

高三 数学

一轮闯关训练-解析几何

Math

产品亮点

- ▶ 分层合理效率高
- ▶ 精选分类覆盖广
- ▶ 题目典型收获多



目录



第 1 讲

直线与圆	1
------	---

第 2 讲

椭圆	7
----	---

第 3 讲

双曲线	13
-----	----

第 4 讲

抛物线	19
-----	----

第 5 讲

直线与圆锥曲线	25
---------	----

第 6 讲

基础测试卷-解析几何	32
------------	----

第 7 讲

中档测试卷-解析几何

34

参考答案与解析

37

第 1 讲

直线与圆

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）.

直线倾斜角的定义

练1 (★★☆☆☆) (2019·北京昌平区期末)

直线 $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ 的倾斜角为 ()

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

根据直线求参数

练2 (★☆☆☆☆) (2019·吉林期中)

已知直线 l 经过点 $A(1, 3)$, $B(-2, -5)$, 则直线 l 的斜率为 ()

A. $\frac{8}{3}$

B. $-\frac{8}{3}$

C. 2

D. -2

练3 (★☆☆☆☆) (2018·四川绵阳市月考【文】)

直线 $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ 在 y 轴上的截距为 ()

A. 3

B. -3

C. 4

D. -4

求直线方程

练4 (★☆☆☆☆) (2019·河北邢台市月考)

经过点 $(-1, 2)$ 且斜率为2的直线方程为()

A. $2x - y + 4 = 0$

B. $2x - y - 5 = 0$

C. $2x - y - 4 = 0$

D. $2x - y + 5 = 0$

练5 (★★☆☆☆) (2019·天津和平区期末)

经过 $A(0, 2)$, $B(3, -3)$ 两点的直线方程为()

A. $3x + 5y - 10 = 0$

B. $3x + 5y + 6 = 0$

C. $5x + 3y - 6 = 0$

D. $5x + 3y + 6 = 0$

练6 (★☆☆☆☆) (2018·山东泰安市期末)

在 x 轴, y 轴上的截距分别为2, -3 的直线方程为()

A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

B. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$

C. $\frac{y}{3} - \frac{x}{2} = 1$

D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$

直线交点坐标计算

练7 (★★☆☆☆) (2018·山东淄博市月考)

直线 $x - y + 2 = 0$ 与 $x + y - 2 = 0$ 的交点坐标是()

A. $(0, 2)$

B. $(2, 0)$

C. $(1, 1)$

D. $(-1, 1)$

中点坐标计算

练8 (★☆☆☆☆)

已知 $M(0, 7)$, $N(3, 5)$, 则 MN 的中点坐标为()

A. $\left(\frac{7}{2}, 4\right)$

B. $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$

C. $\left(\frac{3}{2}, 6\right)$

D. $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

圆的方程

练9 (★★☆☆☆) (2019·宁夏石嘴山市期中)

圆心为点 $C(-3, 4)$, 且半径为 $\sqrt{5}$ 的圆的方程为 ()

- A. $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 5$ B. $(x+3)^2 + (y-4)^2 = \sqrt{5}$
 C. $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 5$ D. $(x-3)^2 + (y+4)^2 = \sqrt{5}$

点和圆的位置关系

练10 (★☆☆☆☆)

下面各点在圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 上的是 ()

- A. $(1, 1)$ B. $(2, 1)$ C. $(0, 0)$ D. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分)。

三点共线求参

练11 (★★☆☆☆) (2018·广西桂林市期末)

已知三点 $A(1, -1)$, $B(a, 3)$, $C(4, 5)$ 在同一直线上, 则实数 a 的值是 ()

- A. 1 B. 3 C. 4 D. 5

直线位置关系的应用

练12 (★★☆☆☆) (2018·四川成都市期中【文】)

已知两点 $A(-1, 2)$, $B(1, 3)$, 若直线 l 与直线 AB 平行, 则 l 的斜率为 ()

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

练13 (★★☆☆☆) (2019·黑龙江牡丹江市期末)

过点 $A(3, 3)$ 且垂直于直线 $4x + 2y - 7 = 0$ 的直线方程为 ()

- A. $y = \frac{1}{2}x + 2$ B. $y = -2x + 7$ C. $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ D. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

根据交点求参数

练14 (★★☆☆☆) (2019·河北保定市期末)

直线 $l_1: 2x - by - 6 = 0$ 与直线 $l_2: x + y + a = 0$ 的交点为 $(2, 2)$, 则 $a + b =$ _____.

点到直线距离公式的应用

练15 (★★☆☆☆)

已知点 $(3, m)$ 到直线 $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$ 的距离等于1, 则 m 的值等于()

- A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

平行直线距离公式的应用

练16 (★★☆☆☆) (2018·青海海东市期中)

两条平行直线 $3x - 4y - 3 = 0$ 和 $mx - 8y + 5 = 0$ 之间的距离是()

- A. $\frac{8}{5}$ B. $\frac{11}{10}$ C. $\frac{15}{7}$ D. $\frac{4}{5}$

圆的直径式方程

练17 (★★☆☆☆) (2018·浙江嘉兴市模拟)

已知 $A(1, 0)$, $B(0, 3)$ 两点, 则以 AB 为直径的圆的方程是()

- A. $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$ B. $x^2 + y^2 + x + 3y = 0$
C. $x^2 + y^2 + x - 3y = 0$ D. $x^2 + y^2 - x + 3y = 0$

直线和圆的位置关系判断

练18 (★★★★☆) (2018·山东潍坊市期末)

直线 $4x - 3y + 6 = 0$ 与圆 $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$ 的位置关系是()

- A. 相离 B. 相切 C. 相交且过圆心 D. 相交但不过圆心

圆的切线方程计算

练19 (★★★☆☆) (2018·四川眉山市期中【理】)

圆 $C: x^2 + y^2 - 4x = 0$ 在点 $P(1, \sqrt{3})$ 处的切线方程为 ()

- A. $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ B. $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$ C. $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$ D. $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$

直线和圆相交弦长计算

练20 (★★☆☆☆) (2020·宁夏吴忠市月考)

直线 $x + 2y = 0$ 被曲线 $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ 所截得的弦长等于_____.

提能力 本模块适合90-120分水平学生 (满分150分) .

关于直线对称问题

练21 (★★★☆☆)

直线 $2x - 4y + 9 = 0$ 关于点 $A(2, 2)$ 对称的直线方程为 ()

- A. $2x - 4y - 1 = 0$ B. $2x + 4y - 1 = 0$ C. $2x + 4y + 1 = 0$ D. $4x + 2y - 1 = 0$

直线过定点问题

练22 (★★☆☆☆) (2018·北京海淀区中考模拟)

若 $a + b = 1$, 则直线 $2ax - by = 1$ 恒过定点_____.

切点弦问题

练23 (★★★☆☆) (2017·福建泉州市月考)

过点 $P(1, \sqrt{3})$ 作圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的两条切线, 切点分别为 A 和 B , 则弦长 $|AB| = ()$

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. 4

弦长取值范围问题

练24 (★★★☆☆) (2017·福建漳州市月考【文】)

在圆 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$ 内, 过点 $E(0, 1)$ 的最短弦长为 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{5}$

练25 (★★★☆☆) (2017·四川眉山市期中【理】)

直线 $y-1 = k(x-3)$ 被圆 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ 所截得的最短弦长等于 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{5}$

公共弦问题

练26 (★☆☆☆☆) (2018·四川宜宾市月考)

圆 $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ 的公共弦所在的直线方程是 ()

- A. $x + y + 1 = 0$ B. $x + y - 3 = 0$ C. $x - y + 1 = 0$ D. $x - y - 3 = 0$

第 2 讲

椭圆



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

椭圆定义的判定

练1 (★☆☆☆☆) (2018·新疆乌鲁木齐市期中【文】)

已知 $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, 动点 M 满足 $|MF_1| + |MF_2| = 5$, 则点 M 的轨迹是 ()

- A. 双曲线 B. 椭圆 C. 线段 D. 不存在

求椭圆方程

练2 (★★★★☆)

若 $\triangle ABC$ 的两个顶点坐标为 $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$, $\triangle ABC$ 的周长为 18, 则顶点 C 的轨迹方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 (y \neq 0)$ B. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1 (y \neq 0)$
C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 (y \neq 0)$ D. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1 (y \neq 0)$

练3 (★★☆☆☆) (2019·上海普陀区二模)

若椭圆的焦点在 x 轴上, 焦距为 $2\sqrt{6}$, 且经过点 $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$, 则该椭圆的标准方程为 ()

- A. $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ C. $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{12} = 1$ D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$

椭圆方程的特征

练4 (★ ★ ☆ ☆ ☆)

已知方程 $\frac{x^2}{2-m} + \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示的曲线是椭圆，则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 2)$
- B. $\left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$
- C. $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
- D. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

椭圆方程的应用

练5 (☆☆☆☆☆) (2018·甘肃武威市月考)

如果椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上一点 P 到焦点 F_1 的距离为 6, 则点 P 到另一个焦点 F_2 的距离为 ()

- A. 5 B. 4 C. 8 D. 6

练6 (★ ★ ☆ ☆ ☆)

已知 F_1 , F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的左右焦点, 过椭圆的左焦点 F_1 的直线交椭圆于 A , B 两点, 则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 ()

- A. 8 B. 10 C. 16 D. 20

椭圆参数计算

练7 (★★☆☆☆) (2019·浙江金华市月考)

椭圆 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 的长轴长为 ()

- A. 2 B. 3 C. $4\sqrt{2}$ D. 6

练8 (☆☆☆☆☆) (2018·广东广州市期中【文】)

椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的焦点坐标是 ()

- A. $(0, -2), (0, 2)$
B. $(-2, 0), (2, 0)$
C. $(-2\sqrt{5}, 0), (2\sqrt{5}, 0)$
D. $(0, -2\sqrt{5}), (0, 2\sqrt{5})$

练9 (★☆☆☆☆) (2018·辽宁抚顺县期中【理】)

椭圆 $C: 4x^2 + y^2 = 16$ 的长轴长、短轴长和焦点坐标依次为 ()

- A. 8, 4, $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$ B. 8, 4, $(0, \pm 2\sqrt{3})$ C. 4, 2, $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$ D. 4, 2, $(0, \pm 2\sqrt{3})$

椭圆离心率计算

练10 (★★☆☆☆) (2018·浙江月考)

椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分)。

点和椭圆的位置关系

练11 (★★☆☆☆) (2018·广东深圳市二模【理】)

已知点 $P(1, m)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的外部, 则直线 $y = 2mx + \sqrt{3}$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的位置关系为 ()

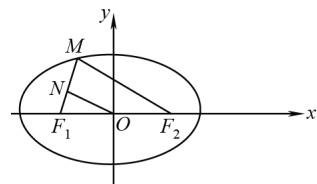
- A. 相离 B. 相交 C. 相切 D. 相交或相切

椭圆中的几何关系

练12 (★★★★☆) (2018·山东滨州市月考)

如图, 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上的点 M 到焦点 F_1 的距离为 2, N 为 MF_1 的中点, 则 $|ON|$ (O 为坐标原点) 的值为 ()

- A. 4
B. 2
C. 8
D. $\frac{3}{2}$



齐次分析求离心率

练13 (★★☆☆) (2019·重庆南开市期中【文】)

若一个椭圆的短轴长和焦距相等, 则该椭圆的离心率为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\sqrt{2}$

练14 (★★☆☆) (2018·江西南昌市期中【理】)

过椭圆的右焦点 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于 A, B 两点, F_1 为椭圆的左焦点, 若 $\triangle F_1AB$ 为正三角形, 则椭圆的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $2 - \sqrt{3}$ D. $\sqrt{2} - 1$

离心率的取值范围

练15 (★★★☆☆) (2017·四川成都市期中)

已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右两个焦点, 若椭圆上存在点 P 使得 $PF_1 \perp PF_2$, 则该椭圆的离心率的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right)$ B. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ C. $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$ D. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

焦点三角形张角问题

练16 (★★★★☆☆) (2017·内蒙古包头市期中【理】)

椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上有一点 P , F_1, F_2 是椭圆的左、右焦点, $\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形, 则这样的点 P 有 ()

- A. 3个 B. 4个 C. 6个 D. 8个

练17 (★★★★☆☆) (2016·广东揭阳市模拟【理】)

设 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右焦点, 点 P 在 C 上, $|PF_1| = 2|PF_2|$, 则 $\cos \angle F_1PF_2 =$ ()

- A. $\frac{7}{16}$ B. $\frac{25}{16}$ C. $-\frac{7}{16}$ D. $-\frac{25}{16}$

焦点三角形面积

练18 (★★☆☆☆) (2018·福建三明市期中【文】)

椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , P 为椭圆上一点, 若 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是 ()

- A. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ C. $16\sqrt{3}$ D. $32\sqrt{3}$

直线和椭圆的位置关系

练19 (★★☆☆☆) (2018·辽宁沈阳市期中【文】)

直线 $x - 2y - 3 = 0$ 与椭圆 $x^2 + 2y^2 = 3$ 的公共点个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

练20 (★★★★☆☆)

已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, 过点 $(4, 5)$ 的直线若与椭圆只有一个公共点, 则直线的方程为_____.

提能力

本模块适合90-120分水平学生(满分150分)。

根据椭圆性质求取值范围

练21 (★★☆☆☆) (2016·河北衡水市月考)

已知点 $M(m, n)$ 在椭圆 $8x^2 + 3y^2 = 24$ 上, 则 $2m + 4$ 的取值范围是 ()

- A. $[4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}]$ B. $[4 - \sqrt{3}, 4 + \sqrt{3}]$
C. $[4 - 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2}]$ D. $[4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}]$

练22 (★★★★☆☆) (2020·青海西宁市期末)

椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的点到直线 $x + 2y - \sqrt{2} = 0$ 的最大距离是 ()

- A. 3 B. $\sqrt{11}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{10}$

练23 (★★★★☆) (2018·湖北黄冈市月考)

设 A, B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{m} = 1$ 长轴的两个端点, 若 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB = 120^\circ$, 则 m 的取值范围是 ()

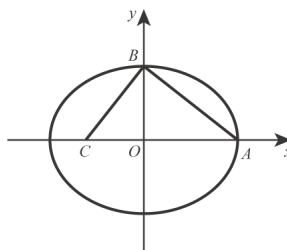
- A. $(0, 1] \cup [9, +\infty)$ B. $(0, \sqrt{3}] \cup [9, +\infty)$ C. $(0, 1] \cup [4, +\infty)$ D. $(0, \sqrt{3}] \cup [4, +\infty)$

几何图形中的离心率问题

练24 (★★★☆☆) (2014·山西朔州市月考【理】)

如图, A, B, C 分别为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的顶点与焦点, 若 $\angle ABC = 90^\circ$, 则该椭圆的离心率为 ()

- A. $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
B. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\sqrt{2} - 1$
D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$



练25 (★★★★☆)

设 F_1, F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点, 过 F_1 且垂直于 x 轴的直线与椭圆交于 A, B 两点, 若 $\triangle ABF_2$ 为锐角三角形, 则该椭圆离心率的取值范围是_____.

练26 (★★★★☆) (2018·福建三明市期中【理】)

若以原点为圆心, 椭圆的半焦距 c 为半径的圆与该椭圆有四个交点, 则该椭圆的离心率的取值范围是_____.

