案: C

解答:

命题“ $\exists x_0 \in (0, +\infty), \ln x_0 = 2x_0 + 1$ ”的否定是

“ $\forall x \in (0, +\infty), \ln x \neq 2x + 1$ ”

故选: C.

练12

答案: D

解答:

$\therefore$ 命题“ $\exists x_0 \in \mathbb{C}_R \mathbf{Q}, x_0^3 \in \mathbf{Q}$ ”是特称命题, 而特称命题的否定是全称命题

$\therefore$ “ $\exists x_0 \in \mathbb{C}_R \mathbf{Q}, x_0^3 \in \mathbf{Q}$ ”的否定是: $\forall x \in \mathbb{C}_R \mathbf{Q}, x^3 \notin \mathbf{Q}$

故选: D.

练13

答案: C

解答:

由题意得 $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$

解得 $-2 \leq a \leq 2$

所以实数 a 的取值范围是 $[-2, 2]$

故选: C.

练14

答案: A

解答:

由题意可得方程 $x_0^2 + 2ax_0 + 2 - a = 0$ 有实数根

$\Delta = 4a^2 - 4(2 - a) \geq 0$, 即 $a^2 + a - 2 \geq 0$, 解得 $a \geq 1$ 或 $a \leq -2$.

故选: A.

练15

答案: A

解答:

充分性: $2 < x < 5$ 可以推出 $1 \leq x < 6$, 充分性得证

必要性: $1 \leq x < 6$ 无法推出 $2 < x < 5$, 必要性不得证

所以 p 是 q 的充分不必要条件

故选: A.

练16

答案: D

解答:

由 $x^2 > y^2$, 解得 $|x| > |y|$

因此“ $x^2 > y^2$ ”是“ $x > y$ ”的既不充分也不必要条件

故选: D.

练17

答案: B

解答:

由两个三角形全等, 可得其面积相等, 反之不成立

∴“两个三角形面积相等”是“两个三角形全等”的必要不充分条件

故选: B.

练18

答案: C

解答:

依题意, 面积相等的两个三角形不一定相似

所以A选项不是“两个三角形相似”的充分条件, A 错误

因为相似三角形的三边对应成比例

所以B选项是“两个三角形相似”的充要条件, B 错误

全等三角形一定相似, 相似三角形不一定全等

所以C选项是“两个三角形相似”的充分不必要条件, C 正确

因为相似三角形的对应角相等

所以D选项是“两个三角形相似”的充要条件, D 错误

故选: C.

练19

答案: D

解答:

“ $x \in A$ 且 $x \notin B$ ”成立的充要条件是“ $x \in A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$ ”

因为 $B = \{x | x \geq 1\}$

所以 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x | x < 1\}$

则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{x | -1 < x < 1\}$

故选: D.

练20

答案: D

解答:

$\because$ 集合 $A = \{x | 1 < x < 2\}$, $B = \{x | x > b\}$

若 $A \subseteq B$, 则 $b \leq 1$

故 $A \subseteq B$ 的一个充分不必要条件是 $b < 1$

故选: D.

练21

答案: $[3, +\infty)$

解答:

$|x - 2| < 1$, 则 $-1 < x - 2 < 1$, 解得 $1 < x < 3$. 则 $p: x \leq m$, $q: 1 < x < 3$. 根据题意得, p 是 q 的必要不充分条件, 表示若 $1 < x < 3$, 则一定有 $x \leq m$; 若 $x \leq m$, 不一定有 $1 < x < 3$. 则 $m \geq 3$

故答案为: $[3, +\infty)$.

练22

答案: $[3, 9]$

解答:

依题意, 由 $|x - 6| \leq 4$ 得: $-4 \leq x - 6 \leq 4$, $2 \leq x \leq 10$

即 $p: 2 \leq x \leq 10$

$q: a - 1 < x < a + 1$

当 p 是 q 成立的必要不充分条件时, $(a - 1, a + 1) \subsetneq [2, 10]$

$\therefore \begin{cases} a - 1 \geq 2 \\ a + 1 \leq 10 \end{cases}$

解得 $3 \leq a \leq 9$

故答案为: $[3, 9]$.

练23

答案: A

解答:

对于 p

由 $2x^2 - x - 1 \leq 0$, 可得: $(2x + 1)(x - 1) \leq 0$

解得: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

记 $A = \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

对于 q

由 $x^2 - (2a-1)x + a(a-1) \leq 0$, 可得: $[x - (a-1)](x - a) \leq 0$

解得: $a-1 \leq x \leq a$

记 $B = [a-1, a]$

$\therefore \neg q$ 是 $\neg p$ 的必要不充分条件等价于 p 是 q 的必要不充分条件

$\therefore B \subsetneq A$

$\therefore \begin{cases} a-1 \geq -\frac{1}{2}, \text{ 且等号不同时成立} \\ a \leq 1 \end{cases}$

解得: $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

故选: A.

