

高三 数学

一轮闯关训练-平面向量

Math

产品亮点

- ▶ 分层合理效率高
- ▶ 精选分类覆盖广
- ▶ 题目典型收获多

目录



第 1 讲

平面向量的概念及线性运算	1
--------------	---

第 2 讲

平面向量基本定理	7
----------	---

第 3 讲

平面向量的数量积	14
----------	----

第 4 讲

平面向量的坐标运算	20
-----------	----

平面向量

基础检测卷	26
-------	----

平面向量

中档检测卷	28
-------	----

参考答案与解析	30
---------	----

第 1 讲

平面向量的概念及线性运算



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

平面向量的概念与表示

练1 (★☆☆☆☆)

若 a 与 b 不相等，则 a 与 b 一定 ()

- A. 不共线 B. 长度不相等 C. 不都是单位向量 D. 不都是零向量

练2 (★☆☆☆☆)

下列各量中是向量的是 ()

- A. 密度 B. 重量 C. 体积 D. 速度

平面向量的加减法及其应用

练3 (★☆☆☆☆)

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = ()$

- A. $\overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{OA}$ C. $\overrightarrow{OB}$ D. $\overrightarrow{OC}$

练4 (★☆☆☆☆)

化简 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$ 的结果是 ()

A. $\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{DA}$

D. $\overrightarrow{CA}$

数乘运算及其应用

练5 (★☆☆☆☆)

$4(a - b) - 3(a - b) - b = ()$

A. $a - 2b$

B. a

C. $a - 6b$

D. $a - 8b$

练6 (★★☆☆☆)

设 a, b 为不共线的向量, $\overrightarrow{AB} = a + 2b$, $\overrightarrow{BC} = -4a - b$, $\overrightarrow{CD} = -5a - 3b$, 则下列关系式中正确的是 ()

A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

B. $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$

C. $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BC}$

D. $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{BC}$

平面向量共线定理

练7 (★☆☆☆☆)

若 e_1, e_2 是两个不共线的向量, 则下面的四组向量中, 共线的一组是 ()

A. $e_1 + e_2$ 和 $e_1 - e_2$

B. $3e_1 - 2e_2$ 和 $-6e_1 + 4e_2$

C. $e_1 + 2e_2$ 和 $2e_1 - e_2$

D. $e_1 + 2e_2$ 和 $e_1 + e_2$

练8 (★☆☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D, E 分别是 AB, AC 的中点, 则 ()

A. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线

B. $\overrightarrow{DE}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 共线

C. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 相等

D. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 相等

练9 (★★☆☆☆)

已知向量 $\overrightarrow{AB} = a + 3b$, $\overrightarrow{BC} = 5a + 3b$, $\overrightarrow{CD} = -3a + 3b$, 则 ()

A. A, B, C 三点共线

B. A, B, D 三点共线

C. A, C, D 三点共线

D. B, C, D 三点共线

练10 (★★☆☆☆)

点 C 在线段 AB 的延长线上, 且 $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{BC} =$ ()

A. $2\overrightarrow{AB}$

B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

C. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

D. $-2\overrightarrow{AB}$

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分).

平面向量的概念与表示

练11 (★★☆☆☆)

若四边形 $ABCD$ 满足 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, 则四边形 $ABCD$ 的形状一定是 ()

A. 平行四边形

B. 菱形

C. 矩形

D. 正方形

练12 (★★☆☆☆)

在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$, 那么四边形 $ABCD$ 为 ()

A. 平行四边形

B. 菱形

C. 长方形

D. 正方形

平面向量的加减法及其应用

练13 (★★☆☆☆)

化简 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD}$ 的结果是 ()

A. $\mathbf{0}$

B. $\overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AD}$

练14 (★★☆☆☆)

化简以下各式:

① $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$; ② $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$; ③ $\overrightarrow{FQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EP}$; ④ $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB}$.