第3讲

双曲线



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

双曲线定义的应用

练1 (★★☆☆☆) (2018·湖南长沙市期末【文】)

P 是双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 上一点， F_1 ， F_2 分别是双曲线左、右焦点，若 $|PF_1| = 9$ ，则 $|PF_2| = (\quad)$

- A. 1 B. 17 C. 1或17 D. 以上答案均不对

练2 (★☆☆☆☆)

若双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 上一点 P 到其焦点 F_1 的距离为8，则点 P 到其另一焦点 F_2 的距离为 ()

- A. 2 B. 2或14 C. 14 D. 16

双曲线方程的特征

练3 (★★☆☆☆) (2018·四川绵阳市期中)

方程 $\frac{x^2}{2+m} + \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示双曲线，则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$ B. $(-2, +\infty)$
C. $(-\infty, -1)$ D. $(-2, -1)$

练4 (★☆☆☆☆) (2018·北京海淀区期末【文】)

$x^2 - 15y^2 = 15$ 化为标准方程, 正确的是 ()

A. $\frac{x^2}{15} - y^2 = 1$

B. $\frac{y^2}{15} - x^2 = 1$

C. $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$

D. $\frac{x^2}{15} + y^2 = 1$

根据参数求双曲线方程

练5 (★★☆☆☆) (2018·黑龙江双鸭山市期中【文】)

设 m 是常数, 若点 $F(0, 5)$ 是双曲线 $\frac{y^2}{m} - \frac{x^2}{9} = 1$ 的一个焦点, 则 $m =$ _____.

练6 (★★☆☆☆) (2019·上海浦东新区二模)

焦点在 x 轴上, 焦距为 6, 且经过点 $(\sqrt{5}, 0)$ 的双曲线的标准方程为 _____.

练7 (★★☆☆☆) (2019·江西鹰潭市月考【理】)

若双曲线 $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{m} = 1$ 的离心率 $e = 2$, 则 $m =$ ()

A. 12

B. 24

C. 32

D. 48

根据双曲线方程求参数

练8 (★★☆☆☆) (2018·河北邯郸市期中【文】)

双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1$ 的实轴长是 ()

A. 1

B. 4

C. 2

D. 8

练9 (★☆☆☆☆) (2019·浙江模拟)

双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦距为 ()

A. $3\sqrt{2}$

B. $\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{5}$

D. $4\sqrt{5}$

练10 (★★☆☆☆) (2016·江西赣州市模拟【文】)

双曲线 $x^2 - 2y^2 = 1$ 的离心率是 ()

A. $\sqrt{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. 2

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分)。

双曲线的焦点三角形的性质

练11 (★★★★☆) (2019·河南洛阳市期末【理】)

双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的两个焦点分别是 F_1, F_2 , 点 P 是双曲线上一点且满足 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 ()

A. $3\sqrt{3}$

B. $9\sqrt{3}$

C. $16\sqrt{3}$

D. $25\sqrt{3}$

练12 (★★★★☆) (2018·宁夏石嘴山市月考【文】)

已知双曲线的两焦点为 F_1, F_2 , 焦距为 $2\sqrt{5}$, 点 P 在双曲线上, 且满足 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 又 $|PF_1| - |PF_2| = 4$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为_____.

渐近线和双曲线方程

练13 (★★☆☆☆) (2019·江苏南通市模拟)

若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦点到渐近线的距离为 2, 实轴长为 2, 则双曲线 C 的方程为_____.

双曲线的渐近线方程及其应用

练14 (★★☆☆☆) (2018·浙江衢州市月考)

双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程是 ()

A. $y = \pm 3x$

B. $y = \pm \frac{1}{3}x$

C. $y = \pm \sqrt{3}x$

D. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$

练15 (★★☆☆☆) (2018·安徽淮北市期末【理】)

设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率是 $\sqrt{5}$, 则其渐近线的方程为 ()

- A. $x \pm \sqrt{2}y = 0$ B. $\sqrt{2}x \pm y = 0$ C. $2x \pm y = 0$ D. $x \pm 2y = 0$

练16 (★★☆☆☆) (2018·湖北荆州市期中【理】)

双曲线 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的顶点到渐近线的距离为 ()

- A. $2\sqrt{3}$ B. 3 C. 2 D. $\sqrt{3}$

离心率范围问题

练17 (★★★☆☆) (2018·重庆沙坪坝区期中【文】)

若 $a \geq \sqrt{2}$, 则双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心率的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{\sqrt{10}}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, +\infty\right)$ C. $\left(1, \frac{\sqrt{10}}{2}\right]$ D. $\left(1, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

练18 (★★★★☆☆)

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一个焦点到一条渐近线的距离小于它的实轴长, 则该双曲线离心率 e 的取值范围是 ()

- A. $(1, \sqrt{2})$ B. $(1, \sqrt{5})$ C. $(\sqrt{2}, +\infty)$ D. $(\sqrt{5}, +\infty)$

焦点三角形和离心率综合问题

练19 (★★★★☆☆) (2016·安徽六安市期末【文】)

设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, 若在双曲线右支上存在点 P , 满足 $|PF_2| = |F_1F_2|$, 且 F_2 到直线 PF_1 的距离等于双曲线的实轴长, 则该双曲线的离心率 e 为 ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{5}{3}$

练20 (★★★★☆) (2013·山东济宁市期末【理】)

已知点 P 是以 F_1, F_2 为左、右焦点的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 左支上一点, 且满足 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $|PF_1| : |PF_2| = 2 : 3$, 则此双曲线的离心率为 ()

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{13}$

提能力

本模块适合90-120分水平学生(满分150分)。

焦点三角形综合问题

练21 (★★★★☆) (2020·山东模拟)

设 F_1, F_2 是双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$ 的两个焦点, P 是双曲线上的一点, 且 $3|PF_1| = 4|PF_2|$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积等于 ()

A. $4\sqrt{2}$

B. $8\sqrt{3}$

C. 24

D. 48

几何图形中的离心率问题

练22 (★★★★☆) (2016·黑龙江哈尔滨市四模【理】)

若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 与直线 $y = \sqrt{3}x$ 无交点, 则离心率 e 的取值范围为 ()

A. $(1, 2)$

B. $(1, 2]$

C. $(1, \sqrt{5})$

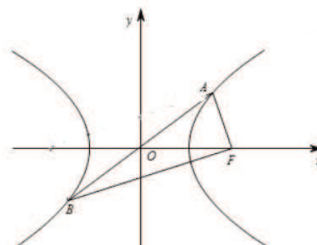
D. $(1, \sqrt{5}]$

练23 (★★★★☆)

设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 若在双曲线的右支上存在一点 P , 使得 $|PF_1| = 3|PF_2|$, 则双曲线 C 的离心率 e 的取值范围为_____.

练24 (★★★☆☆) (2016·湖南衡阳市二模【理】)

如图，已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 上有一点 A ，它关于原点的对称点为 B ，点 F 为双曲线的右焦点，且满足 $AF \perp BF$ ，设 $\angle ABF = \alpha$ ，且 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$ ，则该双曲线离心率 e 的取值范围为 ()



- A. $[\sqrt{2}, \sqrt{3} + 1]$ B. $[\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$
C. $[\sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}]$ D. $[\sqrt{3}, \sqrt{3} + 1]$

双曲线中的最值问题

练25 (★★★☆☆) (2019·河南郑州市模拟)

点 P 为双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的右支上一点, M , N 分别是圆 $(x+5)^2 + y^2 = 4$ 和圆 $(x-5)^2 + y^2 = 1$ 上的点, 则 $|PM| - |PN|$ 的最大值为 ()

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 7

练26 (★★★★☆☆) (2018·黑龙江哈尔滨市期末【文】)

P 是双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 右支上一点, F 是其右焦点, 点 $A(6, 0)$, 则 $|PA| + |PF|$ 的最小值是 ()

- A. 3 B. 6 C. 16 D. 19

第 4 讲

抛物线



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

根据抛物线方程求参

练1 (★☆☆☆☆) (2018·湖北黄冈市月考【文】)

抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点坐标为 ()

- A. $(-1, 0)$ B. $(1, 0)$ C. $(0, -1)$ D. $(0, 1)$

练2 (★★☆☆☆) (2019·吉林期中【理】)

抛物线 $x + y^2 = 0$ 的焦点坐标为 ()

- A. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ B. $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ C. $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ D. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

练3 (★☆☆☆☆) (2019·江苏扬州市期末)

抛物线 $y^2 = 8x$ 的准线方程是 ()

- A. $x = -2$ B. $x = -4$ C. $y = -2$ D. $y = -4$

练4 (★☆☆☆☆) (2018·安徽安庆市期末【文】)

抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点到准线的距离是 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

求抛物线方程

练5 (★☆☆☆☆)

顶点在原点, 焦点是 $F(0, 5)$ 的抛物线方程是 ()

- A. $y^2 = 20x$ B. $x^2 = 20y$ C. $y^2 = \frac{1}{20}x$ D. $x^2 = \frac{1}{20}y$

练6 (★☆☆☆☆)

到定点 $A(2, 0)$ 与定直线 $l: x = -2$ 的距离相等的点的轨迹方程为 ()

- A. $y^2 = 8x$ B. $y^2 = -8x$ C. $x^2 = 8y$ D. $x^2 = -8y$

练7 (★☆☆☆☆) (2018·内蒙古巴彦淖尔市期中【理】)

顶点在原点, 对称轴是 y 轴, 并且顶点与焦点的距离为 3 的抛物线的标准方程为 ()

- A. $x^2 = \pm 3y$ B. $y^2 = \pm 6x$ C. $x^2 = \pm 12y$ D. $x^2 = \pm 6y$

练8 (★★☆☆☆)

顶点在原点, 焦点在 x 轴上, 且经过点 $P(-1, 2)$ 的抛物线的标准方程是 ()

- A. $y^2 = \frac{1}{4}x$ B. $y^2 = -\frac{1}{4}x$ C. $y^2 = -4x$ D. $x^2 = -4y$

抛物线定义的应用

练9 (★★☆☆☆) (2018·重庆万州区期末【文】)

已知抛物线 $y^2 = 4x$ 上点 A 的横坐标为 4, 则点 A 到抛物线的焦点的距离为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

练15 (★★★☆☆) (2018·宁夏吴忠市期中【文】)

从抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点 P 引抛物线准线的垂线，垂足为 M ，且 $|PM| = 5$ ，设抛物线的焦点为 F ，则 $\triangle MPF$ 的面积为 ()

- A. 5 B. 10 C. 20 D. $\sqrt{15}$

练16 (★★★☆☆) (2018·黑龙江大庆市二模【文】)

已知点 $A(4, 0)$ 及抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F ，若抛物线上的点 P 满足 $|PA| = 2|PF|$ ，则 P 的横坐标为_____.

焦点弦的应用

练17 (★★☆☆☆) (2019·湖北武汉市期末)

过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点作直线交抛物线于 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 两点，若 $x_1 + x_2 = 6$ ，则 $|AB| = ()$

- A. 10 B. 8 C. 6 D. 4

抛物线的平均性质

练18 (★★★☆☆) (2017·甘肃兰州市期中【文】)

设坐标原点为 O ，抛物线 $y^2 = 2x$ 与过焦点的直线交于 A ， B 两点，则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 等于 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. 3 D. -3

练19 (★★★☆☆) (2018·吉林长春市期中【文】)

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 是抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上的两点，并且满足 $OA \perp OB$ ，则 $y_1 y_2$ 等于 ()

- A. $-4p^2$ B. $4p^2$ C. $-2p^2$ D. $2p^2$

提能力

本模块适合90-120分水平学生(满分150分)。

焦半径的性质应用

练20 (★★★★☆) (2010·山西太原市二模)

过抛物线 $y^2 = ax$ ($a > 0$) 的焦点 F 作一直线交抛物线于 A, B 两点, 若线段 AF, BF 的长分别为 m, n , 则 $\frac{m+n}{mn}$ 等于 ()

- A. $2a$ B. $\frac{1}{4a}$ C. $\frac{1}{2a}$ D. $\frac{4}{a}$

练21 (★★★★☆)

过 y 轴上定点 $P(0, m)$ 的动直线与抛物线 $x^2 = -16y$ 交于 A, B 两点, 若 $\frac{1}{|AP|^2} + \frac{1}{|BP|^2}$ 为定值, 则 $m =$ _____.

抛物线中的几何问题

练22 (★★★★☆)

已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 准线为 l , P 是 l 上一点, Q 是直线 PF 与 C 的一个交点, 若 $\overrightarrow{FP} = 4\overrightarrow{FQ}$, 则 $|QF| =$ ()

- A. 3 B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{7}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

抛物线中的最值问题

练23 (★★☆☆☆) (2018·湖南衡阳市期中【文】)

已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 若点 P 在抛物线 C 上, 点 $A(3, 2)$, 则 $|PA| + |PF|$ 的最小值为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

练24 (★★★★☆) (2016·河北衡水市模拟【理】)

已知函数 $f(x) = a^{x+1} - 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 A , 设抛物线 $E: y^2 = 4x$ 上任意一点 M 到准线 l 的距离为 d , 则 $d + |MA|$ 的最小值为 ()

- A. 5 B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{2}$

抛物线和其它圆锥曲线综合

练25 (★★★☆☆) (2019·全国II【文】)

若抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点是椭圆 $\frac{x^2}{3p} + \frac{y^2}{p} = 1$ 的一个焦点, 则 $p =$ ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 8

练26 (★★☆☆☆) (2017·云南昭通市月考【理】)

在同一坐标系下, 下列曲线中, 右焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合的是 ()

A. $\frac{5x^2}{3} + \frac{5y^2}{2} = 1$

B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$

D. $\frac{5x^2}{3} - \frac{5y^2}{2} = 1$

第 5 讲

直线与圆锥曲线



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

位置关系和交点个数问题

练1（★★☆☆☆）（2010·江苏南通市模拟）

椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的图象与直线 $y = 2x - 1$ 的交点个数有_____个。

练2（★★★★☆）（2018·上海金山区期中）

双曲线 $x^2 - 9y^2 = 9$ 与直线 $2x - 6y - 21 = 0$ 交点个数是_____。

练3（★★★★☆）

直线 $y = 2$ 与抛物线 $y^2 = 8x$ 的公共点有（ ）

A. 0个

B. 1个

C. 2个

D. 无数个

弦长问题

练4 (★★☆☆☆)

直线 $y = x$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交于 A, B 两点, 则 $|AB| = (\quad)$

- A. 2 B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

练5 (★★☆☆☆)

过椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的右焦点且倾斜角为 45° 的弦 AB 的长为 $(\quad)$

- A. 5 B. 6 C. $\frac{90}{17}$ D. 7

练6 (★★★★☆)

过点 $P(4, 2)$ 作一直线 AB 与双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 相交于 A, B 两点, 若 P 为线段 AB 的中点, 则 $|AB| = (\quad)$

- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

练7 (★★★★☆) (2009·北京西城区期末【理】)

已知直线 $y = x - 2$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的值为 $(\quad)$

- A. $2\sqrt{6}$ B. $4\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

面积问题

练8 (★★☆☆☆)

过椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的右焦点作一条斜率为 2 的直线与椭圆交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 则 $\triangle OAB$ 的面积为 $(\quad)$

- A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{2}$

练9 (★★★☆☆) (2019·江西南昌市模拟【文】)

已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, 过右焦点 F_2 的直线 $l: y = \sqrt{3}\left(x - \frac{3}{2}a\right)$ 交双曲线 E 的右支于点 A (第一象限内的点), 且交 y 轴于点 B , 若 $S_{\triangle BF_1F_2} = 9\sqrt{3}$, 则 $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 ()

- A. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{15\sqrt{3}}{7}$ C. $15\sqrt{3}$ D. $20\sqrt{3}$

练10 (★★★☆☆) (2016·湖南模拟【文】)

设点 $M(-1, \sqrt{3})$ 是抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 准线上一点, 过该抛物线焦点 F 的直线与抛物线交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FA} = 0$, 则 $\triangle MAB$ 的面积为 ()

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ C. $3\sqrt{6}$ D. $\frac{7\sqrt{7}}{2}$

刷中档 本模块适合60-90分水平学生 (满分150分) .

求切线方程

练11 (★★★☆☆)

已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, 过点 $(4, 5)$ 的直线若与椭圆只有一个公共点, 则直线的方程为_____.

练12 (★★☆☆☆)

与直线 $2x - y + 4 = 0$ 平行的抛物线 $y = x^2$ 的切线方程是 ()

- A. $2x - y + 3 = 0$ B. $2x - y - 3 = 0$ C. $2x - y + 1 = 0$ D. $2x - y - 1 = 0$

练13 (★★☆☆☆) (2018·江西抚州市月考【文】)

过点 $(0, \sqrt{3})$ 且与抛物线 $E: y^2 = 4x$ 相切的直线的倾斜角为_____.