练24

解答:

$\therefore \neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件

$\therefore q$ 是 p 的必要不充分条件, 即 p 是 q 的充分不必要条件

由 $x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$, 得 $1 - m \leq x \leq 1 + m, m > 0$

要使 p 是 q 的充分不必要条件

则 $\begin{cases} m > 0 \\ 1 - m < -2 \text{ 或 } 1 + m \geq 10 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m > 0 \\ 1 - m \leq -2, \text{ 得 } m \geq 9 \\ 1 + m > 10 \end{cases}$

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $m \geq 9$

练25

解答:

由 $\frac{5}{x+3} > 1$ 可得: $1 - \frac{5}{x+3} < 0$

即 $\frac{x-2}{x+3} < 0$

解得 $-3 < x < 2$

即 $A = (-3, 2)$

又 $B = (-1-a, -1+a) (a > 0)$

由 p 是 q 的必要不充分条件可得: $B \subsetneq A$

$$\therefore \begin{cases} -1-a \geq -3 \\ -1+a \leq 2 \end{cases} \text{ 且等号不能同时成立}$$

解得 $a \leq 2$

又 $a > 0$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $(0, 2]$

练26

解答:

由 $\frac{1}{x-2} > 1$, 得 $2 < x < 3$, 记 $A = \{x \mid 2 < x < 3\}$

由 $|x-a| < 1$, 得 $a-1 < x < a+1$, 记 $B = \{x \mid a-1 < x < a+1\}$

$\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件

$$\therefore A \subsetneq B$$

$$\therefore \begin{cases} a+1 \geq 3 \\ a-1 \leq 2 \end{cases} \text{ 且“=”不同时成立, 即 } 2 \leq a \leq 3$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $[2, 3]$

第5讲 不等式的性质与解不等式

练1

答案: A

解答:

$$\text{取 } a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{3}$$

$$\text{则 } \frac{1}{b} = -3, \frac{1}{a} = -2, b^2 = \frac{1}{9}, a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{所以 } \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < b^2 < a^2$$

故选: A.

练2

答案: D

解答:

当 $a > b$ 时, 取 $a = 2, b = -3$

$$\therefore a^2 = 4, b^2 = 9$$

$\therefore a^2 < b^2$, 故①不正确

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{2}, \frac{1}{b} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{b}, \text{ 故②不正确}$$

$$\therefore \frac{1}{a-b} = \frac{1}{5}, \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{a-b} < \frac{1}{a}, \text{ 故③不正确}$$

故选: D.

练3

解答:

不等式可化为 $(x-3)^2 \leq 0$

故 $x = 3$

所以解集为 $\{x|x=3\}$

练4

解答:

$$4x \geq 4x^2 + 1$$

$$4x^2 - 4x + 1 \leq 0$$

$$(2x-1)^2 \leq 0$$

$$\text{令 } 2x-1=0$$

$$\text{得 } x = \frac{1}{2}$$

所以不等式的解集为 $\left\{x \mid x = \frac{1}{2}\right\}$

练5

答案: B

解答:

$$\text{不等式 } \frac{x-3}{x-1} < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0, \text{ 解得 } 1 < x < 3$$

$$\therefore \text{不等式 } \frac{x-3}{x-1} < 0 \text{ 的解集是 } \{x \mid 1 < x < 3\}$$

故选: B.

练6

答案: A

解答:

根据题意, 原不等式等价于 $(x+1)(2x-1) \leq 0$ 且 $(2x-1) \neq 0$

$$\text{解得 } -1 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$\text{即原不等式的解集为 } \left[-1, \frac{1}{2}\right)$$

故选: A.

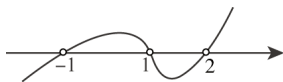
练7

答案: A

解答:

不等式 $(x-1)(x-2)(x+1) > 0$ 中

各个因式的根分别为 1, 2, -1, 如图所示



用穿根法求得它的解集为 $(-1, 1) \cup (2, +\infty)$

故选: A.

练8

解答:

$$\therefore (x-2)^2(x-3)^3(x+1) < 0$$

$$\therefore \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ (x-3)(x+1) < 0 \end{cases}$$

$$\therefore -1 < x < 2 \text{ 或 } 2 < x < 3$$

$$\therefore \text{不等式的解集为 } (-1, 2) \cup (2, 3)$$

练9

答案: B

解答:

当 $x+2 > 0$, 即 $x > -2$ 时

不等式可化为 $2x-1 > x+2$ 或 $2x-1 < -(x+2)$

$$\therefore x > 3 \text{ 或 } x < -\frac{1}{3}$$

$$\therefore x > 3 \text{ 或 } -2 < x < -\frac{1}{3}$$

当 $x+2 \leq 0$, 即 $x \leq -2$ 时, 显然成立

$$\therefore \text{不等式 } |2x-1| > x+2 \text{ 的解集是 } \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$$

故选: B.

练10

解答:

若 $2x+1 < 0$, 即 $x < -\frac{1}{2}$, 不等式恒成立

若 $2x+1 \geq 0$, 则原不等式可化为 $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 3x-4 > 2x+1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ -3x+4 > 2x+1 \end{cases}$

分别解得 $x > 5$ 或 $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{5}$

综上所述, 不等式的解集为 $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right) \cup (5, +\infty)$

练11

答案: A

解答:

$$\text{令 } 3x-y = a(x+y) + b(x-y) = (a+b)x + (a-b)y$$

$$\text{令 } \begin{cases} a+b=3 \\ a-b=-1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

所以 $3x - y = (x + y) + 2(x - y)$

由题意得 $-1 + 2 \times 1 \leq 3x - y \leq 1 + 2 \times 3$

即 $1 \leq 3x - y \leq 7$

所以 $3x - y$ 的取值范围是 $[1, 7]$

故选: A.