其中结果为零向量的个数是 ()

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

练15 (★★☆☆☆)

已知向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 不共线, 若 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = -4\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = -5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, 则四边形 $ABCD$ 是 ()

- A. 梯形 B. 平行四边形 C. 矩形 D. 菱形

数乘运算及其应用

练16 (★★☆☆☆)

已知点 C 在线段 AB 上, 且 $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{AC}$ 等于 ()

- A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ B. $\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ C. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ D. $-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

练17 (★★☆☆☆)

若不共线的四点 P, A, B, C , 满足 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AP}$, 则实数 m 的值为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

平面向量共线定理

练18 (★★☆☆☆)

给出下列命题:

- (1) 两个具有公共终点的向量, 一定是共线向量;
- (2) 两个向量不能比较大小, 但它们的模能比较大小;
- (3) 若 $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (λ 为实数), 则 λ 必为零;
- (4) 已知 λ, μ 为实数, 若 $\lambda\mathbf{a} = \mu\mathbf{b}$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线.

其中错误的命题的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

练19 (★★☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 若点 D 满足 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AD} =$ ()

- A. $\frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{c}$ B. $\frac{2}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c}$ C. $\frac{4}{3}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\mathbf{c}$ D. $\frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$

练20 (★★☆☆☆)

已知 D 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, 则 ()

A. $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

B. $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

C. $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

D. $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

提能力 本模块适合90-120分水平学生(满分150分)。

平面向量的加减法及其应用

练21 (★★☆☆☆)

下列各式中不能化简为 $\overrightarrow{PQ}$ 的是 ()

A. $\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BQ})$

B. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PC}) + (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{QC})$

C. $\overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{CQ}$

D. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BQ}$

平面向量共线定理

练22 (★★★★☆)

已知向量 a, b 是两个不共线的向量, 且向量 $ma - 3b$ 与 $a + (2 - m)b$ 共线, 则实数 m 的值为 ()

A. -1或3

B. $\sqrt{3}$

C. -1或4

D. 3或4

练23 (★★★★☆)

已知 D 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 若 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{DC}|} = ()$

A. 1:3

B. 3:1

C. 1:2

D. 2:1

练24 (★★★★☆)

在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 上一点, E 为线段 AD 的中点, 若 $2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, 且 $\overrightarrow{BE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $x + y = ()$

A. $-\frac{2}{3}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{3}$

练25 (★★★★☆☆)

在 $\triangle ABC$ 所在的平面内有一点 P ，如果 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$ ，那么 $\triangle PAB$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积之比是()

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

练26 (★★★★☆☆)

已知点 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$ ，则 $\triangle APB$ ， $\triangle APC$ ， $\triangle BPC$ 的面积之比等于()

A. 9:4:1

B. 1:4:9

C. 3:2:1

D. 1:2:3

第 2 讲

平面向量基本定理



注：本书所有的选择题均为单选题，有且只有一个选项正确。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

平面向量基本定理概念

练1 (★☆☆☆☆)

下面说法中，正确的是（ ）

- ①一个平面内只有一对不共线向量可作为表示该平面所有向量的基底；
- ②一个平面内有无数多对不共线向量可作为该平面所有向量的基底；
- ③零向量不可作为基底中的向量。

A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①②③

练2 (★☆☆☆☆)

下列各组向量中，可以作为基底的是（ ）

- A. $e_1 = (0, 0)$, $e_2 = (1, -2)$
- B. $e_1 = (-1, -2)$, $e_2 = (3, 6)$
- C. $e_1 = (3, -5)$, $e_2 = (6, 10)$
- D. $e_1 = (2, -3)$, $e_2 = (-2, 3)$

练3 (★★☆☆☆)

设 e_1 , e_2 不共线，则下列四组向量中不能作为基底的是（ ）

- A. $e_1 + e_2$ 与 $e_1 - e_2$
- B. $2e_1 - 3e_2$ 与 $4e_1 - 6e_2$
- C. $e_1 + 2e_2$ 与 $e_2 + 2e_1$
- D. e_2 和 $e_1 + e_2$

练4 (★★☆☆☆)

设 e_1, e_2 是两个不共线的向量, 且 $a = e_1 + \lambda e_2$ 与 $b = -\frac{1}{3}e_2 - e_1$ 共线, 则实数 $\lambda =$ ()

- A. -1 B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

平面向量基本定理的应用

练5 (★★☆☆☆)

已知 a, b 为非零不共线向量, 向量 $8a - kb$ 与 $-ka + b$ 共线, 则 $k =$ ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $-2\sqrt{2}$ C. $\pm 2\sqrt{2}$ D. 8

练6 (★★☆☆☆)