中点弦问题

练14 (★★★☆☆) (2018·湖南长沙市月考【文】)

已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 以及椭圆内一点 $P(2, 1)$, 则以 P 为中点的弦所在的直线斜率为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

练15 (★★★☆☆) (2018·黑龙江哈尔滨市期中)

已知双曲线方程为 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$, 若直线 l 交该双曲线于 P, Q 两点, 且线段 PQ 的中点为点 $A(1, 1)$, 则直线 l 的斜率为_____.

练16 (★★★☆☆) (2018·陕西西安市期中【理】)

已知 A, B 为抛物线 $y^2 = 2x$ 上两点, 且 A 与 B 的纵坐标之和为 4, 则直线 AB 的斜率为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

椭圆和双曲线的第三定义

练17 (★★★☆☆) (2018·四川绵阳市期中)

直线 m 与椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 交于 P_1, P_2 , 线段 P_1P_2 的中点为 P , 设直线 m 的斜率为 k_1 ($k_1 \neq 0$), 直线 OP 的斜率为 k_2 , 则 $k_1 \cdot k_2$ 的值为 ()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

练18 (★★★☆☆) (2015·吉林期末【文】)

直线 $y = kx$ 交双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 于 A, B 两点, P 为双曲线 C 上异于 A, B 的任意一点, 则直线 PA, PB 的斜率之积为 ()

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

弦长倒数和的问题

练19 (★★★★☆)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2 , 又 M, N, P, Q 是椭圆 C 上的四个不同点, 两条直线 MN 和 PQ 分别过点 F_1, F_2 , 且这两条直线互相垂直, 则 $\frac{1}{|MN|} + \frac{1}{|PQ|}$ 为定值 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{5}{12}$

D. $\frac{7}{12}$

练20 (★★★★☆) (2018·辽宁沈阳市一模【理】)

设 O 为坐标原点, 动点 M 在椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N , 点 P 满足 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2} \overrightarrow{NM}$.

(1) 求点 P 的轨迹方程 E ;

(2) 过 $F(1, 0)$ 的直线 l_1 与点 P 的轨迹交于 A, B 两点, 过 $F(1, 0)$ 作与 l_1 垂直的直线 l_2 与点 P 的轨迹交于 C, D 两点,

求证: $\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|}$ 为定值.

提能力 本模块适合90-120分水平学生(满分150分).

共轭直径问题

练21 (★★★★☆) (2019·河南郑州市模拟【文】)

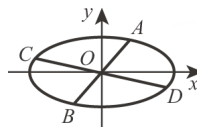
已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

(1) 若椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 且过右焦点垂直于长轴的弦长为 3, 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 点 $P(m, 0)$ 为椭圆长轴上的一个动点, 过点 P 作斜率为 $\frac{b}{a}$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 试判断 $|PA|^2 + |PB|^2$ 是否为定值, 若为定值, 则求出该定值; 若不为定值, 说明原因.

练22 (★★★★☆) (2015·安徽安庆市三模【理】)

椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的经过中心的弦称为椭圆的一条直径, 平行于该直径的所有弦的中点的轨迹为一条直线段, 称为该直径的共轭直径. 已知椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.



- (1) 若一条直径的斜率为 $\frac{1}{2}$, 求该直径的共轭直径所在的直线方程;
- (2) 若椭圆的两条共轭直径为 AB 和 CD , 它们的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明: 四边形 $ACBD$ 的面积为定值.

切点弦问题

练23 (★★★★☆)

已知中心在原点, 焦点在坐标轴上的椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 一个焦点是 $(-1, 0)$, 过直线 $x = 3$ 上一点 M 引椭圆 E 的两条切线, 切点分别是 A 和 B .

- (1) 求椭圆 E 的方程;
- (2) 若在椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上的点 (x_0, y_0) 处的切线方程是 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$, 求证: 直线 AB 恒过定点, 并求出定点的坐标.

平移齐次法的应用

练24 (★★★★☆)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右两个焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $M(0, -2)$ 是椭圆 C 的一个顶点, F_1 到椭圆 C 的左准线的距离为 2.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 过点 M 分别作直线 MA, MB 交椭圆于 A, B 两点, 设直线 MA, MB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 + k_2 = 8$, 探究: 直线 AB 是否过定点, 并说明理由.

练25 (★★★★☆)

已知点 $A(2, 1), B(3, 0)$, 椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, 过 B 的直线与 C 相交于 D, E 两点, 则 $k_{AD} + k_{AE}$ 是否为定值? 若是, 求出该值; 若不是, 说明理由.

垂直直径的性质

练26 (★★★★☆) (2018·重庆二模【文】)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 点 $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 在 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, O 为坐标原点, 且 $OP \perp OQ$, 求 $\triangle OPQ$ 面积的最小值.

第6讲

基础测试卷-解析几何

本试卷共9个题目，选择5个，填空3个，解答1个，均为基础水平题目。限时30分钟。得分在70分以上视为合格，可以去做【刷中档】模块题目，冲刺更高的水平。

一、单选题，共5题，每题10分.

练1 (★★☆☆☆) (2018·西藏林芝市期末)

若过 $A(-2, m)$ 和 $B(m, 4)$ 的直线与斜率为 -2 的直线平行或重合，则 m 的值为()

- A. -8 B. 0 C. 2 D. 10

练2 (★★☆☆☆)

椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上一动点 P 到两焦点距离之和为()

- A. 10 B. 8 C. 6 D. 不确定

练3 (★★☆☆☆) (2018·湖南长沙市期末【文】)

P 是双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 上一点， F_1 ， F_2 分别是双曲线左、右焦点，若 $|PF_1| = 9$ ，则 $|PF_2| = ()$

- A. 1 B. 17 C. 1 或 17 D. 以上答案均不对

第7讲

中档测试卷-解析几何

本试卷共9个题目，选择5个，填空3个，解答1个，均为中档水平题目。限时30分钟。得分在70分以上视为合格，可以去做【提能力】模块题目，冲刺更高的水平。

一、单选题，共5题，每题10分.

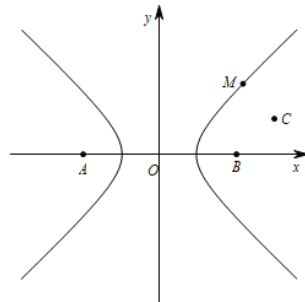
练1 (★★★★☆☆)

椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦点为 F_1, F_2 ，直线 $x = -\frac{a^2}{c}$ 与直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 和 x 轴的交点分别为 M, N ，若 $|MN| \leq 2|F_1F_2|$ ，则该椭圆离心率的取值范围是_____.

练2 (★★★★☆☆)

如图， M 是以 A, B 为焦点的双曲线 $x^2 - y^2 = 2$ 右支上任意一点，若点 M 到点 $C(3, 1)$ 与到点 B 的距离之和为 S ，则 S 的取值范围是 ()

- A. $[\sqrt{26} + \sqrt{2}, +\infty)$
- B. $[\sqrt{26} - 2\sqrt{2}, +\infty)$
- C. $[\sqrt{26} - 2\sqrt{2}, \sqrt{26} + 2\sqrt{2})$
- D. $[\sqrt{26} - \sqrt{2}, +\infty)$



练3 (★★★★☆☆) (2019·河南新乡市模拟【理】)

已知点 $M(x, y)$ 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上的动点，则 $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ 的最小值为 ()

- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6

练4 (★★☆☆☆)

抛物线的顶点在坐标原点, 焦点是椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$ 的一个焦点, 则此抛物线的焦点到准线的距离为 ()

A. $2\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

练5 (★★☆☆☆) (2018·湖南衡阳市期中【文】)

已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 若点 P 在抛物线 C 上, 点 $A(3, 2)$, 则 $|PA| + |PF|$ 的最小值为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

二、填空题, 共3题, 每题10分.

练6 (★★☆☆☆) (2018·北京顺义区期中)

过点 $(3, \sqrt{3})$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ 相切的直线方程为_____.

练7 (★★★★☆)

已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$ 的左、右焦点, 点 P 在双曲线 C 上, 且 $S_{\triangle PF_1F_2} = \sqrt{3}$, 则 $\angle F_1PF_2$ 的大小为_____.

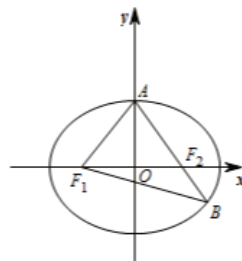
练8 (★★★★☆) (2018·北京海淀区期中)

已知直线 $y = \frac{x}{2}$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 交于两点, 则该双曲线的离心率的取值范围是_____.

三、解答题, 共1题, 每题20分.

练9 (★★★☆☆) (2018·河北保定市月考【文】)

如右图, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点, A 为椭圆上顶点, 直线 AF_2 交椭圆于另一点 B .



- (1) 若 $\angle F_1AB = 90^\circ$, 求椭圆的离心率;
- (2) 若椭圆的焦距为 2, 且 $\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$, 求椭圆的方程.

参考答案与解析

第 1 讲 直线与圆

练 1

答案：B

解答：

根据题意，将直线方程 $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ 化为“斜截式”： $y = \sqrt{3}x + 1$

则直线的斜率为 $k = \sqrt{3}$

设直线的倾斜角为 α ($0 \leq \alpha < \pi$)

根据直线的斜率与倾斜角的关系，有 $\tan \alpha = \sqrt{3}$ ，可得 $\alpha = \frac{\pi}{3}$

故选：B.

练 2

答案：A

解答：

因为直线 l 经过点 $A(1, 3)$, $B(-2, -5)$

所以直线 l 的斜率为 $\frac{-5-3}{-2-1} = \frac{8}{3}$

故选：A.

练 3

答案：D

解答：

直线 $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ 即 $\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1$ 在 y 轴上的截距是 -4

故选：D.

练 4

答案：A

解答：

经过点 $(-1, 2)$ 且斜率为 2 的直线方程为

$$y - 2 = 2(x + 1), \text{ 即 } 2x - y + 4 = 0$$

故选: A.

练5

答案: C

解答:

由两点式求出, 经过 $A(0, 2)$, $B(3, -3)$ 两点的直线方程为 $\frac{y+3}{2+3} = \frac{x-3}{0-3}$

$$\text{即 } 5x + 3y - 6 = 0$$

故选: C.

练6

答案: B

解答:

直线的截距式方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a, b \neq 0$)

将 $a = 2$, $b = -3$ 代入可得直线方程为 $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$

故选: B.

练7

答案: A

解答:

$$\text{由 } \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

直线 $x - y + 2 = 0$ 与 $x + y - 2 = 0$ 的交点坐标为 $(0, 2)$

故选: A.

练8

答案: C

解答:

由题意可知 MN 的中点坐标是 $\left(\frac{0+3}{2}, \frac{7+5}{2}\right)$, 即 $\left(\frac{3}{2}, 6\right)$

故选: C.

练9

答案: C

解答:

由圆的标准方程可得: $(x+3)^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$

故选: C.

练10

答案: C

解答:

A. $(1-1)^2 + (1-1)^2 = 0 \neq 2$, 所以点 $(1,1)$ 不在圆上, 所以不正确

B. $(2-1)^2 + (1-1)^2 = 1 \neq 2$, 所以点 $(2,1)$ 不在圆上, 所以不正确

C. $(0-1)^2 + (0-1)^2 = 2$, 所以点 $(0,0)$ 在圆上, 所以正确

D. $(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2 = 6 - 4\sqrt{2} \neq 2$, 所以点 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 不在圆上, 所以不正确

故选: C.

练11

答案: B

解答:

由题意可知 $k_{AB} = k_{AC}$

$$\text{即 } \frac{3 - (-1)}{a - 1} = \frac{5 - (-1)}{4 - 1}$$

解得 $a = 3$

故选: B.

练12

答案: D

解答:

$$\because A(-1, 2), B(1, 3)$$

$$\therefore k_{AB} = \frac{3 - 2}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

又直线 l 与直线 AB 平行, 则直线 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$

故选: D.

练13

答案: D

解答:

直线 $4x + 2y - 7 = 0$ 的斜率为 -2

则与直线 $4x + 2y - 7 = 0$ 垂直的直线的斜率为 $\frac{1}{2}$

又所求直线过点 $A(3, 3)$ ，由直线方程的点斜式可得

所求直线方程为 $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 3)$ ，即 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

故选：D.

练14

答案：-5

解答：

因为直线 $l_1: 2x - by - 6 = 0$ 与直线 $l_2: x + y + a = 0$ 的交点为 $(2, 2)$

$\therefore 4 - 2b - 6 = 0$ ，且 $2 + 2 + a = 0$ ，解得 $a = -4$ ， $b = -1$ ， $a + b = -5$

故答案为：-5.

练15

答案：D

解答：

$\therefore$ 点 $(3, m)$ 到直线 $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$ 的距离为 1

$\therefore d = \frac{|3 + \sqrt{3}m - 4|}{2} = 1$ ，解得 $m = \sqrt{3}$ 或 $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

故选：D.

练16

答案：B

解答：

$\therefore$ 直线 $3x - 4y - 3 = 0$ 与直线 $mx - 8y + 5 = 0$ 平行

$\therefore \frac{m}{3} = \frac{-8}{-4} \neq \frac{5}{-3}$ ，解得 $m = 6$

直线 $mx - 8y + 5 = 0$ ，即为 $3x - 4y + \frac{5}{2} = 0$

$\therefore$ 两条平行直线 $3x - 4y - 3 = 0$ 与 $3x - 4y + \frac{5}{2} = 0$ 的距离为 $\frac{\left|\frac{5}{2} - (-3)\right|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{\frac{11}{2}}{5} = \frac{11}{10}$

故选：B.

练17

答案：A

解答：

∵圆以 AB 为直径, 且 $A(1, 0)$, $B(0, 3)$

∴圆心坐标为: $\left(\frac{1+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right)$ 即 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

半径为: $\frac{|AB|}{2} = \frac{\sqrt{(1-0)^2 + (0-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

∴圆的标准方程为: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$

展开整理得: $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$

故选: A.

练18

答案: B

解答:

圆心 $(4, -1)$ 到直线 $4x - 3y + 6 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|4 \times 4 - 3 \times (-1) + 6|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 5$

而圆的半径 $r = 5$

所以 $d = r$

所以直线与圆相切

故选: B.

练19

答案: A

解答:

∵圆 C 的标准方程为 $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

∴圆心的坐标为 $C(2, 0)$

∵点 $P(1, \sqrt{3})$

∴直线 PC 的斜率为 $\frac{\sqrt{3} - 0}{1 - 2} = -\sqrt{3}$

∴圆 C 在点 $P(1, \sqrt{3})$ 处切线的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴圆 C 在点 $P(1, \sqrt{3})$ 处的切线方程为 $y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$

即 $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$

故选: A.

练20

答案: $4\sqrt{5}$

解答:

曲线 $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ 的标准方程为 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$ ，圆心 $(3, 1)$ ，半径为 5

圆心到直线 $x + 2y = 0$ 的距离为 $d = \frac{|3+2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{5}$

因此所截弦长为 $2 \times \sqrt{5^2 - (\sqrt{5})^2} = 4\sqrt{5}$

故答案为： $4\sqrt{5}$.

练21

答案： A

解答：

设直线 $2x - 4y + 9 = 0$ 关于点 $A(2, 2)$ 对称的直线上的任意一点为 $P(x, y)$ ，则点 P 关于点 $A(2, 2)$ 对称点

$Q(4-x, 4-y)$ 在直线 $2x - 4y + 9 = 0$ 上

$$\therefore 2(4-x) - 4(4-y) + 9 = 0$$

化为 $2x - 4y - 1 = 0$

故选： A .