练12

答案: $[3, 8]$

解答:

$$\because z = -\frac{1}{2}(x + y) + \frac{5}{2}(x - y)$$

$$\therefore 3 \leq -\frac{1}{2}(x + y) + \frac{5}{2}(x - y) \leq 8$$

$$\therefore z \in [3, 8]$$

故答案为: $[3, 8]$.

练13

答案: B

解答:

$$\because \text{角 } \alpha, \beta \text{ 满足 } -\frac{\pi}{3} < -\alpha < \beta < \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \alpha + \beta > 0, \quad -\alpha - \beta > -\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{13\pi}{12}$$

$$\therefore \alpha + \beta < \frac{13\pi}{12}$$

$$\text{即 } 0 < \alpha + \beta < \frac{13\pi}{12}$$

故选: B.

练14

答案: D

解答:

$$\because -\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{4} < \frac{\beta}{2} \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\text{两式相加可得 } -\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore -\frac{\pi}{4} < \frac{\beta}{2} \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore -\frac{\pi}{4} \leq -\frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{又 } \because -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}, \quad \alpha < \beta$$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\alpha - \beta}{2} < 0$$

故选：D.

练15

答案： $\left(\frac{1}{3}, 4\right)$

解答：

$$\because 15 < n < 36$$

$$\therefore \frac{1}{36} < \frac{1}{n} < \frac{1}{15}$$

$$\because 12 < m < 60$$

$$\therefore 12 \times \frac{1}{36} < \frac{m}{n} < 60 \times \frac{1}{15}, \text{ 即 } \frac{1}{3} < \frac{m}{n} < 4$$

$$\therefore \frac{m}{n} \text{ 的取值范围是 } \left(\frac{1}{3}, 4\right)$$

故答案为： $\left(\frac{1}{3}, 4\right)$.

练16

答案：D

解答：

$$\because \text{关于 } x \text{ 的不等式 } mx^2 + 8mx + 28 < 0 \text{ 的解集是 } \{x \mid -7 < x < -1\}$$

$$\therefore \text{方程 } mx^2 + 8mx + 28 = 0 \text{ 的两根为 } -7, -1$$

$$\therefore (-7) \times (-1) = \frac{28}{m}$$

$$\therefore m = 4$$

故选：D.

练17

答案：24

解答：

$$\because \text{关于 } x \text{ 的不等式 } ax^2 + bx - 2 > 0 \text{ 的解集是 } \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

$$\therefore -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ 是一元二次方程 } ax^2 + bx - 2 = 0 \text{ 的根且 } a > 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{b}{a}, \quad -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = -\frac{2}{a}$$

$$\text{解得 } a = 12, \quad b = 2$$

$$\therefore ab = 24$$

故答案为：24.

练18

答案: C

解答:

依题意, 不等式 $ax^2 + bx - 2 < 0$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\right\}$ $\therefore -\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 是方程 $ax^2 + bx - 2 = 0$ 的两根

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{a} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 12 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\therefore b(a - b) = 2 \times (12 - 2) = 20$$

故选: C.

练19

解答:

当 $-1 < a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < -1\right\}$ 当 $a = -1$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$ 当 $a > 0$ 或 $a < -1$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid -1 < x < \frac{1}{a}\right\}$ **练20**

解答:

该不等式可化为 $(x - a)(x - 1) < 0$ ① $a > 1$ 时, 不等式的解为 $1 < x < a$ ② $a = 1$ 时, 不等式无解③ $a < 1$ 时, 不等式的解为 $a < x < 1$ 综上所述, 当 $a > 1$ 时, 不等式的解集为 $(1, a)$ 当 $a = 1$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$ 当 $a < 1$ 时, 不等式的解集为 $(a, 1)$ **练21**

解答:

当 $m = 0$ 时, 原不等式为 $-x \geq 0$, 解集为 $(-\infty, 0]$ 当 $m > 0$ 时, 原不等式化为 $\left(x - \frac{1}{m}\right)(x + m) \geq 0$

$$\text{又 } \frac{1}{m} > -m$$

所以原不等式的解集为 $(-\infty, -m] \cup \left[\frac{1}{m}, +\infty\right)$

当 $m < 0$ 时, 原不等式化为 $\left(x - \frac{1}{m}\right)(x + m) \leq 0$

又 $-m > \frac{1}{m}$

所以原不等式的解集为 $\left[\frac{1}{m}, -m\right]$

综上所述: 当 $m = 0$ 时, 原不等式的解集为 $(-\infty, 0]$

当 $m > 0$ 时, 原不等式的解集为 $(-\infty, -m] \cup \left[\frac{1}{m}, +\infty\right)$

当 $m < 0$ 时, 原不等式的解集为 $\left[\frac{1}{m}, -m\right]$

练22

解答:

①当 $a = 0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x \mid x \geq 0\}$

②当 $a > 0$ 时, 原不等式可化为 $\left(x - \frac{2}{a}\right)(x - a) \leq 0$

当 $\frac{2}{a} < a$ 时, 即 $a > \sqrt{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{2}{a} \leq x \leq a\right\}$