设 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b, \overrightarrow{OC} = c$, 当 $c = \lambda a + \mu b$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 且 $\lambda + \mu = 1$ 时, 点 C 在 ()

- A. 线段 AB 上 B. 直线 AB 上
C. 直线 AB 上, 但除去 A 点 D. 直线 AB 上, 但除去 B 点

练7 (★★☆☆☆)

已知 a, b, c 是共起点的向量, a, b 不共线, 且存在 $m, n \in \mathbf{R}$ 使 $c = ma + nb$ 成立, 若 a, b, c 终点共线, 则必有 ()

- A. $m + n = 0$ B. $m - n = 1$ C. $m + n = 1$ D. $m + n = -1$

练8 (★★☆☆☆)

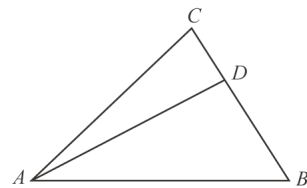
已知 D 为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的一点, 且 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{BC}$, 则实数 λ 的值为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

练9 (★☆☆☆☆)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BD = 2DC$. 若 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{AD} = (\quad)$

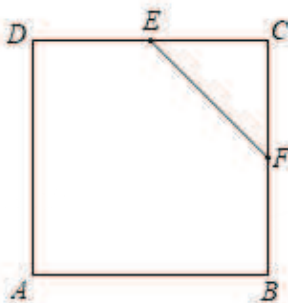
- A. $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$
 B. $\frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}$
 C. $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$
 D. $\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}$



练10 (★★☆☆☆)

如图, 正方形 $ABCD$ 中, 点 E , F 分别是 DC , BC 的中点, 那么 $\overrightarrow{EF} = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
 B. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
 C. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
 D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$



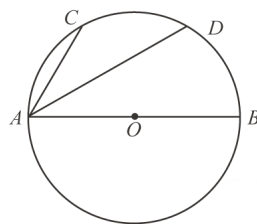
刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分)。

平面向量基本定理及应用

练11 (★★☆☆☆)

如图, 已知 AB 是圆 O 的直径, 点 C , D 是半圆弧的两个三等分点, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{AD} = (\quad)$

- A. $\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$
 B. $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}$
 C. $\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$
 D. $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}$



练12 (★★☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 若 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{EB}$ 可用 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 表示为 ()

- A. $\frac{1}{4}\mathbf{a} - \frac{3}{4}\mathbf{b}$ B. $\frac{3}{4}\mathbf{a} - \frac{1}{4}\mathbf{b}$ C. $\frac{3}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}$ D. $\frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b}$

练13 (★★★☆☆)

在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 为 CD 的中点, 点 F 满足 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AB}$, 则 $x + y =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{2}{5}$

练14 (★★★☆☆)

$\triangle ABC$ 内一点 O 满足 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 直线 AO 交 BC 于点 D , 则 ()

- A. $2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \mathbf{0}$ B. $3\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \mathbf{0}$ C. $\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OD} = \mathbf{0}$ D. $5\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \mathbf{0}$

练15 (★★★☆☆)

已知 O , A , B , C 为同一平面内的四个点, 若 $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \mathbf{0}$, 则向量 $\overrightarrow{OC}$ 等于 ()

- A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ B. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ C. $2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ D. $-\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$

练16 (★★★☆☆)

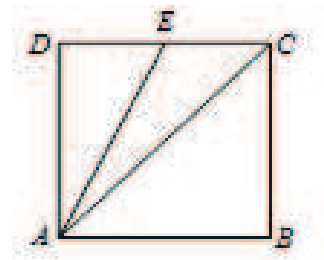
在 $\triangle ABO$ 中, G 为 AB 边上一点, OG 是 $\angle AOB$ 的平分线, 且 $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}$, $m \in \mathbf{R}$, 则 $\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OB}|}$ 的值为

- ()
A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

练17 (★★★★☆)

如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E 为 DC 的中点, 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$
 B. $-\frac{1}{2}$
 C. 1
 D. -1



练18 (★★☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在线段 BC 上, 且 $BD = 3DC$, 若 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

练19 (★★★★☆)

已知点 M 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点, 点 E 在边 AC 上, 且 $\overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{AE}$, 则向量 $\overrightarrow{EM} =$ ()

- A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ C. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ D. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

练20 (★★★★☆)