练22

答案： $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

解答：

若 $a + b = 1$ ，则对于直线 $2ax - by = 1$ ，令 $2x = 1$ ， $y = -1$

求得 $x = \frac{1}{2}$ ， $y = -1$ ，可得直线经过定点 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

故答案为： $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

练23

答案： A

解答：

依题意，数形结合可得切点 $A(1, 0)$ ， $|PA| = \sqrt{3}$

在 $\text{Rt}\triangle POA$ 中， $|PA| = \sqrt{3}$ ， $|OA| = 1$

$$\therefore \tan \angle OPA = \frac{|OA|}{|PA|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \angle OPA = 30^\circ$$

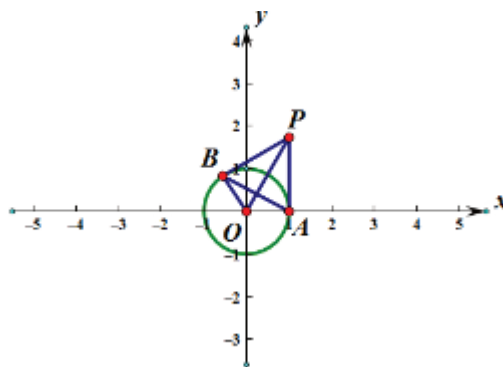
$$\therefore \angle BPA = 60^\circ$$

$$\text{又 } |PB| = |PA|$$

$\therefore \triangle BPA$ 是等边三角形

$$\therefore |AB| = \sqrt{3}$$

..



故选：A.

练24

答案：B

解答：

设圆心为 $D(1, 3)$ ，则圆心 $D(1, 3)$ 与点 $E(0, 1)$ 的距离为： $|DE| = \sqrt{(0-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$

据此可得，最短的弦与线段 DE 垂直，则弦长为： $2\sqrt{10 - (\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{5}$

故选：B.

练25

答案：C

解答：

由圆的方程 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ 可知圆心为 $(2, 2)$ ，半径为 2

直线 $y-1 = k(x-3)$ 恒过定点 $(3, 1)$

当直线被圆截得的弦长最短时，圆心 $(2, 2)$ 与定点 $(3, 1)$ 的连线垂直于该弦

弦心距为： $\sqrt{(2-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$

$\therefore$ 所截得的最短弦长为 $2\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$

故选：C.

练26

答案：C

解答：

由于两圆的公共弦的端点是两圆的公共交点，既满足一个圆的方程，又满足另一个圆的方程

把圆 $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ 的方程相减即得公共弦所在的直线方程为 $x - y + 1 = 0$

故选：C.

第2讲 椭圆

练1

答案: D

解答:

$$\text{由 } |MF_1| + |MF_2| = 5$$

$$\text{又 } F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$$

$$\text{即: } |F_1F_2| = 6 > 5$$

则这样的点 M 的轨迹不存在

故选: D.

练2

答案: A

解答:

$$\because |AB| = 8, |CA| + |CB| = 18 - 8 = 10$$

$\therefore$ 顶点 C 的轨迹实际是以 A, B 为焦点的椭圆 (去掉长轴的两个端点)

$$\because 2a = 10, 2c = 8$$

$$\therefore b^2 = 9$$

$$\therefore \text{顶点 } C \text{ 的轨迹方程为 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (y \neq 0)$$

故选: A.

练3

答案: D

解答:

由椭圆的焦点在 x 轴上, 设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$

$\therefore$ 焦距为 $2\sqrt{6}$, 且椭圆经过点 $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$

$$\therefore \begin{cases} c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{6} \\ \frac{3}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{解得 } a^2 = 9, b^2 = 3$$

因此椭圆的标准方程为: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$

故选: D.

练4

答案: B

解答:

根据题意, 方程 $\frac{x^2}{2-m} + \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示的曲线是椭圆

$$\text{则} \begin{cases} 2-m > 0 \\ m+1 > 0 \\ 2-m \neq m+1 \end{cases}$$

解得: $-1 < m < 2$ 且 $m \neq \frac{1}{2}$

故 m 的取值范围为 $\left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

故选: B.

练5

答案: B

解答:

由椭圆的定义知 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 10$, $|PF_1| = 6$, 故 $|PF_2| = 4$

故选: B.

练6

答案: D

解答:

由题意得 $a = 5$

由椭圆的性质得 $|AF_1| + |AF_2| = |BF_1| + |BF_2| = 2a = 10$

所以 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $|AB| + |AF_2| + |BF_2| = |AF_1| + |AF_2| + |BF_1| + |BF_2| = 20$

故选: D.

练7

答案: D

解答:

因为椭圆 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 的焦点在 x 轴上

所以 $a = 3$, $2a = 6$

故椭圆 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 的长轴长为: 6

故选: D.

练8

答案: A

解答:

根据题意, 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} = 1$, 其焦点在 y 轴上

则 $c = \sqrt{12-8} = 2$

所以焦点坐标为 $(0, \pm 2)$

故选: A.

练9

答案: B

解答:

椭圆 C 的标准方程为 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$

$\therefore$ 椭圆的焦点在 y 轴上, 且 $a^2 = 16$, $b^2 = 4$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 12$$

$$\therefore a = 4, b = 2, c = 2\sqrt{3}$$

$\therefore$ 椭圆 C 的长轴长为 8, 短轴长为 4

焦点坐标为 $(0, \pm 2\sqrt{3})$

故选: B.

练10

答案: A

解答:

由 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, 得

$$a^2 = 16, b^2 = 9$$

$$\therefore a = 4, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$$

$$\text{则 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

故选: A.

练11

答案: B

解答:

由点 $P(1, m)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的外部, 则 $m^2 > \frac{3}{4}$

则圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆心 $(0, 0)$ 到直线 $y - 2mx - \sqrt{3} = 0$ 的距离 $d = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+4m^2}} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

$\therefore$ 直线 $y - 2mx - \sqrt{3} = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相交

故选: B.

练12

答案: A

解答:

$$\because \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\therefore a = 5, \quad 2a = 10$$

$$\therefore |MF_1| + |MF_2| = 10$$

$$\because \text{点 } M \text{ 到左焦点 } F_1 \text{ 的距离为 } 2, \text{ 即 } |MF_1| = 2$$

$$\therefore |MF_2| = 10 - 2 = 8$$

$$\because \triangle MF_1F_2 \text{ 中, } N, O \text{ 分别是 } MF_1, F_1F_2 \text{ 的中点}$$

$$\therefore |ON| = \frac{1}{2}|MF_2| = 4$$

故选: A.

练13

答案: B

解答:

$$\text{依题意得: } 2b = 2c$$

$$\therefore b = c$$

$$\therefore b^2 = c^2$$

$$\therefore a^2 - c^2 = c^2$$

$$\therefore a^2 = 2c^2$$

$$\therefore e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

故选: B.

练14

答案: B

解答:

根据题意, $\triangle F_1AB$ 为正三角形, 则 $\text{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中, $\angle AF_1F_2 = 30^\circ$

$$\text{则有 } |AF_1| = 2|AF_2|, \quad |F_1F_2| = 2c = \sqrt{3}|AF_2|$$

$$\text{点 } A \text{ 在椭圆上, 则有 } 2a = |AF_1| + |AF_2| = 3|AF_2|$$

$$\text{则该椭圆的离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{|F_1F_2|}{|AF_1| + |AF_2|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

故选: B.

练15

答案: B

解答:

$\because F_1, F_2$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右两个焦点

$\therefore$ 离心率 e 满足 $0 < e < 1$

$$F_1(-c, 0), F_2(c, 0), c^2 = a^2 - b^2$$

设点 $P(x, y)$, 由 $PF_1 \perp PF_2$, 得 $(x - c, y) \cdot (x + c, y) = 0$, 化简得 $x^2 + y^2 = c^2$

$$\text{联立方程组} \begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{整理得, } x^2 = (2c^2 - a^2) \cdot \frac{a^2}{c^2} \geq 0$$

$$\text{解得 } e \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 又 } 0 < e < 1$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leq e < 1$$

故选: B.

练16

答案: C

解答:

当 $\angle PF_1F_2$ 为直角时, 根据椭圆的对称性知这样的点 P 有 2 个

同理当 $\angle PF_2F_1$ 为直角时, 根据椭圆的对称性知这样的点 P 有 2 个

由于椭圆的短轴端点与两个焦点连线所得张角最大, 而这个张角恰好是直角

这时这样的点 P 也有 2 个

故符合要求的点 P 有 6 个

故选: C.

练17

答案: C

解答:

$$\text{设 } |PF_2| = m, m > 0$$

$$\text{则 } |PF_1| = 2m$$

$$\text{由椭圆的定义可得: } |PF_1| + |PF_2| = 3m = 4$$

$$\text{解得 } m = \frac{4}{3}, c = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{由余弦定理可得: } \cos \angle F_1PF_2 = \frac{m^2 + (2m)^2 - (2c)^2}{2 \times m \times 2m}$$

$$= \frac{5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \times 3}{4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{7}{16}$$

故选: C.

练18

答案: A

解答:

由椭圆焦点三角形的面积公式 $S = b^2 \tan \frac{\angle F_1 P F_2}{2}$ 可得

$$\text{所求面积为 } 16 \tan 30^\circ = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

故选: A.

练19

答案: B

解答:

由题得

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, \text{ 代入椭圆方程得 } x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 = 0$$

所以直线和椭圆的公共点个数为

1

故选: B.

练20

答案: $2x - 5y + 17 = 0$ 或 $x = 4$ 、 $x = 4$ 或 $2x - 5y + 17 = 0$ 、 $x = 4$ 或 $y = \frac{2}{5}x + \frac{17}{5}$ 、 $y = \frac{2}{5}x + \frac{17}{5}$ 或 $x = 4$ 、

$$y = 0.4x + 3.4 \text{ 或 } x = 4、x = 4 \text{ 或 } y = 0.4x + 3.4$$

解答:

若斜率存在时, 设直线方程为 $y - 5 = k(x - 4)$

$$\text{直线方程与椭圆方程联立可得 } \left(\frac{1}{16} + \frac{k^2}{9}\right)x^2 + \frac{2k(5-4k)}{9}x + \frac{16-40k+16k^2}{9} = 0$$

$$\text{令 } \Delta = 0, \text{ 即 } \left[\frac{2k(5-4k)}{9}\right]^2 - 4\left(\frac{1}{16} + \frac{k^2}{9}\right)\frac{16-40k+16k^2}{9} = 0$$

$$\text{化简解得 } k = \frac{2}{5}, \text{ 于是直线方程为 } y - 5 = \frac{2}{5}(x - 4), \text{ 即 } 2x - 5y + 17 = 0$$

而点 $(4, 5)$ 易知在椭圆外, 所以过该点与椭圆只有一个公共点的直线有两条, 考虑斜率不存在的情况 $x = 4$ 经过点 $(4, 5)$ 且与椭圆相切故答案为: $2x - 5y + 17 = 0$ 或 $x = 4$.**练21**

答案: A

解答:

$$\text{椭圆 } 8x^2 + 3y^2 = 24 \text{ 可化为: } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{8} = 1$$

可得椭圆焦点在 y 轴上, 且 $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$

$$\therefore -\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}$$

$$\therefore 2m + 4 \in [4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}]$$

故选：A.

练22

答案：D

解答：

设与 $x + 2y - \sqrt{2} = 0$ 平行且与椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 相切的直线方程为 $x + 2y + m = 0$

$$\text{联立} \begin{cases} x + 2y + m = 0 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{得 } 2x^2 + 2mx + m^2 - 16 = 0$$

$$\Delta = 4m^2 - 8(m^2 - 16) = 128 - 4m^2 = 0, \text{解得: } m = \pm 4\sqrt{2}$$

$\therefore$ 直线 $x + 2y \pm 4\sqrt{2} = 0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 相切

$$\text{则椭圆 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ 上的点到直线 } x + 2y - \sqrt{2} = 0 \text{ 的最大距离为 } d = \frac{|4\sqrt{2} + \sqrt{2}|}{\sqrt{1+2^2}} = \sqrt{10}$$

故选：D.

练23

答案：A

解答：

假设椭圆的焦点在 x 轴上，则 $0 < m < 3$

设椭圆的方程为： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)，则 $a^2 - x^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2}$ ，设 $A(-a, 0)$ ， $B(a, 0)$ ， $M(x, y)$ ， $y > 0$

$$\angle MAB = \alpha, \angle MBA = \beta, \angle AMB = \gamma, \tan \alpha = \frac{y}{x+a}, \tan \beta = \frac{y}{a-x}$$

则

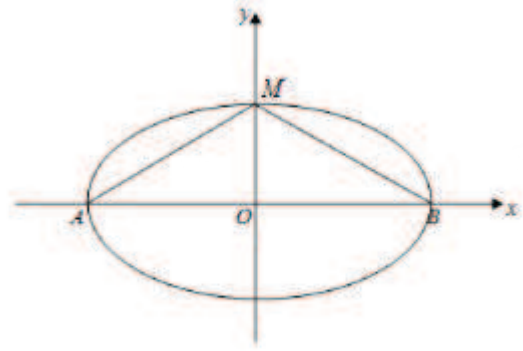
$$\tan \gamma = \tan[\pi - (\alpha + \beta)] = -\tan(\alpha + \beta) = -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -\frac{2ay}{a^2 - x^2 - y^2} = -\frac{2ay}{\frac{a^2 y^2}{b^2} - y^2} = -\frac{2ab^2}{y(a^2 - b^2)} = -\frac{2ab^2}{c^2 y}$$

$$\therefore \tan \gamma = -\frac{2ab^2}{c^2 y}, \text{当 } y \text{ 最大时, 即 } y = b \text{ 时, } \angle AMB \text{ 取最大值}$$

$\therefore M$ 位于短轴的端点时， $\angle AMB$ 取最大值，要使椭圆 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB = 120^\circ$

$$\angle AM'B \geq 120^\circ, \angle AM'O \geq 60^\circ, \tan \angle AM'O = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{m}} \geq \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

解得： $0 < m \leq 1$

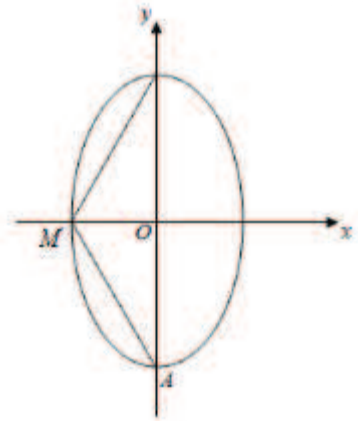


当椭圆的焦点在 y 轴上时, $m > 3$

当 M 位于短轴的端点时, $\angle AMB$ 取最大值, 要使椭圆 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB = 120^\circ$

$\angle AM'B \geq 120^\circ$, $\angle AM'O \geq 60^\circ$, $\tan \angle AM'O = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{3}} \geq \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, 解得: $m \geq 9$

$\therefore m$ 的取值范围是 $(0, 1] \cup [9, +\infty)$



故选: A.

练24

答案: A

解答:

由题意知, $|AB|^2 = a^2 + b^2$, $|BC|^2 = b^2 + c^2$, $|AC|^2 = (a+c)^2$

$\because \angle ABC = 90^\circ$

$\therefore |AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$, 即 $(a+c)^2 = a^2 + 2b^2 + c^2$

$\therefore 2ac = 2b^2$, 即 $b^2 = ac$

$\therefore a^2 - c^2 = ac$

$\therefore \frac{a}{c} - \frac{c}{a} = 1$, 即 $\frac{1}{e} - e = 1$

解得 $e = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

又 $\because 0 < e < 1$

$$\therefore e = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

故选：A.

练25

答案： $(\sqrt{2} - 1, 1)$

解答：

$\therefore$ 点 F_1 , F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点

过 F_1 且垂直于 x 轴的直线与椭圆交于 A , B 两点

$$\therefore F_1(-c, 0), F_2(c, 0), A\left(-c, \frac{b^2}{a}\right), B\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$$

$\therefore \triangle ABF_2$ 是锐角三角形

$$\therefore \angle AF_2F_1 < 45^\circ$$

$$\therefore \tan \angle AF_2F_1 < 1$$

$$\therefore \frac{\frac{b^2}{a}}{2c} < 1$$

整理，得 $b^2 < 2ac$

$$\therefore a^2 - c^2 < 2ac$$

两边同时除以 a^2 ，并整理，得 $e^2 + 2e - 1 > 0$

解得 $e > \sqrt{2} - 1$ 或 $e < -\sqrt{2} - 1$ (舍)

$$\therefore 0 < e < 1$$

$\therefore$ 椭圆的离心率 e 的取值范围是 $(\sqrt{2} - 1, 1)$

故答案为： $(\sqrt{2} - 1, 1)$.