当 $\frac{2}{a} > a$ 时, 即 $0 < a < \sqrt{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid a \leq x \leq \frac{2}{a}\right\}$

当 $a = \sqrt{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\{x \mid x = \sqrt{2}\}$

③当 $a < 0$ 时, 原不等式可化为 $\left(x - \frac{2}{a}\right)(x - a) \geq 0$

当 $\frac{2}{a} < a$, 即 $-\sqrt{2} < a < 0$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x \geq a \text{ 或 } x \leq \frac{2}{a}\right\}$

当 $\frac{2}{a} > a$, 即 $a < -\sqrt{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x \geq \frac{2}{a} \text{ 或 } x \leq a\right\}$

当 $a = -\sqrt{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\mathbf{R}$

综上所述, 当 $a < -\sqrt{2}$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid x \geq \frac{2}{a} \text{ 或 } x \leq a\right\}$

当 $a = -\sqrt{2}$ 时, 不等式的解集为 $\mathbf{R}$

当 $-\sqrt{2} < a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid x \geq a \text{ 或 } x \leq \frac{2}{a}\right\}$

当 $a = 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid x \geq 0\}$

当 $0 < a < \sqrt{2}$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid a \leq x \leq \frac{2}{a}\right\}$

当 $a = \sqrt{2}$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid x = \sqrt{2}\}$

当 $a > \sqrt{2}$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{2}{a} \leq x \leq a\right\}$

练23

答案: A

解答:

 $x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4$ 的最小值为 4所以 $x^2 - 2x + 5 \geq a^2 - 3a$ 对任意实数 x 恒成立, 只需 $a^2 - 3a \leq 4$, 解得 $-1 \leq a \leq 4$

故选: A.

练24答案: $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$

解答:

由于二次函数 $f(x) = -3x^2 + 2x + t$ 的图象的对称轴为 $x = \frac{1}{3}$, 开口向下故函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值为 $f\left(\frac{1}{3}\right) = t + \frac{1}{3}$ 再由 $t + \frac{1}{3} \leq 0$, 求得 $t \leq -\frac{1}{3}$ 故答案为: $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$.**练25**答案: $(-\infty, 2]$

解答:

不等式 $x^2 - kx + k - 1 > 0$ 可化为 $(1 - x)k > 1 - x^2$ $\because x \in (1, 2)$ $\therefore k < \frac{1 - x^2}{1 - x} = 1 + x$ $\because y = 1 + x$ 是增函数 $\therefore k \leq 1 + 1 = 2$ 即实数 k 的取值范围是 $(-\infty, 2]$ 故答案为: $(-\infty, 2]$.**练26**

解答:

(1) 原不等式为 $(x - 1)p + (x - 1)^2 > 0$ 当 $x = 1$ 时, 有 $(x - 1)p + (x - 1)^2 = 0$, 不等式不成立, 则必有 $x \neq 1$ 当 $x \neq 1$ 时, 令 $f(p) = (x - 1)p + (x - 1)^2$, $f(p)$ 是关于 p 的一次函数此时其定义域为 $[-2, 2]$, 由一次函数的单调性知

$$\begin{cases} f(-2) = (x-1)(x-3) > 0 \\ f(2) = (x-1)(x+1) > 0 \end{cases}$$

解得 $x < -1$ 或 $x > 3$

故 x 的取值范围是 $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$

(2) 不等式可化为 $(x-1)p > -x^2 + 2x - 1$

$$\because 2 \leq x \leq 4$$

$$\therefore x-1 > 0$$

$$\therefore p > \frac{-x^2 + 2x - 1}{x-1} = 1-x \text{ 对 } x \in [2, 4] \text{ 恒成立}$$

所以 $p > (1-x)_{\max}$

当 $2 \leq x \leq 4$ 时, $(1-x)_{\max} = -1$

于是 $p > -1$

故 p 的范围是 $\{p \mid p > -1\}$

第 6 讲 均值不等式

练1

答案: C

解答:

$$\because x, y \in (0, +\infty), x + y = 10$$

$$\therefore 10 = x + y \geq 2\sqrt{xy}, \text{ 当且仅当 } x = y = 5 \text{ 时, 等号成立}$$

$$\therefore xy \leq 25$$

$$\therefore xy \text{ 的最大值为 } 25$$

故选: C.

练2

答案: 6

解答:

$$\because xy > 0$$

$$\therefore \frac{x}{y} + \frac{9y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{9y}{x}} = 6$$

当且仅当 $x = 3y$ 时取等号

$$\therefore \frac{x}{y} + \frac{9y}{x} \text{ 的最小值为: } 6$$

故答案为: 6.

练3

答案: A

解答:

$$\because b > a$$

$$\therefore b - a > 0, \frac{b - a + 1}{b - a} + b - a = 1 + \frac{1}{b - a} + b - a$$

$$\geq 1 + 2\sqrt{\frac{1}{b - a} \cdot (b - a)} = 1 + 2 = 3$$

当 $b - a = 1$ 时等号成立, 即 $\frac{b - a + 1}{b - a} + b - a$ 的最小值为 3

故选: A.