在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 为 CD 的中点, BE 与 AC 的交点为 F , 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, 则向量 $\overrightarrow{BF} =$ ()

- A. $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$ B. $-\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}$ C. $-\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$ D. $\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}$

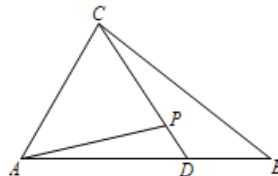
提能力 本模块适合90-120分水平学生(满分150分)。

平面向量基本定理及应用

练21 (★★★★☆)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, P 为 CD 上一点, 且满足 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 则 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为()

- A. $\sqrt{2}$
B. $\sqrt{3}$
C. 3
D. $\frac{4}{3}$



练22 (★★★★☆)

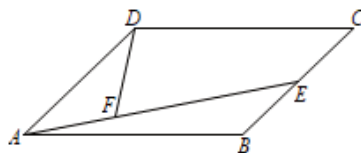
在平行四边形 $ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 则 $\overrightarrow{EF} =$ ()

- A. $-\frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{6}\mathbf{b}$ B. $-\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{6}\mathbf{b}$ C. $-\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{6}\mathbf{b}$ D. $-\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{6}\mathbf{b}$

练23 (★★★★☆)

如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 是 BC 的中点, F 是线段 AE 上靠近点 A 的三等分点, 则 $\overrightarrow{DF} =$ ()

- A. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$
D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$



练24 (★★★★☆)

在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $DE \parallel BC$, 且与边 AC 相交于点 E , $\triangle ABC$ 的中线 AM 与 DE 相交于点 N , 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{MN} =$ ()

- A. $-\frac{3}{8}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ B. $-\frac{3}{8}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ C. $-\frac{3}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ D. $-\frac{3}{4}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$

练25 (★★★★☆)

已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，动点 P 在以 BC 为直径的圆上，若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ ，则 $\lambda + 2\mu$ 的最大值为()

A. $\frac{1}{2}$

B. $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{5}{2}$

D. $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

练26 (★★★★☆)

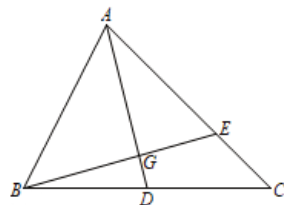
如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 中点， $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EC}$ ， AD 与 BE 相交于 G ，若 $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{GD}$ ， $\overrightarrow{BG} = y\overrightarrow{GE}$ ，则 $x + y =$ ()

A. 4

B. $\frac{14}{3}$

C. $\frac{9}{2}$

D. $\frac{11}{2}$



第3讲

平面向量的数量积



注：本书所有的选择题均为单选题，有且只有一个选项正确。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

数量积计算

练1（★☆☆☆☆）

已知 $\triangle ABC$ 中， $BC = 5$ ， $AC = 8$ ， $C = 60^\circ$ ，则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = (\quad)$

- A. 60 B. -60 C. 20 D. -20

练2（★☆☆☆☆）

已知向量 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 的夹角为 60° ，且 $|\mathbf{a}| = 1$ ， $|\mathbf{b}| = 2$ ，则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 1 D. 2

练3（★☆☆☆☆）

已知向量 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 的夹角为 120° ，且 $|\mathbf{a}| = 1$ ， $|\mathbf{b}| = 4$ ，则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\quad)$

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

数量积问题之夹角

练4 (★☆☆☆☆)

已知向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

练5 (★☆☆☆☆)

已知 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10$, $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 4$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角 $\theta =$ ()

- A. 0° B. 60° C. 120° D. 150°

练6 (★★☆☆☆)

已知非零向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 2|\mathbf{b}|$, 且 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

练7 (★★☆☆☆)

已知两个单位向量 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, 若 $(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) \perp \mathbf{e}_1$, 则 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ 的夹角为 ()

- A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

数量积问题之投影

练8 (★☆☆☆☆)

已知 $|\mathbf{b}| = 3$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -12$, 则向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 方向上的投影是 ()

- A. -4 B. 4 C. -2 D. 2

练9 (★☆☆☆☆)

已知向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}$, 则 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 方向上的投影为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

练10 (★★☆☆☆)

已知向量 $a = (2, 2\sqrt{3})$, 若 $a \cdot b = -\frac{16}{3}$, 则 b 在 a 上的投影是 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

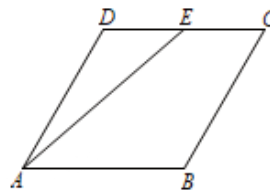
刷中档 本模块适合60-90分水平学生 (满分150分) .