练26

答案： $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

解答：

设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)

以原点为圆心，椭圆的半焦距 c 为半径的圆方程为 $x^2 + y^2 = c^2$

$$\text{联立两方程，可得 } y^2 = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2 - b^2}, x^2 = \frac{a^2(c^2 - b^2)}{a^2 - b^2}$$

由题意可得 $x^2 > 0$, $y^2 > 0$

结合 $a > b > 0$, $a > c > 0$, 可得 $c^2 > b^2$

即有 $c^2 > a^2 - c^2$, 即为 $a < \sqrt{2}c$

则离心率 $e = \frac{c}{a} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, 由 $0 < e < 1$, 可得 $\frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$

故答案为: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

第3讲 双曲线

练1

答案: B

解答:

双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 的 $a = 4$, $b = 2\sqrt{5}$, $c = 6$

由双曲线的定义可得 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a = 8$

$|PF_1| = 9$, 可得 $|PF_2| = 1$ 或 17

若 $|PF_2| = 1$, 则 P 在右支上, 应有 $|PF_2| \geq c - a = 2$

此种情况不成立

若 $|PF_2| = 17$, 则 P 在左支上, 应有 $|PF_2| \geq c + a = 10$

此种情况成立

故选: B.

练2

答案: B

解答:

$$\because ||PF_1| - |PF_2|| = 2a$$

$$\text{即 } |8 - |PF_2|| = 6$$

$$\therefore |PF_2| = 2 \text{ 或 } 14$$

故选: B.

练3

答案: D

解答:

$$\text{由题意得 } (2+m)(m+1) < 0$$

$$\text{解得 } -2 < m < -1$$

所以实数 m 的取值范围是 $(-2, -1)$

故选: D.

练4

答案: A

解答:

由 $x^2 - 15y^2 = 15$, 得 $\frac{x^2}{15} - \frac{15y^2}{15} = 1$

即 $\frac{x^2}{15} - y^2 = 1$

故选: A.

练5

答案: 16

解答:

由题意, 得 $m + 9 = 5^2$

解得 $m = 16$

故答案为: 16.

练6

答案: $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

解答:

设双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$

焦点在 x 轴上, 焦距为 6, 则 $c = 3$

又经过点 $(\sqrt{5}, 0)$, 可得 $a = \sqrt{5}$

所以 $b^2 = 9 - 5 = 4$

所以双曲线的标准方程为: $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

故答案为: $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$.

练7

答案: D

解答:

由方程表示双曲线可知 $m > 0$

所以 $a = 4$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{m + 16}$

所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{m + 16}}{4} = 2$

解得 $m = 48$

故选: D.

练8

答案: C

解答:

由题意可得: $a = 1$

则实轴长 $2a = 2$

故选: C.

练9

答案: C

解答:

由双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$, 易知 $c^2 = 3 + 2 = 5$

$\therefore c = \sqrt{5}$

$\therefore$ 双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦距为 $2\sqrt{5}$

故选: C.

练10

答案: C

解答:

双曲线 $x^2 - 2y^2 = 1$, 即为 $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$

即有 $a = 1$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

则双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

故选: C.

练11

答案: B

解答:

由双曲线方程 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, 可得 $a^2 = 16$, $b^2 = 9$

则 $c^2 = a^2 + b^2 = 25$

$\therefore a = 4$, $c = 5$

由已知可得: $\|PF_1\| - \|PF_2\| = 2a = 8$

在 $\triangle F_1PF_2$ 中, $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$

由余弦定理得 $|F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \cos \angle F_1PF_2$

$= |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |PF_1| \cdot |PF_2|$

$= (|PF_1| - |PF_2|)^2 + |PF_1| \cdot |PF_2|$

$$= 64 + |PF_1| \cdot |PF_2|$$

$$\because |F_1F_2| = 2c = 10$$

$$\therefore 64 + |PF_1| \cdot |PF_2| = 100, \text{ 即 } |PF_1| \cdot |PF_2| = 36$$

$$\therefore \triangle F_1PF_2 \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin \angle F_1PF_2$$

$$= \frac{1}{2} \times 36 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

故选: B.

练12

答案: 1

解答:

$$\text{设 } |PF_1| = m, |PF_2| = n \ (m > n > 0)$$

根据题意可知 $m - n = 4$

$$\because \angle F_1PF_2 = 90^\circ$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 20$$

$$\therefore 2mn = m^2 + n^2 - (m - n)^2 = 4$$

$$\therefore mn = 2$$

$$\therefore \triangle F_1PF_2 \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}mn = 1$$

故答案为: 1.

练13

$$\text{答案: } x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

解答:

双曲线 C 的渐近线方程为 $bx \pm ay = 0$, 焦点坐标是 $(\pm c, 0)$

$$\text{焦点到渐近线的距离为 } d = \frac{|bc|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = b = 2$$

因为实轴长为 $2a = 2$

所以 $a = 1$

$$\text{所以双曲线 } C \text{ 的方程为 } x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\text{故答案为: } x^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$

练14

答案: C

解答:

常规解析：

双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ ，可得双曲线的渐近线方程为： $y = \pm\sqrt{3}x$

故选：C.

大招解析：

根据双曲线渐近线速算法，双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程为 $\frac{x}{\sqrt{3}} \pm \frac{y}{3} = 0$

即 $y = \pm\sqrt{3}x$

故选：C.

练15

答案：C

解答：

设双曲线的半焦距为 c

$\therefore$ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率是 $\sqrt{5}$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} = 4$$

$$\therefore \frac{b}{a} = 2$$

则渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm 2x$

即渐近线方程为 $2x \pm y = 0$

故选：C.

练16

答案：D

解答：

由题意，得 $a = 2\sqrt{3}$ ， $b = 2$

不妨取双曲线的一个顶点为 $(2\sqrt{3}, 0)$ ，一条渐近线方程为 $\sqrt{3}x - 3y = 0$

$$\text{所以所求距离为 } \frac{|2\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 3 \times 0|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2}} = \sqrt{3}$$

故选：D.

练17

答案：C

解答：

因为 $a \geq \sqrt{2}$

$$\text{所以 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2+3}{a^2}} = \sqrt{1+\frac{3}{a^2}} \leq \sqrt{1+\frac{3}{(\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

又因为 $e > 1$

所以离心率的取值范围是 $\left(1, \frac{\sqrt{10}}{2}\right]$

故选: C.

练18

答案: B

解答:

由题意可得, 双曲线的一个焦点为 $(c, 0)$, 一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$

所以该焦点到渐近线的距离 $d = \frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}} = b < 2a$

所以 $b^2 = c^2 - a^2 < 4a^2$, 得 $e^2 < 5$

因为 $e > 1$

所以 $1 < e < \sqrt{5}$

故选: B.

练19

答案: D

解答:

依题意 $|PF_2| = |F_1F_2|$, 可知三角形 PF_2F_1 是一个等腰三角形, F_2 在直线 PF_1 的投影是其中点

所以 $|PF_1| = 2\sqrt{4c^2 - 4a^2} = 4b$

根据双曲线定义可知 $4b - 2c = 2a$, 整理得 $c = 2b - a$, 代入 $c^2 = a^2 + b^2$ 整理得 $3b^2 - 4ab = 0$, 求得 $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \frac{5}{3}$$

故选: D.

练20

答案: D

解答:

由 $|PF_2| - |PF_1| = 2a$, $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{2}{3}$, 得 $|PF_2| = 6a$, $|PF_1| = 4a$

在 $\text{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中, $|F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2$

$\therefore 4c^2 = 36a^2 + 16a^2$, 解得 $e = \sqrt{13}$

故选：D.

练21

答案：C

解答：

$$F_1(-5, 0), F_2(5, 0), |F_1F_2| = 10$$

$$\because 3|PF_1| = 4|PF_2|$$

$$\therefore \text{设 } |PF_2| = x, \text{ 则 } |PF_1| = \frac{4}{3}x$$

$$\text{由双曲线的性质知 } \frac{4}{3}x - x = 2, \text{ 解得 } x = 6$$

$$\therefore |PF_1| = 8, |PF_2| = 6$$

$$\therefore \angle F_1PF_2 = 90^\circ$$

$$\triangle PF_1F_2 \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$$

故选：C.

练22

答案：B

解答：

$$\because \text{双曲线 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, b > 0) \text{ 与直线 } y = \sqrt{3}x \text{ 无交点}$$

$$\therefore \text{双曲线的渐近线方程 } y = \pm \frac{b}{a}x, \text{ 满足 } \frac{b}{a} \leq \sqrt{3}$$

$$\text{得 } b \leq \sqrt{3}a, \text{ 两边平方得 } b^2 \leq 3a^2, \text{ 即 } c^2 - a^2 \leq 3a^2$$

$$\therefore c^2 \leq 4a^2, \text{ 得 } \frac{c^2}{a^2} \leq 4, \text{ 即 } e^2 \leq 4$$

$$\therefore \text{双曲线的离心率 } e \text{ 为大于 } 1 \text{ 的正数}$$

$$\therefore 1 < e \leq 2$$

故选：B.

练23

答案：\$(\sqrt{2}, 2]\$

解答：

$$\because \text{点 } P \text{ 在双曲线的右支上}$$

$$\therefore \text{由双曲线定义有 } |PF_1| - |PF_2| = 2a$$

$$\text{又 } \because |PF_1| = 3|PF_2|$$

$$\therefore 3|PF_2| - |PF_2| = 2a, |PF_2| = a$$

$$\text{在双曲线右支上的点 } P \text{ 满足 } |PF_2| \geq c - a$$

$$\therefore a \geq c - a$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} \leq 2$$

又由已知 $b > a$ 有 $c^2 - a^2 > a^2$

$$\therefore e > \sqrt{2}$$

$\therefore e$ 的取值范围为 $(\sqrt{2}, 2]$

故答案为: $(\sqrt{2}, 2]$.

练24

答案: A

解答:

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, $|OF| = c$

$$\therefore |AB| = 2c$$

在直角三角形 ABF 中, $\angle ABF = \alpha$, 可得 $|AF| = 2c \sin \alpha$, $|BF| = 2c \cos \alpha$

取左焦点 F' , 连接 AF' , BF' , 可得四边形 $AFBF'$ 为矩形

$$\therefore ||BF| - |AF|| = |AF'| - |AF| = 2c |\cos \alpha - \sin \alpha| = 2a$$

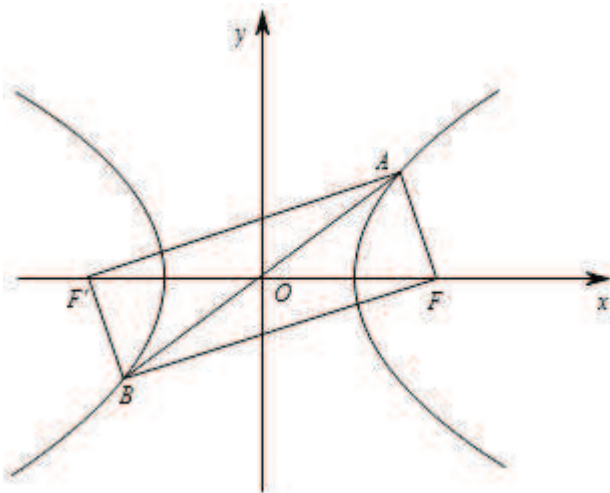
$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{1}{|\cos \alpha - \sin \alpha|} = \frac{1}{\sqrt{2} \left| \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right|}$$

$$\therefore \frac{\pi}{12} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{12}$$

$$\therefore \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \in \left[\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} \right], \quad \sqrt{2} \left| \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right| \in \left[\frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\therefore e \in [\sqrt{2}, \sqrt{3} + 1]$$



故选：A.

练25

答案：B

解答：

在双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 中， $a = 3$ ， $b = 4$ ， $c = 5$ ， $F_1(-5, 0)$ ， $F_2(5, 0)$

因为 P 为双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的右支上一点

所以 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 6$

又 M ， N 分别是圆 $(x+5)^2 + y^2 = 4$ 和圆 $(x-5)^2 + y^2 = 1$ 上的点

则 $|PM| \leq |PF_1| + |MF_1|$ ， $|PN| \geq |PF_2| - |NF_2|$

所以 $-|PN| \leq -|PF_2| + |NF_2|$

则 $|PM| - |PN| \leq |PF_1| + |MF_1| - |PF_2| + |NF_2|$

$= |PF_1| - |PF_2| + |MF_1| + |NF_2|$

$= 6 + 2 + 1$

$= 9$

所以 $|PM| - |PN|$ 的最大值为 9

故选：B.

练26

答案：A

解答：

根据题意，设双曲线的左焦点为 M

双曲线的方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ，其中 $a = \sqrt{16} = 4$

若 P 是双曲线的右支上一点，则有 $|PM| - |PF| = 2a = 8$

$|PA| + |PF| = |PA| + |PM| - 2a \geq |AM| - 2a = 3$

当 P ， A ， M 三点共线时，即 P 为双曲线与 x 轴的交点时，等号成立

故选：A.

第 4 讲 抛物线**练 1**

答案: D

解答:

因为抛物线 $x^2 = 4y$

所以 $p = 2$

所以抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点坐标为 $(0, 1)$

故选: D.

练 2

答案: C

解答:

抛物线的方程为 $y^2 = -x$, 其焦点在 x 轴负半轴上

令 $2p = 1$, 解得 $p = \frac{1}{2}$

所以 $\frac{p}{2} = \frac{1}{4}$

所以焦点坐标为 $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

故选: C.

练 3

答案: A

解答:

根据抛物线方程可知 $2p = 8$, $p = 4$

故准线方程为 $x = -2$

故选: A.

练 4

答案: C

解答:

抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的标准方程为 $x^2 = 4y$, 故 $p = 2$

即它的焦点到准线的距离为 2

故选: C.

练5

答案：B

解答：

因为抛物线焦点为

$(0, 5)$ ，在 y 轴正半轴，设抛物线的方程为 $x^2 = 2py$ ($p > 0$)

因为抛物线顶点在原点，焦点是

$F(0, 5)$

所以

$$\frac{p}{2} = 5$$

所以

$$p = 10$$

练6

答案：A

解答：

抛物线的定义可知，该轨迹为焦点在

x 轴正半轴上的抛物线

设抛物线方程为

$$y^2 = 2mx \ (m > 0)$$

练7

答案：C

解答：

设抛物线的方程为 $x^2 = 2py$ 或 $x^2 = -2py$ ，依题意知 $\frac{p}{2} = 3$

$$\therefore p = 6$$

$$\therefore \text{抛物线的方程为 } x^2 = \pm 12y$$

故选：C.

练8

答案：C

解答：

顶点在原点，焦点在 x 轴上

设抛物线方程为： $y^2 = mx$ ，点 $P(-1, 2)$ 在抛物线上，可得： $m = -4$

所求的抛物线方程为： $y^2 = -4x$

故选：C.

练9

答案：D

解答:

抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线方程为: $x = -1$

$\therefore A$ 到焦点的距离等于 A 到准线的距离, 且 A 的横坐标是 4

$\therefore A$ 到焦点的距离是 $4 + 1 = 5$

故选: D.

练10

答案: C

解答:

设 $P(x_0, y_0)$

抛物线的准线方程是 $x = -2$

由抛物线的性质可知 $x_0 + 2 = 20$

解得 $x_0 = 18$

所以 $y_0^2 = 8 \times 18$

解得 $y_0 = \pm 12$

所以点 P 的坐标是 $(18, 12)$ 或 $(18, -12)$

故选: C.