练4

答案: B

解答:

因为 x, y 为正数

$$\text{所以 } (x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \right) = 1 + 4 + \frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \geq 1 + 4 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{4x}{y}} = 9$$

当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{4x}{y}$ 时取等号

$\therefore$ 最小值为 9

故选: B.

练5

答案: 1

解答:

因为 $a > 3$

所以 $a - 3 > 0$

$$\text{所以 } \frac{4}{a-3} + \frac{a-3}{16} \geq 2\sqrt{\frac{4}{a-3} \cdot \frac{a-3}{16}} = 1, \text{ 等号成立当且仅当 } \frac{4}{a-3} = \frac{a-3}{16}, \text{ 即 } a = 11$$

所以 $\frac{4}{a-3} + \frac{a-3}{16}$ 的最小值是 1

故答案为: 1.

练6

答案: B

解答:

A. 当 $0 < x < 1$ 时, $\lg x < 0$, $\lg x + \frac{1}{\lg x} \geq 2$ 不成立

由基本不等式 B 正确

C. 最小值是 $\frac{5}{2}$

D. $y = x - \frac{1}{x}$ 在 $0 < x \leq 2$ 时单调递增, 当 $x = 2$ 时取最大值

故选: B.

练7

答案: D

解答:

A. $y = x + \frac{1}{x}$, 定义域为 $\{x|x \neq 0\}$

所以值域为 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

所以无最小值, A 错误

B. $y = \sin x + \frac{4}{\sin x} \geq 4$, 当 $\sin x = 2$ 时取等号, 而 $x \in (0, \pi)$ 时 $\sin x \in (0, 1)$, 故等号取不到, B 错误

C. $y = x^2 + 1$ 的最小值为 1, C 错误

故选: D.

练 8

答案: C

解答:

A, B 选项中, x 和 x^3 为负时, 它们的值小于 0

D 选项中, $\sqrt{x^2 + 2} > 0$, 故 $\sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \geq 2$, 但取等条件为 $\sqrt{x^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$

即 $x^2 = -1$, 故取不到等号

$\sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$ 的最小值不为 2

C 选项中, $|x| > 0$, 故 $|x| + \frac{1}{|x|} \geq 2$

当且仅当 $|x| = \frac{1}{|x|}$

即 $x = \pm 1$ 时, “=” 成立

故选: C.

练 9

答案: A

解答:

A. $\because \sqrt{x} > 0$

$\therefore \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号

正确

B. 因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

所以 $\sin x \in (0, 1)$

$\sin x + \frac{1}{\sin x} \geq 2$, 当且仅当 $\sin x = \frac{1}{\sin x}$ 时取等号

又 $\sin x \in (0, 1)$

所以 $\sin x + \frac{1}{\sin x} > 2$, 故 B 项不符合题意

C. $\sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \geq 2$, 当 $\sqrt{x^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$ 时取等号

而 $\sqrt{x^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$ 无实数根

所以 $\sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} > 2$, 故 C 项不符合题意

D. 当 $x < 0$ 时, $x < 0$, $\frac{1}{x} < 0$, $x + \frac{1}{x}$ 无最小值, 故 D 项不符合题意

故选: A.

练10

答案: A

解答:

① $y = x + \frac{1}{x}$ ($x \geq 2$) 函数单调递增, 因此 $y \geq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, 因此最小值不为2

② $y = \tan x + \frac{1}{\tan x}$, 取 $x = -\frac{\pi}{4}$ 时, $y = -2$, 因此最小值不为2

③ $y = x - 3 + \frac{1}{x-3}$, $x < 3$ 时, $y < 0$, 因此最小值不为2

其中最小值为2的个数有0个

故选: A.

练11

答案: 8

解答:

依题意, $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 4$

$\therefore ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 4$ (当且仅当 $a = b = 2$ 时, 等号成立)

$\therefore a^2 + b^2 = 16 - 2ab \geq 16 - 8 = 8$ (当且仅当 $a = b = 2$ 时, 等号成立)

$\therefore a^2 + b^2$ 的最小值是8

故答案为: 8.

练12

答案: B

解答:

因为 $x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 = 1$, 且 $0 < x < 1$

由均值不等式可得 $x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 \geq 2x\sqrt{1-x^2}$

所以 $x\sqrt{1-x^2} \leq \frac{1}{2}$ (当且仅当 $x = \sqrt{1-x^2}$, 即 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立)

则最大值为 $\frac{1}{2}$

故选: B.

练13

答案: 16

解答:

$\therefore a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = 1$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{1}{a} + \frac{9}{b} &= (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{9}{b} \right) \\
 &= 10 + \frac{b}{a} + \frac{9a}{b} \\
 &\geq 10 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{9a}{b}} \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

当且仅当 $b = 3a = \frac{3}{4}$ 时取等号

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{9}{b}$ 的最小值是 16

故答案为: 16.

练14

答案: $9 + 6\sqrt{2}$

解答:

因为 x, y 都是正数, 且 $3\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right) = 1$

$$\text{则 } x + y = 3(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \right) = 3 \left(3 + \frac{y}{x} + \frac{2x}{y} \right) = 9 + 3 \left(\frac{y}{x} + \frac{2x}{y} \right) \geq 9 + 6\sqrt{2}$$

当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{2x}{y}$ 且 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{3}$ 时取等号

故答案为: $9 + 6\sqrt{2}$.