数量积计算

练11 (★★☆☆☆)

如图所示, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, $\angle DAB = 60^\circ$, E 为 CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$ 的值是 ()

- A. 1
B. -1
C. 2
D. -2



练12 (★★☆☆☆)

已知正方形 $ABCD$ 的边长为3, $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{EC}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = ()$

- A. 3 B. -3 C. 6 D. -6

练13 (★★☆☆☆)

已知向量 a, b 满足 $|a| = 1$, $a \cdot b = -1$, 则 $a \cdot (2a - b) = ()$

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 0

练14 (★★☆☆☆)

已知 e_1, e_2 是两个单位向量, 且夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $e_1 + te_2$ 与 $te_1 + e_2$ 数量积的最小值为 ()

- A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

数量积问题之夹角

练15 (★★☆☆☆)

已知向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|2\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{3}|2\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 ()

- A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°

练16 (★★☆☆☆)

已知 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 均为单位向量, 若 $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{3}$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

练17 (★★☆☆☆)

若向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 5$, $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$, 则向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 的夹角为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

数量积问题之投影

练18 (★★☆☆☆)

已知向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{b}|$, 且 $|\mathbf{a}| = 2$, 则 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向上的投影是 ()

- A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

练19 (★★☆☆☆)

已知 $|\mathbf{a}| = 2$, 向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 上的投影为 1, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

练20 (★★☆☆☆)

已知向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|2\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 2$, 则向量 $\mathbf{b}$ 在向量 $\mathbf{a}$ 方向上的投影是 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. -1 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

提能力

本模块适合90-120分水平学生(满分150分)。

数量积计算

练21 (★★★★☆)

在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$, $|\overrightarrow{AB}| = \lambda |\overrightarrow{AC}|$, 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC}$, 则实数 $\lambda =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

练22 (★★★★☆)

在边长为1的正三角形 ABC 中, $\overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CE} = y\overrightarrow{CA}$, $x > 0$, $y > 0$, 且 $x + y = 1$, 则 $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最大值为 ()

- A. $-\frac{5}{8}$ B. $-\frac{3}{8}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{4}$

数量积问题之夹角

练23 (★★★★☆)

设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $3\overrightarrow{HA} + 4\overrightarrow{HB} + 5\overrightarrow{HC} = \mathbf{0}$, 则 $\cos \angle BHC$ 的值为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{30}}{10}$ B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ D. $-\frac{\sqrt{70}}{14}$

练24 (★★★★☆)

设单位向量 e_1, e_2 对任意实数 λ 都有 $\left|e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2\right| \leq |e_1 + \lambda e_2|$, 则向量 e_1, e_2 的夹角为 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

数量积问题之投影

练25 (★★★★☆)

已知向量 a, b 满足 $|a| = 3$, $|b| = 2$, $|a - 2b| \leq 4$, 则 b 在 a 上的投影的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{9}{8}, 2\right]$ B. $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ C. $\left[\frac{3}{4}, 2\right]$ D. $\left(0, \frac{3}{4}\right]$

练26 (★★★★☆)

在同一平面内, 已知 A 为动点, B, C 为定点, 且 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\angle ACB \neq \frac{\pi}{2}$, $BC = 1$, P 为 BC 的中点. 过点 P 作 $PQ \perp BC$ 交 AC 所在直线于 Q , 则 $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上投影的最大值是 ()

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

第4讲

平面向量的坐标运算



注：本书所有的选择题均为单选题，有且只有一个选项正确。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

线性坐标运算

练1 (★☆☆☆☆)

若 $A(2, -1)$, $B(-1, 3)$, 则 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标是 ()

- A. $(1, 2)$ B. $(-1, -2)$ C. $(-3, 4)$ D. $(3, -4)$

练2 (★☆☆☆☆)

已知 $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$, 则 $\overrightarrow{AB} = ()$

- A. $(-3, -1)$ B. $(3, 1)$ C. $(-3, 1)$ D. $(3, -1)$

练3 (★☆☆☆☆)