练11

答案: A

解答:

依题意, 点 M 到 $F(3, 0)$ 的距离比它到直线 $x + 4 = 0$ 的距离小 1

$\therefore$ 点 M 到 $F(3, 0)$ 的距离与它到直线 $x = -3$ 的距离相等

$\therefore$ 点 M 的轨迹是以 $F(3, 0)$ 为焦点, 以直线 $x = -3$ 为准线的抛物线

设抛物线方程为 $y^2 = 2px$ ($p > 0$), 则 $\frac{p}{2} = 3$, $p = 6$

$\therefore$ 点 M 的轨迹方程是 $y^2 = 12x$

故选: A.

练12

答案: D

解答:

因为点 $P(-2, 1)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的准线上

所以 $-\frac{p}{2} = -2 \Rightarrow p = 4$

则抛物线 C 的方程为 $y^2 = 8x$, 焦点 F 的坐标为 $(2, 0)$

所以直线 PF 的斜率是 $\frac{0-1}{2-(-2)} = -\frac{1}{4}$

故选：D

练13

答案：D

解答：

抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 F 为 $(1, 0)$

曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 与 C 交于点 P ，且点 P 在第一象限

由 $PF \perp x$ 轴得： P 点横坐标为 1

代入 C 得： P 点纵坐标为 2

故 $k = 2$

故选：D.

练14

答案：B

解答：

由抛物线方程得：抛物线的准线方程为： $x = -1$ ，焦点 $F(1, 0)$

又 P 为 C 上一点， $|PF| = 4$ ， $\therefore x_p = 3$

代入抛物线方程得： $|y_p| = 2\sqrt{3}$

$\therefore S_{\triangle POF} = \frac{1}{2} \times |OF| \times |y_p| = \sqrt{3}$

故选：B.

练15

答案：B

解答：

设 $P(x_0, y_0)$

依题意可知，抛物线准线方程为 $x = -1$

$\therefore x_0 = 5 - 1 = 4$

$\therefore |y_0| = \sqrt{4 \times 4} = 4$

$\therefore \triangle MPF$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$

故选：B.

练16

答案: $2\sqrt{2} - 2$

解答:

设 $P\left(\frac{y_0^2}{4}, y_0\right)$, 则 $|PF| = \frac{y_0^2}{4} + 1$, $|PA| = \sqrt{\left(\frac{y_0^2}{4} - 4\right)^2 + y_0^2}$

$\therefore \frac{y_0^4}{16} - y_0^2 + 16 = 4 \times \left(\frac{y_0^4}{16} + \frac{y_0^2}{2} + 1\right)$, 解得 $y_0^2 = 8\sqrt{2} - 8$

$\therefore P$ 点横坐标为: $\frac{y_0^2}{4} = 2\sqrt{2} - 2$

故答案为: $2\sqrt{2} - 2$.

练17

答案: B

解答:

抛物线的准线方程为 $x = -1$, 焦点为 $F(1, 0)$

由抛物线的性质得 $|AB| = |AF| + |BF| = x_1 + 1 + x_2 + 1 = 8$

故选: B.

练18

答案: B

解答:

$\therefore$ 抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

当直线 AB 的斜率不存在时, 可设 $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, -1\right) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

当直线 AB 的斜率存在时, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{3}{4}$

故选: B.

练19

答案: A

解答:

$\therefore A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上的两点, 并且满足 $OA \perp OB$

$\therefore k_{OA} \cdot k_{OB} = -1$

$\therefore x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

$\therefore \frac{(y_1 y_2)^2}{4p^2} + y_1 y_2 = 0$

因为 $y_1 y_2 \neq 0$

则 $y_1 y_2 = -4p^2$

故选：A.

练20

答案：D

解答：

取特殊位置，取通径 AB ，由 $m = n = \frac{a}{2}$

$$\text{得 } \frac{m+n}{mn} = \frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{4}{a}$$

故选：D.

练21

答案：-8

解答：

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

存在满足条件的点 $P(0, m)$ ，直线 $l: y = tx + m$ ，有 $\begin{cases} y = tx + m \\ x^2 = -16y \end{cases}$

消 y 可得 $x^2 + 16tx + 16m = 0$

由 $\Delta = 16^2 t^2 - 4 \times 16m > 0$ 可得 $4t^2 - m > 0$

$$\therefore x_1 + x_2 = -16t, \quad x_1 x_2 = 16m$$

$$\therefore |AP|^2 = x_1^2 + (y_1 - m)^2 = x_1^2 + t^2 x_1^2 = (1 + t^2) x_1^2$$

$$|BP|^2 = x_2^2 + (y_2 - m)^2 = (1 + t^2) x_2^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{|AP|^2} + \frac{1}{|BP|^2} &= \frac{1}{(1+t^2)x_1^2} + \frac{1}{(1+t^2)x_2^2} \\ &= \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{8t^2 - m}{8m^2} \end{aligned}$$

当 $m = -8$ 时， $\frac{1}{|AP|^2} + \frac{1}{|BP|^2}$ 为定值

故答案为：-8.

练22

答案：A

解答：

依题意可得：抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 $F(2, 0)$

设 $P(-2, t)$, $Q(x, y)$

因为 $\overrightarrow{FP} = 4\overrightarrow{FQ}$

所以 $(-4, t) = 4(x - 2, y)$

所以 $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{t}{4} \end{cases}$, 代入 $y^2 = 8x$ 可得: $\frac{t^2}{16} = 8$

所以 $t^2 = 128$

所以 $|QF| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{16}} = 3$

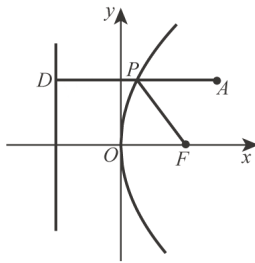
故选: A.

练23

答案: D

解答:

依题意, 过点 P 作准线的垂线, 垂足为 D



则根据抛物线的定义得: $|PD| = |PF|$

$\therefore |PA| + |PF| = |PA| + |PD|$

显然, 当 P, A, D 三点共线时, $|PA| + |PD|$ 取得最小值为 $|AD|$

$\because A(3, 2)$, 抛物线的准线方程为 $x = -2$

$\therefore |AD| = 3 - (-2) = 5$

$\therefore |PA| + |PF|$ 的最小值为 5

故选: D.

练24

答案: C

解答:

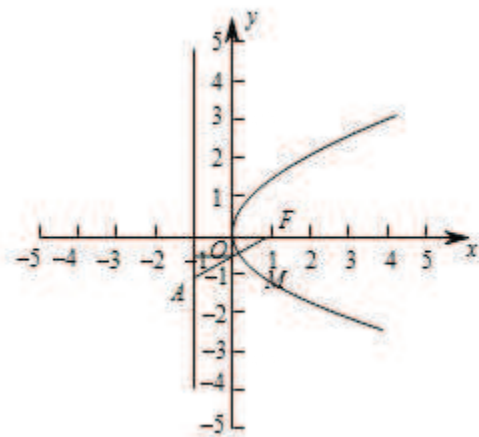
当 $x + 1 = 0$, 解得 $x = -1$, 此时 $y = 1 - 2 = -1$

故 $A(-1, -1)$

设抛物线的焦点为 F , 由题意得 $F(1, 0)$, 准线方程为 $x = -1$

利用抛物线的定义, 可得当 F, A, M 三点共线时, $d + |MA|$ 取得最小值为 $|AF| = \sqrt{(1+1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{5}$

故选: C.



练25

答案：D

解答：

易知抛物线的焦点为 $(\frac{p}{2}, 0)$

故椭圆焦点在 x 轴上

$$\text{由 } c^2 = a^2 - b^2 = 3p - p = 2p$$

$$\text{则 } \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 2p$$

解得 $p = 8$

故选：D.

练26

答案：D

解答：

抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标是 $(1, 0)$

$$\text{A. } a^2 = \frac{3}{5}, b^2 = \frac{2}{5}$$

$$\therefore c^2 = a^2 - b^2 = \frac{1}{5}$$

$$\therefore c = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \text{右焦点为 } \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)$$

$$\text{B. } a^2 = 9, b^2 = 5$$

$$\therefore c^2 = a^2 - b^2 = 4$$

$$\therefore c = 2$$

$$\therefore \text{右焦点为 } (2, 0)$$

$$\text{C. } a^2 = 3, b^2 = 2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 5$$

$$\therefore c = \sqrt{5}$$

$$\therefore \text{右焦点为 } (\sqrt{5}, 0)$$

$$\text{D. } a^2 = \frac{3}{5}, b^2 = \frac{2}{5}$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 1$$

$$\therefore c = 1$$

$$\therefore \text{右焦点为 } (1, 0)$$

综上知，D 满足题意

故选：D.

第5讲 直线与圆锥曲线

练1

答案：2

解答：

常规解析：

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}, \text{得 } 109x^2 - 100x - 200 = 0$$

$$\Delta = 100^2 - 4 \times 109 \times (-200) = 97200 > 0$$

$\therefore$ 有两个交点

故答案为：2.

大招解析：

由硬解定理计算 $\delta = A^2a^2 + B^2b^2 - C^2$

$$\delta = 108 > 0, \text{ 故有两个交点}$$

故答案为：2.

练2

答案：1

解答：

$$\therefore \text{双曲线 } x^2 - 9y^2 = 9 \text{ 可化为: } \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$$

$$\therefore a = 3, b = 1$$

$$\therefore \text{双曲线 } \frac{x^2}{9} - y^2 = 1 \text{ 的渐近线方程为 } y = \pm \frac{1}{3}x$$

$$\therefore \text{直线 } 2x - 6y - 21 = 0 \text{ 的斜率为 } k = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ 直线 $2x - 6y - 21 = 0$ 与双曲线的一条渐近线平行

$\therefore$ 直线 $2x - 6y - 21 = 0$ 与双曲线只有1个交点

故答案为：1.

练3

答案：B

解答：

$$\text{把 } y = 2 \text{ 代入 } y^2 = 8x \text{ 得 } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{即方程组 } \begin{cases} y = 2 \\ y^2 = 8x \end{cases} \text{ 只有1解}$$

$\therefore$ 直线 $y = 2$ 与抛物线 $y^2 = 8x$ 仅有1个公共点

故选: B.

练4

答案: C

解答:

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

将 $y = x$ 代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 消去 y 得 $5x^2 = 4$

所以 $x_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $x_2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

由弦长公式得 $|AB| = \sqrt{1+1^2}|x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{10}}{5}$

故选: C.

练5

答案: C

解答:

直线 AB 方程为: $y = x - 4$, 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = x - 4 \end{cases}$ 得: $34x^2 - 200x + 175 = 0$

$\therefore |AB| = \sqrt{1+1^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{200^2 - 4 \times 34 \times 175}}{34} = \frac{90}{17}$

故选: C.

练6

答案: D

解答:

已知直线 AB 不与 y 轴平行, 设其方程为 $y - 2 = k(x - 4)$

代入双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$, 整理得

$(1 - 2k^2)x^2 + 8k(2k - 1)x - 32k^2 + 32k - 10 = 0$

设此方程的两实根为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 = \frac{8k(2k - 1)}{2k^2 - 1}$, $k^2 \neq \frac{1}{2}$

又 $P(4, 2)$ 为线段 AB 的中点

所以 $\frac{8k(2k - 1)}{2k^2 - 1} = 8$

解得 $k = 1$

当 $k = 1$ 时, 直线与双曲线相交, 即上述关于 x 的一元二次方程中 $\Delta > 0$

所求直线 AB 的方程为 $y - 2 = x - 4$

化成一般式为 $x - y - 2 = 0$

$$x_1 + x_2 = 8, \quad x_1 x_2 = 10$$

$$|AB| = \sqrt{2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \times \sqrt{8^2 - 40} = 4\sqrt{3}$$

故选：D.

练7

答案：B

解答：

$$\text{联立} \begin{cases} y = x - 2 \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{消去 } y$$

$$\text{得 } x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Delta > 0$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2)$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = 8, \quad x_1 x_2 = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore |AB| &= \sqrt{(1^2 + 1) \times [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]} \\ &= \sqrt{2 \times (64 - 16)} = 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

故选：B.

练8

答案：C

解答：

由题易知椭圆的右焦点为 $F(1, 0)$

所以直线方程为 $y = 2x - 2$

$$\text{联立椭圆与直线方程, 得 } \begin{cases} 4x^2 + 5y^2 - 20 = 0 \\ y = 2(x - 1) \end{cases}, \text{ 可得 } \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{不妨设 } A(0, -2), \quad B\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\text{故 } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot |OF| \cdot |y_B - y_A| = \frac{1}{2} \times 1 \times \left| \frac{4}{3} + 2 \right| = \frac{5}{3}$$

故选：C.

练9

答案：C

解答：

$$\therefore \text{直线 } y = \sqrt{3} \left(x - \frac{3}{2}a \right) \text{ 过右焦点 } F_2(c, 0)$$

$$\therefore c = \frac{3}{2}a, \text{ 即 } a = \frac{2}{3}c$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 得 } y = -\frac{3\sqrt{3}}{2}a = -\sqrt{3}c$$

$$\because S_{\triangle BF_1F_2} = 9\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2c \times \sqrt{3}c = 9\sqrt{3}$$

$$\therefore c^2 = 9$$

$$\therefore c = 3$$

$$\therefore a = 2, b = \sqrt{5}$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \\ y = \sqrt{3}(x-3) \end{cases}$$

$$\text{得 } \begin{cases} x = 8 \\ y = 5\sqrt{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{16}{7} \\ y = -\frac{5\sqrt{3}}{7} \end{cases}$$

$\because A$ 在第一象限

$\therefore A$ 的坐标为 $(8, 5\sqrt{3})$

$$\therefore S_{\triangle AF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 2c \times 5\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$$

故选: C.

练10

答案: D

解答:

因为 M 在抛物线的准线上

所以 $p = 2$, 抛物线为 $y^2 = 4x$, 其焦点 $F(1, 0)$

$$\text{所以 } k_{MF} = \frac{\sqrt{3}}{-1-1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FA} = 0$$

所以 $FM \perp AB$

所以 $k_{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 故直线 AB 的方程为: $y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-1)$. 将直线 AB 方程与抛物线方程 $y^2 = 4x$ 联立可得

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

所以 $x_A + x_B = 5$, 得 $|AB| = x_A + x_B + p = 7$, 又 $|MF| = \sqrt{(-1-1)^2 + 3} = \sqrt{7}$

$$\text{所以 } S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} \times 7 \times \sqrt{7} = \frac{7\sqrt{7}}{2}$$

故选: D.

练11

答案: $2x - 5y + 17 = 0$ 或 $x = 4$ 、 $x = 4$ 或 $2x - 5y + 17 = 0$ 、 $x = 4$ 或 $y = \frac{2}{5}x + \frac{17}{5}$ 、 $y = \frac{2}{5}x + \frac{17}{5}$ 或 $x = 4$ 、

$y = 0.4x + 3.4$ 或 $x = 4$ 、 $x = 4$ 或 $y = 0.4x + 3.4$

解答：

若斜率存在时，设直线方程为 $y - 5 = k(x - 4)$

直线方程与椭圆方程联立可得 $\left(\frac{1}{16} + \frac{k^2}{9}\right)x^2 + \frac{2k(5-4k)}{9}x + \frac{16-40k+16k^2}{9} = 0$

令 $\Delta = 0$ ，即 $\left[\frac{2k(5-4k)}{9}\right]^2 - 4\left(\frac{1}{16} + \frac{k^2}{9}\right)\frac{16-40k+16k^2}{9} = 0$

化简解得 $k = \frac{2}{5}$ ，于是直线方程为 $y - 5 = \frac{2}{5}(x - 4)$ ，即 $2x - 5y + 17 = 0$

而点 $(4, 5)$ 易知在椭圆外，所以过该点与椭圆只有一个公共点的直线有两条，考虑斜率不存在的情况

$x = 4$ 经过点 $(4, 5)$ 且与椭圆相切

故答案为： $2x - 5y + 17 = 0$ 或 $x = 4$.