练15

答案: C

解答:

$\because a, b \in \mathbf{R}_+, \text{ 且 } 3a + 2b = 2$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}(3a + 2b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(3 + 2 + \frac{2b}{a} + \frac{3a}{b} \right)$$

$$\geq \frac{1}{2} \left(5 + 2\sqrt{\frac{2b}{a} \cdot \frac{3a}{b}} \right) = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{2}$$

当且仅当 $\frac{2b}{a} = \frac{3a}{b}$ 时取等号

故 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{2}$

故选: C.

练16

答案: D

解答:

$$\because x > 0, y > 0, x + y = 1$$

$$\therefore x + 1 + y = 2$$

$$\therefore \frac{4}{x+1} + \frac{1}{y} = \frac{x+1+y}{2} \cdot \left(\frac{4}{x+1} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + 4 + \frac{4y}{x+1} + \frac{x+1}{y} \right) \geq \frac{1}{2} (5 + 2\sqrt{4}) = \frac{9}{2} \quad (\text{当且仅当 } x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3} \text{ 时取等号})$$

故选: D.

练17

答案: $\frac{2}{3}$

解答:

$$\because a > 0, b > 2, \text{ 且 } a + b = 3$$

$$\therefore a + b - 2 = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b-2} \right) [a + (b-2)] &= 4 + 1 + \left(\frac{4(b-2)}{a} + \frac{a}{b-2} \right) \\ &\geq 5 + 2\sqrt{\frac{4(b-2)}{a} \cdot \frac{a}{b-2}} \\ &= 9 \end{aligned}$$

当且仅当 $2(b-2) = a$ 时取等号

$$\text{联立} \begin{cases} 2(b-2) = a \\ a + b = 3 \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = \frac{2}{3}$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

练18

答案: C

解答:

$$\because \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \sqrt{ab}$$

$$\therefore a > 0, b > 0$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}} \quad (\text{当且仅当 } b = 2a \text{ 时取等号})$$

$$\therefore \sqrt{ab} \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$$

解得 $ab \geq 2\sqrt{2}$, 即 ab 的最小值为 $2\sqrt{2}$

故选: C.

练19

答案: B

解答:

 $\because a, b$ 是正数

$$\therefore a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\because ab = a + b + 3$$

$$\therefore ab \geq 2\sqrt{ab} + 3 \text{ (当且仅当 } a = b \text{ 时取等)}$$

$$\text{令 } \sqrt{ab} = t \text{ (} t > 0 \text{) , 则 } t^2 - 2t - 3 \geq 0$$

$$\text{解得 } t \geq 3 \text{ 或 } t \leq -1 \text{ (舍去)}$$

$$\therefore ab \geq 9$$

故选: B.

练20

答案: B

解答:

由基本不等式可知

$$2x + y = 8 - 2x \cdot y \geq 8 - \left(\frac{2x + y}{2}\right)^2 \text{ (当且仅当 } 2x = y \text{ 时取等号)}$$

$$\text{整理得 } (2x + y)^2 + 4(2x + y) - 32 \geq 0$$

$$\text{即 } (2x + y - 4)(2x + y + 8) \geq 0$$

$$\text{又 } 2x + y > 0$$

$$\text{所以 } 2x + y \geq 4 \text{ (当且仅当 } 2x = y \text{ 时取等号)}$$

则 $2x + y$ 的最小值是 4

故选: B.

练21

答案: D

解答:

$$\because x > 0, y > 0, z > 0, x - y + 2z = 0$$

$$\therefore y = x + 2z, \frac{xz}{y^2} = \frac{xz}{(x + 2z)^2} = \frac{xz}{x^2 + 4z^2 + 4xz} \leq \frac{xz}{2x \cdot 2z + 4xz} = \frac{xz}{8xz} = \frac{1}{8}$$

当且仅当 $x = 2z$ 时取等号

$$\therefore \frac{xz}{y^2} \text{ 的最大值为 } \frac{1}{8}$$

故选: D.

练22

答案: $\frac{8}{9}$

解答:

$$\because x - 3y + 2z = 0$$

$$\therefore y = \frac{x + 2z}{3}$$

$$\therefore \frac{y^2}{xz} = \frac{x^2 + 4z^2 + 4xz}{9xz} \geq \frac{4zx + 4xz}{9xz} = \frac{8}{9}, \text{ 当且仅当 } x = 2z \text{ 时取“=”}$$

故答案为: $\frac{8}{9}$.

练23

答案: D

解答:

根据基本不等式 $a + b = 1 \geq 2\sqrt{ab}$

可得到 $ab \leq \frac{1}{4}$, 即 $\frac{1}{ab} \geq 4$, 当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时取等号

$$\text{所以 } \left(\frac{1}{a^2} - 1\right) \left(\frac{1}{b^2} - 1\right) = \frac{1}{a^2 b^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + 1 = \left(\frac{1}{ab}\right)^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + 1 = \frac{2}{ab} + 1 \geq 9$$

故最小值为9

故选: D.