已知 $A(1, 1)$, $B(-2, 2)$, O 是坐标原点, 则 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = ()$

- A. $(-1, 3)$ B. $(3, -1)$ C. $(1, 1)$ D. $(-2, 2)$

练4 (★☆☆☆☆)

已知向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (3, 1)$, 则 $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (\quad)$

- A. $(2, -1)$ B. $(-2, 1)$ C. $(2, 0)$ D. $(4, 3)$

练5 (★☆☆☆☆)

若向量 $\mathbf{a} = (2, -1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1)$, 则 $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (\quad)$

- A. $(4, -3)$ B. $(3, -2)$ C. $(4, 3)$ D. $(0, 1)$

练6 (★☆☆☆☆)

已知向量 $\mathbf{a} = (m, 4)$, $\mathbf{b} = (3, -2)$, 且 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$, 则 $m = (\quad)$

- A. 6 B. -6 C. $\frac{8}{3}$ D. $-\frac{8}{3}$

练7 (★☆☆☆☆)

已知向量 $\mathbf{a} = (x, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, 1)$, 满足 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$, 则 $x = (\quad)$

- A. 1 B. -1 C. 4 D. -4

数量积的坐标运算

练8 (★☆☆☆☆)

已知向量 $\mathbf{a} = (1, 3)$, $\mathbf{b} = (3, -2)$, 则 $2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\quad)$

- A. 12 B. -3 C. 3 D. -6

练9 (★☆☆☆☆)

已知向量 $\mathbf{a} = (1, -1)$, $\mathbf{b} = (-2, 3)$, 则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = (\quad)$

- A. $\sqrt{5}$ B. 1 C. 5 D. 25

练10 (★★☆☆☆)

已知向量 $\mathbf{a} = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{b} = (-2, m)$, 若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线, 则 $|\mathbf{b}| = (\quad)$

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{2}$

刷中档 本模块适合60-90分水平学生 (满分150分) .

线性坐标运算

练11 (★★☆☆☆)

若 $\mathbf{a} = (3, 4)$, $\mathbf{b} = (-1, 5)$, 则 $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 的坐标为 ()

- A. (7, 22) B. (11, 2) C. (-11, -2) D. (-7, -22)

练12 (★★☆☆☆)

设向量 $\mathbf{a} = (-1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -4)$, 则 ()

- A. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ B. $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同向 C. $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 反向 D. $\frac{1}{5}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ 是单位向量

练13 (★★☆☆☆)

AC 为平行四边形 $ABCD$ 的一条对角线, $\overrightarrow{AB} = (2, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 3)$, 则 $\overrightarrow{AD} = (\quad)$

- A. (2, 4) B. (3, 7) C. (1, 1) D. (-1, -1)

练14 (★★☆☆☆)

已知 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = (2, 8)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 4)$, 若 $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$, 则 $\overrightarrow{AM}$ 的坐标为 ()

- A. $\left(-\frac{1}{2}, 6\right)$ B. $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$ C. (-1, 12) D. (5, 4)

练15 (★★☆☆☆)

若向量 $\mathbf{m} = (0, -2)$, $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1)$, 则与 $2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ 共线的向量可以是 ()

- A. $(\sqrt{3}, -1)$ B. $(-1, \sqrt{3})$ C. $(-\sqrt{3}, -1)$ D. $(-1, -\sqrt{3})$

练16 (★★☆☆☆)

向量 $\mathbf{a} = (-4, 5)$, $\mathbf{b} = (\lambda, 1)$, 若 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \parallel \mathbf{b}$, 则 λ 的值是 ()

- A. $-\frac{5}{4}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. -2

数量积的坐标运算

练17 (★★☆☆☆)

已知向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{m} = (4, 6)$ 平行, $\mathbf{b} = (-5, 1)$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 14$, 则 $\mathbf{a} =$ ()

- A. $(4, 6)$ B. $(-4, -6)$
C. $\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$ D. $\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$

练18 (★★☆☆☆)

已知向量 $\mathbf{a} = (-\sqrt{2}, 1)$, $\mathbf{b} = (m, 3)$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{\sqrt{3}}{|\mathbf{a}|}$, 则 $m =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 3

练19 (★★☆☆☆)

已知平面向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 15$, $\mathbf{b} = (3, 4)$, 则 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 方向上的投影为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

练20 (★★☆☆☆)

已知点 $A(-1, 1)$, $B(1, 2)$, $C(-2, -1)$, $D(3, 4)$, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 方向上的投影为 ()

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ C. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{3\sqrt{15}}{2}$

提能力 本模块适合90-120分水平学生（满分150分）.