练12

答案：D

解答：

方法1：

由题意可设切线方程为 $2x - y + m = 0$

联立方程 $\begin{cases} 2x - y + m = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$

得 $x^2 - 2x - m = 0$

$\Delta = 4 + 4m = 0$

解得 $m = -1$

$\therefore$ 切线方程为 $2x - y - 1 = 0$

故选：D.

方法2：极点极线

设 $P(x_0, y_0)$ 为抛物线上任意一点，则该点处抛物线的切线方程为 $x_0x = \frac{y + y_0}{2}$

若 P 点处抛物线的切线方程与 $2x - y + 4 = 0$ 平行，则 $2x_0 = 2$ ，即 $x_0 = 1$ ， $y_0 = 1$

所以待求切线方程为 $x = \frac{y+1}{2}$ ，即 $2x - y - 1 = 0$

故选：D.

练13

答案： 30° 或 90°

解答：

当直线斜率不存在时，直线方程为 $x = 0$ ，显然符合题意，此时直线的倾斜角为 90°

当直线斜率存在时，设直线的方程为 $y = kx + \sqrt{3}$

代入抛物线方程得 $k^2x^2 + (2\sqrt{3}k - 4)x + 3 = 0$

令 $\Delta = 0$ ，得 $(2\sqrt{3}k - 4)^2 - 12k^2 = 0$ ，解得 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$

∴直线的倾斜角为 30°

故答案为: 30° 或 90° .

练14

答案: B

解答:

解法一: 根据题意, 以点 P 为中点的弦所在直线的斜率显然存在

设其与椭圆相交于点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 斜率为 k

$$\text{则 } \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \text{ ①, } \frac{x_2^2}{16} + \frac{y_2^2}{4} = 1 \text{ ②}$$

$$\therefore \text{①} - \text{②}, \text{得 } \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{16} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{4} = 0$$

由中点坐标公式可得 $x_1 + x_2 = 4$, $y_1 + y_2 = 2$

$$\therefore \frac{4(x_1 - x_2)}{16} + \frac{2(y_1 - y_2)}{4} = 0$$

$$\therefore k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{2}$$

解法二: 过点 P 的椭圆直径所在直线的斜率 $k = \frac{1}{2}$

设与其互为共轭直径的直线斜率为 k'

$$\text{因为 } kk' = -\frac{1}{4}$$

$$\text{所以 } k' = -\frac{1}{2}$$

则以 P 为中点的弦所在的直线斜率为 $-\frac{1}{2}$

解法三: 设以 P 为中点的弦所在的直线斜率为 k

$$\text{由椭圆的第三定义可知 } k \cdot k_{OP} = \frac{k}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{所以 } k = -\frac{1}{2}$$

则以 P 为中点的弦所在的直线斜率为 $-\frac{1}{2}$

故选: B.

练15

$$\text{答案: } \frac{4}{5}$$

解答:

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$

$$\text{代入双曲线 } \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{ 中, 可得 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{5} - \frac{y_1^2}{4} = 1 \\ \frac{x_2^2}{5} - \frac{y_2^2}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\text{可得 } \frac{1}{5}(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - \frac{1}{4}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0, \text{ 线段 } PQ \text{ 的中点为点 } A(1, 1)$$

$$\text{故直线 } l \text{ 的斜率 } k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4}{5}$$

故答案为: $\frac{4}{5}$.

练16

答案: A

解答:

A, B 为抛物线 $y^2 = 2x$ 上两点, 且 A 与 B 的纵坐标之和为 4

不妨取 A 为坐标原点, 则 B 的纵坐标为 4

将 $y = 4$ 代入 $y^2 = 2x$, 得: $2x = 16$, 解得 $x = 8$, 则 $B(8, 4)$

$$\text{则直线 } AB \text{ 的斜率为: } \frac{4 - 0}{8 - 0} = \frac{1}{2}$$

故选: A

练17

答案: D

解答:

解法一: 设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$

$$\text{由题意知 } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\text{且 } k_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, k_2 = \frac{y_0}{x_0}$$

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1 \\ \frac{x_2^2}{2} + y_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{两式相减得: } \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{2} + (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$$

$$\therefore \frac{2x_0(x_1 - x_2)}{2} + 2y_0(y_1 - y_2) = 0$$

$$\therefore x_0(x_1 - x_2) + 2y_0(y_1 - y_2) = 0$$

$$\therefore 1 + 2 \cdot \frac{y_0(y_1 - y_2)}{x_0(x_1 - x_2)} = 0, \text{ 即 } 1 + 2 \cdot \frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 0$$

$$\therefore 1 + 2k_1k_2 = 0$$

$$\therefore k_1k_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{解法二: 由第三定义可知 } k_1k_2 = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{2}$$

故选: D.

练18

答案: B

解答:

解法一: 设 $P(x, y)$, $A(m, km)$, 则 $B(-m, -km)$, 代入双曲线方程可得 $\frac{m^2}{4} - \frac{(km)^2}{3} = 1$

$$\therefore (km)^2 = \frac{3m^2}{4} - 3$$

$$\therefore \text{双曲线 } C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$$

$$\therefore y^2 = \frac{3x^2}{4} - 3$$

$$\therefore \text{直线 } PA, PB \text{ 的斜率之积为 } \frac{y - km}{x - m} \cdot \frac{y + km}{x + m} = \frac{y^2 - (km)^2}{x^2 - m^2} = \frac{\frac{3x^2}{4} - 3 - \frac{3m^2}{4} + 3}{x^2 - m^2} = \frac{3}{4}$$

解法二: 由已知可得 A, B 两点关于原点对称

$$\text{所以由第三定义可知, } k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{4}$$

故选: B.

练19

答案: D

解答:

解法1

任意情况下, $\frac{1}{|MN|} + \frac{1}{|PQ|}$ 均为定值, 可用特值法

易知, 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 取 MN 和 PQ 倾斜角分别为 0° 和 90° 的情况

$$\text{则 } |MN| = 2a = 4, |PQ| = \frac{2b^2}{a} = 3, \text{ 则 } \frac{1}{|MN|} + \frac{1}{|PQ|} = \frac{7}{12}$$

故选: D.

解法2

不妨设 MN 的倾斜角为 θ ($0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$), 则 PQ 的倾斜角为 $\theta + \frac{\pi}{2}$

由题意得, $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$

$$\text{根据焦点弦长公式 } |MN| = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta} = \frac{12}{4 - \cos^2 \theta}$$

$$|PQ| = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{12}{4 - \sin^2 \theta}$$

$$\frac{1}{|MN|} + \frac{1}{|PQ|} = \frac{7}{12}$$

故选: D.

练20

解答:

(1) 设 $P(x, y)$, 则 $N(x, 0)$, $\overrightarrow{NP} = (0, y)$

$$\text{又 } \because \overrightarrow{NM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{NP} = \left(0, \frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore M\left(x, \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)$$

$$\text{由 } M \text{ 在椭圆上, 得 } \frac{x^2}{9} + \left(\frac{y}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$$\text{即 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$$\text{所以点 } P \text{ 的轨迹方程 } E \text{ 为 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$$(2) \text{ 当 } l_1 \text{ 与 } x \text{ 轴重合时, } |AB| = 6, |CD| = \frac{16}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|} = \frac{17}{48}$$

$$\text{当 } l_1 \text{ 与 } x \text{ 轴垂直时, } |AB| = \frac{16}{3}, |CD| = 6$$

$$\therefore \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|} = \frac{17}{48}$$

当 l_1 与 x 轴不垂直也不重合时

$$\text{可设 } l_1 \text{ 的方程为 } y = k(x-1) \quad (k \neq 0)$$

$$\text{此时设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$$

$$\text{把直线 } l_1 \text{ 与曲线 } E \text{ 联立: } \begin{cases} y = k(x-1) \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \end{cases}$$

$$\text{得 } (8+9k^2)x^2 - 18k^2x + 9k^2 - 72 = 0$$

$$\text{可得 } \Delta = (-18k^2)^2 - 4(8+9k^2)(9k^2-72) > 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{18k^2}{8+9k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{9k^2-72}{8+9k^2}$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{48(1+k^2)}{8+9k^2}$$

$$\text{把直线 } l_2 \text{ 与曲线 } E \text{ 联立: } \begin{cases} y = -\frac{1}{k}(x-1) \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \end{cases}$$

$$\text{同理可得 } |CD| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \sqrt{(x_3+x_4)^2 - 4x_3x_4} = \frac{48(1+k^2)}{9+8k^2}$$

$$\therefore \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|} = \frac{8+9k^2}{48(k^2+1)} + \frac{9+8k^2}{48(k^2+1)} = \frac{17}{48}$$

$$\text{综上所述, } \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|} = \frac{17}{48}, \text{ 为定值}$$

练21

解答:

$$(1) \text{ 由已知可得椭圆 } C \text{ 的离心率 } e = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, a = 2c, \text{ 其中 } c \text{ 为半焦距}$$

$$\text{又 } a^2 = b^2 + c^2$$

$$\text{不妨令椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$$

$$\text{当 } x = c \text{ 时, } |y| = \frac{3}{2}, \text{ 得出 } c = 1$$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) $|PA|^2 + |PB|^2$ 为定值 $a^2 + b^2$

解法一: 令直线 l 的方程为 $y = \frac{b}{a}(x - m)$, 与椭圆 C 交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点

$$\text{联立方程} \begin{cases} y = \frac{b}{a}(x - m) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \text{ 得 } 2b^2x^2 - 2b^2mx + b^2m^2 = a^2b^2, \text{ 即 } 2x^2 - 2mx + m^2 - a^2 = 0$$

需要 $\Delta > 0$

$$\therefore x_1 + x_2 = m, \quad x_1x_2 = \frac{m^2 - a^2}{2}$$

$$\therefore |PA|^2 + |PB|^2 = (x_1 - m)^2 + y_1^2 + (x_2 - m)^2 + y_2^2$$

$$= (x_1 - m)^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + (x_2 - m)^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) [(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2]$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2} (x_1^2 + x_2^2)$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2} [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]$$

$$= a^2 + b^2$$

所以 $|PA|^2 + |PB|^2$ 为定值 $a^2 + b^2$

解法二: 依据结论, 对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 点 $P(m, 0)$ 是长轴上一动点

过点 P 作斜率为 $\frac{b}{a}$ 的直线 l , 分别交椭圆于 A, B 两点, 则 $|PA|^2 + |PB|^2 = a^2 + b^2$

可得答案

练 22

解答:

(1) 解法一: 设斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直径平行的弦的端点坐标分别为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 该弦中点为 (x, y)

$$\text{则 } x_1 + x_2 = 2x, \quad y_1 + y_2 = 2y$$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \text{ 代入椭圆方程, 相减得: } k = -\frac{1}{2}$$

$$\text{所以得 } x + 2y = 0$$

故该直径的共轭直径所在的直线方程为 $x + 2y = 0$

解法二: 设斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直径的共轭直径的斜率为 k

$$\text{因为 } \frac{1}{2} \cdot k = -\frac{1}{4}, \text{ 所以 } k = -\frac{1}{2}$$

$$\text{故该直径的共轭直径所在的直线方程为 } y = -\frac{1}{2}x, \text{ 即 } x + 2y = 0$$

(2) 解法一: 椭圆的两条共轭直径为 AB 和 CD , 它们的斜率分别为 k_1, k_2

四边形 $ACBD$ 显然为平行四边形, 设与 AB 平行的弦的端点坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$\text{则 } k_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad k_2 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}, \quad \text{故 } k_1 k_2 = \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = k_1 x \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{ 得 } A, B \text{ 的坐标分别为 } \left(\frac{4}{\sqrt{1+4k_1^2}}, \frac{4k_1}{\sqrt{1+4k_1^2}} \right), \left(-\frac{4}{\sqrt{1+4k_1^2}}, -\frac{4k_1}{\sqrt{1+4k_1^2}} \right)$$

$$\text{故 } |AB| = \frac{8}{\sqrt{1+4k_1^2}} \sqrt{1+k_1^2}$$

$$\text{同理 } C, D \text{ 的坐标分别为 } \left(\frac{4}{\sqrt{1+4k_2^2}}, \frac{4k_2}{\sqrt{1+4k_2^2}} \right), \left(-\frac{4}{\sqrt{1+4k_2^2}}, -\frac{4k_2}{\sqrt{1+4k_2^2}} \right)$$

$$\text{所以, 点 } C \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离 } d = \frac{\left| \frac{4k_1}{\sqrt{1+4k_2^2}} - \frac{4k_2}{\sqrt{1+4k_1^2}} \right|}{\sqrt{1+k_1^2}} = \frac{4|k_1 - k_2|}{\sqrt{1+k_1^2} \cdot \sqrt{1+4k_2^2}}$$

设点 C 到直线 AB 的距离为 d , 四边形 $ACBD$ 的面积为 S

则

$$\begin{aligned} S &= d|AB| \\ &= \frac{4|k_1 - k_2|}{\sqrt{1+k_1^2} \cdot \sqrt{1+4k_2^2}} \cdot \frac{8}{\sqrt{1+4k_1^2}} \sqrt{1+k_1^2} \\ &= \frac{32|k_1 - k_2|}{\sqrt{1+4k_1^2} \cdot \sqrt{1+4k_2^2}} \\ &= 32 \sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2}{1 + 4(k_1^2 + k_2^2) + 16k_1^2 k_2^2}} \\ &= 16 \end{aligned}$$

为定值

解法二:

依据结论: 若椭圆的两条共轭直径分别为 AB 和 CD , 则所围成四边形 $ABCD$ 的面积为定值 $2ab$

又 $a = 4, b = 2$

可得四边形 $ACBD$ 的面积 $S = 2 \times 4 \times 2 = 16$

练23

解答:

$$(1) \text{ 由已知得 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ c^2 = a^2 - b^2 \\ c = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\therefore \text{椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$$

(2) 常规解析:

设切点坐标为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(3, t)$

$$\text{则切线方程分别为 } \frac{x_1 x}{3} + \frac{y_1 y}{2} = 1, \quad \frac{x_2 x}{3} + \frac{y_2 y}{2} = 1$$

$\therefore$ 两条切线均过点 M

$$\therefore x_1 + \frac{y_1 t}{2} = 1, \quad x_2 + \frac{y_2 t}{2} = 1$$

即点 A, B 都在直线 $x + \frac{t}{2}y = 1$ 上

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的方程为 } x + \frac{t}{2}y = 1$$

显然直线 AB 恒过定点 $(1, 0)$

大招解析:

根据留一代一, 可设点 $M(3, t)$, 故直线 AB 的方程为 $x + \frac{t}{2}y = 1$

显然直线 AB 恒过定点 $(1, 0)$

练24

解答:

(1) $\because$ 点 $M(0, -2)$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一个顶点

$$\therefore b = 2 \text{ ①}$$

$\because$ 左焦点 $F_1(-c, 0)$ 到椭圆 C 的左准线 $x = -\frac{a^2}{c}$ 的距离为 2

$$\therefore \frac{a^2}{c} - c = 2 \text{ ②}$$

$$\text{又 } a^2 = b^2 + c^2 \text{ ③}$$

$$\therefore \text{由 ①②③ 解得 } \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) 解法1

由题意知, 直线 AB 的斜率存在, 设直线 AB 的方程为 $y = mx + n$ ($n \neq \pm 2$), $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = mx + n \end{cases}, \text{ 得 } (2m^2 + 1)x^2 + 4mnx + 2n^2 - 8 = 0$$

$$\text{则 } \Delta = (4mn)^2 - 4(2m^2 + 1)(2n^2 - 8) = 8(8m^2 - n^2 + 4) > 0, \text{ 即 } 8m^2 - n^2 + 4 > 0$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{4mn}{2m^2 + 1}, \quad x_1 x_2 = \frac{2n^2 - 8}{2m^2 + 1} \quad (*)$$