练24

答案: B

解答:

$$\because \text{正实数 } x, y \text{ 满足 } x^2 + y^2 = 1$$

$$\therefore 1 \geq 2xy$$

$$\therefore xy \leq \frac{1}{2}, \text{ 当且仅当 } x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时取等号}$$

$$\therefore 0 \leq (xy)^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\therefore (1 - xy)(1 + xy) = 1 - (xy)^2$$

$$\therefore \frac{3}{4} \leq (1 - xy)(1 + xy) \leq 1$$

$$\therefore (1 - xy)(1 + xy) \text{ 有最小值 } \frac{3}{4} \text{ 和最大值 } 1$$

故选: B.

练25

答案: A

解答:

$$\because x + y + 2z = 1$$

$$\therefore x + y = 1 - 2z$$

$$\because x^2 + y^2 + 2z^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = \frac{1}{2} - 2z^2$$

$$\because x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}, \text{ 当且仅当 } x = y \text{ 时取等号}$$

$$\therefore (1 - 2z)^2 \leq 1 - 4z^2$$

$$\therefore 2z^2 - z \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq z \leq \frac{1}{2}$$

故选: A.

练26

答案: $\left[\frac{11}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{11}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$

解答:

$$\because a + b = 2c - 1$$

$$\therefore (a + b)^2 = (2c - 1)^2 = 4c^2 - 4c + 1$$

$$\text{又} \because a^2 + b^2 = c^2 + 2c - 3$$

$$\therefore 2ab = (4c^2 - 4c + 1) - (c^2 + 2c - 3) = 3c^2 - 6c + 4$$

$$\therefore ab = \frac{3c^2 - 6c + 4}{2}$$

$$\because c^2 + 2c - 3 = a^2 + b^2 \geq 2ab = 3c^2 - 6c + 4, \text{ 当且仅当 } a = b \text{ 时取等号}$$

$$\text{整理得 } 2c^2 - 8c + 7 \leq 0$$

$$\text{解得 } \frac{4 - \sqrt{2}}{2} \leq c \leq \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\text{当 } \frac{4 - \sqrt{2}}{2} \leq c \leq \frac{4 + \sqrt{2}}{2} \text{ 时, } \frac{11}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq \frac{3c^2 - 6c + 4}{2} \leq \frac{11}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore ab \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{11}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{11}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{故答案为: } \left[\frac{11}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{11}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right].$$

第7讲 基础检测卷

练1

答案: C

解答:

集合

$$M = \{y \mid y = x^2 - 2x - 1, x \in \mathbf{R}\} = \{y \mid y = (x-1)^2 - 2, x \in \mathbf{R}\} = \{y \mid y \geq -2\}$$

$$\therefore \text{集合 } P = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$$

$$\therefore P \subseteq M$$

故选: C.

练2

答案: B

解答:

$$\because A = \{-1, 0\}, B = \{0, 2\}$$

$$\therefore A \cup B = \{-1, 0, 2\}$$

$$\text{由全集 } U = \{-3, -1, 0, 2, 4\}, \text{ 得 } \complement_U(A \cup B) = \{-3, 4\}$$

故选: B.

练3

答案: C

解答:

由题意, $A = \{0, 1, 2\}$, 集合 A 有 3 个元素, 真子集有 $2^3 - 1 = 7$ (个)

故选: C.

练4

答案: B

解答:

$$\text{由 } \frac{1}{x} < 2 \text{ 得 } x < 0 \text{ 或 } x > \frac{1}{2}$$

则 $\frac{1}{x} < 2$ 是 $x > \frac{1}{2}$ 成立的必要不充分条件

故选: B.

练5

答案: B

解答:

命题 p : $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + x_0 + 1 = 0$

命题 $\neg p$ 为 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \neq 0$

故选: B.

练6

答案: -14

解答:

$\therefore$ 不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\right\}$

$\therefore -\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 为方程 $ax^2 + bx + 2 = 0$ 的两个实根

$\therefore$ 根据韦达定理有 $\begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{b}{a} \\ -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{a} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = -12 \\ b = -2 \end{cases}$

$\therefore a + b = -14$

故答案为: -14.

练7

答案: $\frac{1}{16}$

解答:

$$\begin{aligned} xy &= \frac{1}{4}x \cdot 4y \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{x+4y}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

当且仅当 $x = 4y = \frac{1}{2}$ 时取等号

故答案为: $\frac{1}{16}$.

练8

答案: B

解答:

$\because m > 0, n > 0, \frac{1}{m} + \frac{1}{2n} = 1$

$\therefore m + 2n = (m + 2n) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2n} \right) = 2 + \frac{2n}{m} + \frac{m}{2n} \geq 2 + 2 = 4$

当且仅当 $\frac{2n}{m} = \frac{m}{2n}$, 即 $m = 2n$ 时, 取“=”

故选: B.

练9

解答:

(1) 由命题 $p: |x - a| < 4$, 则命题 p 的否定 $\neg p: |x - a| \geq 4$

故答案为: $\neg p: |x - a| \geq 4$

(2) 由 $p: |x - a| < 4$, 得 $a - 4 < x < a + 4$, 即 $p: A = (a - 4, a + 4)$

由命题 $q: (x - 2)(x - 3) < 0$, 得 $2 < x < 3$, 即 $q: B = (2, 3)$

由 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件

即 q 是 p 的充分不必要条件

即 $B \subsetneq A$

则 $\begin{cases} a + 4 \geq 3 \\ a - 4 \leq 2 \end{cases}$

解得: $-1 \leq a \leq 6$

故实数 a 的取值范围为: $-1 \leq a \leq 6$

故答案为: $-1 \leq a \leq 6$

第 8 讲 中档检测卷

练1

答案: D

解答:

$$\because \complement_U B = \{x \mid x < 3 \text{ 或 } x \geq 5\}$$

$$\therefore A \cap (\complement_U B) = \{x \mid 0 < x < 3\}$$

故选: D.