$\because$ 直线 MA, MB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 + k_2 = 8$

$$\therefore \frac{y_1 + 2}{x_1} + \frac{y_2 + 2}{x_2} = 8$$

$$\because y_1 = mx_1 + n, \quad y_2 = mx_2 + n$$

$$\therefore \frac{mx_1 + n + 2}{x_1} + \frac{mx_2 + n + 2}{x_2} = 8$$

$$\text{整理得 } (2m - 8)x_1 x_2 + (n + 2)(x_1 + x_2) = 0$$

$$\text{将 } (*) \text{ 代入化简得 } (n + 2)(m + 2n - 4) = 0$$

$$\because n \neq \pm 2$$

$$\therefore m = 4 - 2n$$

∴直线AB的方程为 $y = (4 - 2n)x + n$ ，即 $(y - 4x) + n(2x - 1) = 0$ ，不论 n 如何变化，都满足 $\begin{cases} y - 4x = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases}$ ，

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

即直线AB过定点 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

解法2

平移坐标系，建立以 $M(0, -2)$ 为原点的坐标系 $x'My'$

在坐标系 $x'My'$ 下： $M(0, 0)$ ， $A(x_1', y_1')$ ， $B(x_2', y_2')$

设直线AB方程为 $mx' + ny' = 1$

椭圆方程为 $\frac{x'^2}{8} + \frac{(y' - 2)^2}{4} = 1$ 变形得 $x'^2 + 2y'^2 - 8y' = 0$

由 $\begin{cases} x'^2 + 2y'^2 - 8y' = 0 \\ mx' + ny' = 1 \end{cases}$ 得 $x'^2 + 2y'^2 - 8y'(mx' + ny') = 0$

整理得 $(2 - 8n)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 - 8m\frac{y'}{x'} + 1 = 0$

又 $k_1 + k_2 = 8$

即 $\frac{y_1'}{x_1'} + \frac{y_2'}{x_2'} = 8$

由韦达定理得 $\frac{8m}{2 - 8n} = 8$

则 $m = 2 - 8n$ 代入 $mx' + ny' = 1$

直线AB方程为 $n(y' - 8x') + 2x' - 1 = 0$ ，过定点 $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$

故在原坐标系 xOy 下直线AB过定点 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

练25

解答：

解法1

设 $D(x_1, y_1)$ ， $E(x_2, y_2)$ ，过点B的直线DE的方程为 $y = k(x - 3)$

由 $\begin{cases} y = k(x - 3) \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，消去 y ，得： $(2k^2 + 1)x^2 - 12k^2x + 18k^2 - 6 = 0$ ，其中 $\Delta > 0$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{12k^2}{2k^2 + 1}, \quad x_1x_2 = \frac{18k^2 - 6}{2k^2 + 1}$$

$$\therefore k_{AD} + k_{AE} = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} = \frac{kx_1 - (3k + 1)}{x_1 - 2} + \frac{kx_2 - (3k + 1)}{x_2 - 2}$$

$$= \frac{2kx_1x_2 - (5k + 1)(x_1 + x_2) + 12k + 4}{x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4}$$

$$= \frac{2k \cdot \frac{18k^2 - 6}{2k^2 + 1} - (5k + 1) \cdot \frac{12k^2}{2k^2 + 1} + 12k + 4}{\frac{18k^2 - 6}{2k^2 + 1} - 2 \cdot \frac{12k^2}{2k^2 + 1} + 4}$$

$$= \frac{-4k^2 + 4}{2k^2 - 2} = -2$$

$\therefore k_{AD} + k_{AE}$ 是定值 -2

综上所述, $k_{AD} + k_{AE}$ 是定值 -2

解法2

平移坐标系, 建立以 $A(2, 1)$ 为原点的坐标系 $x' Ay'$

在坐标系 $x' Ay'$ 下: $A(0, 0)$, $B(1, -1)$, $D(x_1', y_1')$, $E(x_2', y_2')$

设直线 DE 方程为 $mx' + ny' = 1$

椭圆方程为 $\frac{(x' + 2)^2}{6} + \frac{(y' + 1)^2}{3} = 1$ 变形得 $x'^2 + 2y'^2 + 4x' + 4y' = 0$

由 $\begin{cases} x'^2 + 2y'^2 + 4x' + 4y' = 0 \\ mx' + ny' = 1 \end{cases}$ 得 $x'^2 + 2y'^2 + 4x'(mx' + ny') + 4y'(mx' + ny') = 0$

整理得 $(4n + 2)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 + (4n + 4m)\frac{y'}{x'} + 4m + 1 = 0$

由韦达定理得 $\frac{y_1'}{x_1'} + \frac{y_2'}{x_2'} = -\frac{2n + 2m}{2n + 1} = k_{AD} + k_{AE}$

又直线 DE 过 $B(1, -1)$

$\therefore m - n = 1$, $m = n + 1$

$k_{AD} + k_{AE} = -\frac{2n + 2m}{2n + 1} = -2$

综上所述, $k_{AD} + k_{AE}$ 是定值 -2

练26

解答:

(1) 由椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $a^2 = 4b^2$

将 $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 代入椭圆方程: $\frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

即 $\frac{2}{4b^2} + \frac{1}{2b^2} = 1$, 解得: $b^2 = 1$

$\therefore$ 椭圆的标准方程: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) 解法一: 当 OP , OQ 斜率都存在且不为0时

设 $l_{OP}: y = kx$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$

则 $l_{OQ}: y = -\frac{1}{k}x$

由 $\begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$, 消 y 得 $x_1^2 = \frac{4}{1 + 4k^2}$, $y_1^2 = \frac{4k^2}{1 + 4k^2}$

同理得 $x_2^2 = \frac{4k^2}{4 + k^2}$, $y_2^2 = \frac{4}{k^2 + 4}$

故 $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = \frac{1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{5}{4}$

当 OP , OQ 斜率一个为0, 一个不存在时

得 $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

由 $\frac{5}{4} = \frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} \geq \frac{2}{|OP| \cdot |OQ|}$ ，当且仅当 $|OP| = |OQ|$ 时，等号成立

则 $|OP| \cdot |OQ| \geq \frac{8}{5}$

故 $\triangle OPQ$ 面积 $S = \frac{1}{2} \cdot |OP| \cdot |OQ| \geq \frac{4}{5}$

$\therefore \triangle OPQ$ 面积的最小值为 $\frac{4}{5}$

解法二：由垂直直径的结论可知， $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$

所以 $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \geq \frac{2}{|OP| \cdot |OQ|}$ ，当且仅当 $|OP| = |OQ|$ 时，等号成立

则 $|OP| \cdot |OQ| \geq \frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2}$

所以 $\triangle OPQ$ 面积 $S = \frac{1}{2} \cdot |OP| \cdot |OQ| \geq \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{4}{5}$

$\therefore \triangle OPQ$ 面积的最小值为 $\frac{4}{5}$

第 6 讲 基础测试卷-解析几何

练 1

答案: A

解答:

$\therefore$ 过 $A(-2, m)$ 和 $B(m, 4)$ 的直线与斜率为 -2 的直线平行或重合

$$\therefore \frac{m-4}{-2-m} = -2, \text{ 解得 } m = -8$$

故选: A.

练 2

答案: B

解答:

由椭圆的方程可知, $a^2 = 16$, 即 $a = 4$

根据椭圆的定义, 可知动点 P 到两焦点距离之和为 $2a = 8$

故选: B.

练 3

答案: B

解答:

$$\text{双曲线 } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1 \text{ 的 } a = 4, b = 2\sqrt{5}, c = 6$$

$$\text{由双曲线的定义可得 } ||PF_1| - |PF_2|| = 2a = 8$$

$$|PF_1| = 9, \text{ 可得 } |PF_2| = 1 \text{ 或 } 17$$

$$\text{若 } |PF_2| = 1, \text{ 则 } P \text{ 在右支上, 应有 } |PF_2| \geq c - a = 2$$

此种情况不成立

$$\text{若 } |PF_2| = 17, \text{ 则 } P \text{ 在左支上, 应有 } |PF_2| \geq c + a = 10$$

此种情况成立

故选: B.

练 4

答案: C

解答:

设 $P(x_0, y_0)$

抛物线的准线方程是 $x = -2$

由抛物线的性质可知 $x_0 + 2 = 20$

解得 $x_0 = 18$

所以 $y_0^2 = 8 \times 18$

解得 $y_0 = \pm 12$

所以点 P 的坐标是 $(18, 12)$ 或 $(18, -12)$

故选: C.

练5

答案: D

解答:

椭圆 $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

所以 $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{2}$

椭圆 $C_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$

所以 $a = 4$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = 2\sqrt{2}$

所以两个椭圆有相同的焦距

故选: D.

练6

答案: -9

解答:

$\because$ 三点 $A(3, 1)$, $B(-2, b)$, $C(8, 11)$ 在同一直线上

$\therefore k_{AB} = k_{AC}$

$\therefore \frac{b-1}{-5} = \frac{11-1}{8-3}$

即 $\frac{b-1}{-5} = \frac{10}{5}$, 化为 $b-1 = -10$

解得 $b = -9$

故答案为: -9.

练7

答案: 2

解答:

常规解析:

设点 $A(x_1, y_1)$, 点 $B(x_2, y_2)$

抛物线 $y^2 = 4x$, 焦点为 $(1, 0)$, 准线为 $x = -1$

$|AF| = x_1 - (-1) = 2$, 所以 $x_1 = 1$

则 AF 与 x 轴垂直, $|BF| = |AF| = 2$

故答案为: 2.

大招解析:

根据抛物线方程 $y^2 = 4x$ 可得 $p = 2$

根据抛物线焦半径倒数和性质可得

$$\frac{1}{|BF|} + \frac{1}{|AF|} = \frac{2}{p} = 1$$

$$\text{代入 } |AF| = 2 \text{ 可得 } \frac{1}{|BF|} + \frac{1}{2} = 1$$

计算可得 $|BF| = 2$

故答案为: 2.

练8

答案: $0 < k < 3$

解答:

$\therefore$ 方程 $\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k-3} = 1$ 表示双曲线

$$\therefore k(k-3) < 0$$

解得 $0 < k < 3$

故答案是: $0 < k < 3$.

练9

解答:

$$(1) \text{ 方程 } x^2 + y^2 + x - 6y + m = 0 \text{ 即 } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{37}{4} - m$$

$\therefore$ 方程表示的曲线是圆 C

$$\therefore \frac{37}{4} - m > 0, \text{ 解得 } m < \frac{37}{4}$$

(2) 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$

$$\therefore OP \perp OQ, \text{ 故 } x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0 \text{ ①}$$

直线 $x + 2y - 3 = 0$ 与圆 C 联立得 $5y^2 - 20y + 12 + m = 0$

$$\therefore y_1 + y_2 = 4, y_1 \cdot y_2 = \frac{12+m}{5}$$

$$\therefore x_1 x_2 = (3 - 2y_1)(3 - 2y_2) = 9 - 6(y_1 + y_2) + 4y_1 \cdot y_2$$

代入①可得 $5y_1 \cdot y_2 - 6(y_1 + y_2) + 9 = 0$, 解得 $m = 3$, 满足 $\Delta > 0$

$$\text{圆 } C \text{ 的方程为: } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{4}$$

第7讲 中档测试卷-解析几何

练1

答案: $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

解答:

由 $|MN| \leq 2|F_1F_2|$, 得 $\frac{2a^2}{c} \leq 4c$

$$\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{即 } \frac{c}{a} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以离心率 $e \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

故答案为: $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

练2

答案: B

解答:

双曲线 $x^2 - y^2 = 2$, 即 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

则 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$

由双曲线的定义可得 $|MA| - |MB| = 2a = 2\sqrt{2}$

可得 $S = |MC| + |MB| = |MC| + |MA| - 2\sqrt{2} \geq |AC| - 2\sqrt{2} = \sqrt{26} - 2\sqrt{2}$

当且仅当 A, M, C 三点共线, 且 M 在 A, C 之间时, 取等号

故选: B.

练3

答案: A

解答:

因为 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ 表示点 $M(x, y)$ 到点 $F(1, 0)$ 的距离, 即点 $M(x, y)$ 到抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线 $x = -1$ 的距离

而 $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$ 表示点 $M(x, y)$ 到点 $A(2, 1)$ 的距离

所以 $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ 的最小值为点 $A(2, 1)$ 到抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线 $x = -1$ 的距离

$$\text{即 } \left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \right)_{\min} = 3$$

故选: A.

练4

答案: B

解答:

椭圆方程 $4x^2 + y^2 = 1$ 可化为 $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1$, 其焦点为 $(0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$

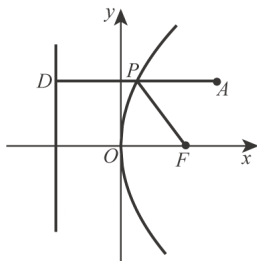
对于抛物线, 焦点到准线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$

故选: B.

练5

答案: D

解答:

依题意, 过点 P 作准线的垂线, 垂足为 D 

则根据抛物线的定义得: $|PD| = |PF|$

$$\therefore |PA| + |PF| = |PA| + |PD|$$

显然, 当 P, A, D 三点共线时, $|PA| + |PD|$ 取得最小值为 $|AD|$

$\because A(3, 2)$, 抛物线的准线方程为 $x = -2$

$$\therefore |AD| = 3 - (-2) = 5$$

$\therefore |PA| + |PF|$ 的最小值为 5

故选: D.

练6

答案: $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$

解答:

易知 $(3, \sqrt{3})$ 在圆: $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 上

圆的标准方程为 $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

$\therefore$ 圆心为 $(2, 0)$, 半径为 $r = 2$

$\therefore (3, \sqrt{3})$ 与 $(2, 0)$ 的连线斜率为 $\frac{\sqrt{3} - 0}{3 - 2} = \sqrt{3}$

$\therefore$ 切线斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ 切线方程为 $y - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3)$

即 $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$

故答案为: $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$.

练7

答案: $\frac{\pi}{3}$

解答:

设 $\angle F_1 P F_2 = \theta$

在双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 中, $a = b = 1$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$

$\therefore P$ 为双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 上一点, F_1, F_2 为双曲线的左、右焦点

$\therefore |PF_1| - |PF_2| = 2a = 2$

两边平方得: $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 4$ ①

在 $\triangle F_1 P F_2$ 中, 由余弦定理可得 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cos \theta = |F_1 F_2|^2 = 4c^2 = 8$ ②

由 ①② 可得: $|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{2}{1 - \cos \theta}$

$\therefore \triangle F_1 P F_2$ 的面积为 $\sqrt{3}$

$\therefore \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| \sin \theta = \sqrt{3}$

$\therefore \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \sqrt{3}$

即 $\frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{3}$

$\therefore \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore 0 < \theta < \pi$

$\therefore \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}$

即 $\theta = \frac{\pi}{3}$

即 $\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{3}$

故答案为: $\frac{\pi}{3}$.

练8

答案: $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

解答:

联立 $y = \frac{x}{2}$ 与 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 得 $x^2 = \frac{4a^2b^2}{4b^2 - a^2}$

$\therefore$ 直线 $y = \frac{x}{2}$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 交于两点

$\therefore 4b^2 > a^2$, 即 $b^2 > \frac{a^2}{4}$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 > a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

$\therefore c > \frac{\sqrt{5}}{2}a$

$\therefore e = \frac{c}{a} > \frac{\sqrt{5}}{2}$

故答案为: $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

练9

解答:

(1) 若 $\angle F_1AB = 90^\circ$, 则 $\triangle AOF_2$ 为等腰直角三角形

所以有 $|OA| = |OF_2|$, 即 $b = c$

所以 $a = \sqrt{2}c$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 由题知 $A(0, b)$, $F_2(1, 0)$, 设 $B(x, y)$

$\overrightarrow{AF_2} = (1, -b)$, $\overrightarrow{F_2B} = (x-1, y)$

由 $\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$ 得 $\begin{cases} 1 = 2x - 2 \\ -b = 2y \end{cases}$, 解得 $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{b}{2}$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 得 $\frac{9}{4a^2} + \frac{b^2}{4b^2} = 1$

即 $\frac{9}{4a^2} + \frac{1}{4} = 1$, 解得 $a^2 = 3$

$b^2 = a^2 - c^2 = 2$

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$