练2

答案: B

解答:

$$\because \text{全集 } U = \mathbf{R}, A = \left\{x \mid -4 < x < \frac{1}{2}\right\}, B = \{x \mid x \leq -4\}$$

$$\therefore A \cup B = \left\{x \mid x < \frac{1}{2}\right\}$$

$$\therefore \complement_U (A \cup B) = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{2}\right\} = C$$

故选: B.

练3

答案: C

解答:

$$\because \text{全集 } U = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{x \mid x^2 - 5nx + m = 0, x \in U\}$$

$$\text{又 } \complement_U A = \{1, 4\}, \therefore A = \{2, 3\}$$

即方程 $x^2 - 5nx + m = 0$ 的根为 2, 3

$$\text{由根与系数的关系得: } \begin{cases} 2 + 3 = 5n \\ 2 \times 3 = m \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m = 6 \\ n = 1 \end{cases}$$

$\therefore m, n$ 的值分别是 6, 1

故选: C.

练4

答案: B

解答:

由“ $x \neq y$ ”推不出“ $|x| \neq |y|$ ”, 例如 $x = 1, y = -1$

由“ $|x| \neq |y|$ ”，一定有 $x \neq y$

因此“ $x \neq y$ ”是“ $|x| \neq |y|$ ”的必要不充分条件

故选：B.

练5

答案：D

解答：

不等式 $x^3 - x \geq 0$ ，可得 $x(x^2 - 1) \geq 0$

即： $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$ 解得 $-1 \leq x \leq 0$ 或 $x \geq 1$

故选：D.

练6

答案： $3 - 2\sqrt{3}$

解答：

$\because x > 0$

$$\therefore y = 3 - 3x - \frac{1}{x} = 3 - \left(3x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\leq 3 - 2\sqrt{3x \cdot \frac{1}{x}} = 3 - 2\sqrt{3}$$

当且仅当 $3x = \frac{1}{x}$ ，即 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，取等号

故函数 $y = 3 - 3x - \frac{1}{x}$ 的最大值是 $3 - 2\sqrt{3}$

故答案为： $3 - 2\sqrt{3}$.

练7

答案： $\frac{9}{4}$

解答：

根据题意， $x > y > 0$ 且 $x + y = 2$

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{4}{x+3y} + \frac{1}{x-y} &= \frac{2x+2y}{4} \cdot \left(\frac{4}{x+3y} + \frac{1}{x-y} \right) = \frac{1}{4}[(x+3y) + (x-y)] \left(\frac{4}{x+3y} + \frac{1}{x-y} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(5 + \frac{4(x-y)}{x+3y} + \frac{x+3y}{x-y} \right) \geq \frac{1}{4}(5+4) = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

当且仅当 $(x+3y) = 2(x-y)$

即 $x = \frac{5}{3}$ ， $y = \frac{1}{3}$ 时等号成立

故答案为： $\frac{9}{4}$.

练8

答案: $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

解答:

$$\because x^2 + xy + 4y^2 = 1$$

$$\therefore x^2 + 4xy + 4y^2 = 1 + 3xy$$

$$\therefore (x + 2y)^2 = 1 + 3xy$$

$$\because x \cdot 2y \leq \left(\frac{x + 2y}{2}\right)^2$$

$$\therefore xy \leq \frac{1}{8}(x + 2y)^2$$

$$\therefore 3xy \leq \frac{3}{8}(x + 2y)^2$$

$$\therefore 1 + 3xy \leq 1 + \frac{3}{8}(x + 2y)^2$$

$$\therefore (x + 2y)^2 \leq 1 + \frac{3}{8}(x + 2y)^2$$

$$\therefore (x + 2y)^2 \leq \frac{8}{5}$$

$$\therefore -\frac{2\sqrt{10}}{5} \leq x + 2y \leq \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

当且仅当 $x = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $y = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 时, $x + 2y = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

$\therefore x + 2y$ 的最大值是 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

故答案为: $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

练9

解答:

$$y = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right)$$

$$= ab + \frac{1}{ab} + \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$$

$$= ab + \frac{1}{ab} + \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab}$$

$$= ab + \frac{2}{ab} - 2$$

$$\because a + b = 1$$

$$\therefore ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ 当且仅当 } a = b = \frac{1}{2} \text{ 时取等号}$$

设 $ab = x$, 则 $0 < x \leq \frac{1}{4}$

$$\text{则 } y = x + \frac{2}{x} - 2$$

函数 $f(x) = x + \frac{2}{x} - 2$, 在 $\left(0, \frac{1}{4}\right]$ 上单调递减

$$\therefore y_{\min} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + 8 - 2 = \frac{25}{4}$$

故 $y = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right)$ 的最小值 $\frac{25}{4}$