线性坐标运算

练21 (★★★★☆)

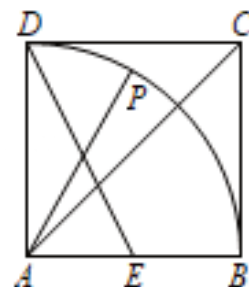
如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 为 AB 的中点， P 为以 A 为圆心、 AB 为半径的圆弧 $\widehat{DB}$ 上的任意一点，设向量 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{DE} + \mu \overrightarrow{AP}$ ，则 $\lambda + \mu$ 的取值范围为 ()

A. $[-1, 5]$

B. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

C. $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$

D. $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$



练22 (★★★★☆)

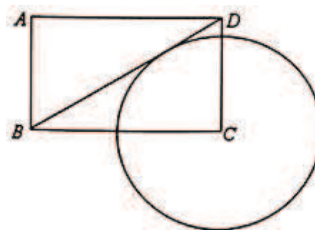
在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 1$ ， $AD = 2$ ，动点 P 在以 C 为圆心且与 BD 相切的圆上，若 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BA} + \mu \overrightarrow{BC}$ ，设 $\lambda + 2\mu$ 的最大值为 M ，最小值为 N ，则 $M - N$ 的值为 ()

A. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

B. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$

C. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

D. $\sqrt{10}$



练23 (★★★★☆)

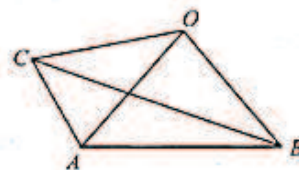
如图，在四边形 $ABOC$ 中， $AO = BO = CO$ ， $AB = 2$ ， $AC = 1$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，若 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ ，则 $\lambda + \mu$ 的值为 ()

A. $\frac{13}{6}$

B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{17}{6}$

D. $\frac{13}{3}$



数量积的坐标运算

练24 (★★★★☆)

记 M 的最大值和最小值分别为 $M_{\max}$ 和 $M_{\min}$. 若平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}) = 2$, 则 ()

A. $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}|_{\max} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$

B. $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}|_{\max} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}$

C. $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}|_{\min} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$

D. $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}|_{\min} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}$

练25 (★★★★☆)

已知单位向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 且 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, 若 $t \in [0, 1]$, 则 $|t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}| + \left| \frac{5}{12}\boldsymbol{b} + (1-t)(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \right|$ 的最小值为 ()

A. $\frac{\sqrt{193}}{12}$

B. $\frac{13}{12}$

C. $\sqrt{2}$

D. 1

练26 (★★★★☆)

已知向量是单位向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 且 $|\vec{c} - \vec{a}| + |\vec{c} - 2\vec{b}| = \sqrt{5}$, 则 $|\vec{c} + 2\vec{a}|$ 的取值范围是 ().

A. $[1, 3]$

B. $[2\sqrt{3}, 3]$

C. $\left[\frac{6\sqrt{5}}{5}, 2\sqrt{2} \right]$

D. $\left[\frac{6\sqrt{5}}{5}, 3 \right]$

平面向量

基础检测卷

本试卷共9个题目，选择5个，填空3个，解答1个，均为基础水平题目。限时30分钟。得分在70分以上视为合格，可以去做【刷中档】模块题目，冲刺更高的水平。

一、单选题，共5题，每题10分.

1. (★★☆☆☆)

下列命题正确的是()

- A. 若向量 $a \parallel b$ ，则 a 与 b 的方向相同或相反
 B. 若向量 $a \parallel b$ ， $b \parallel c$ ，则 $a \parallel c$
 C. 若两个单位向量互相平行，则这两个单位向量相等
 D. 若向量 $a = b$ ， $b = c$ ，则 $a = c$

2. (★★☆☆☆)

如果 e_1 ， e_2 是平面内一组不共线的向量，那么下列四组向量中，不能作为平面内所有向量的一组基底的是()

- A. e_1 与 $e_1 + e_2$
 B. $e_1 - 2e_2$ 与 $e_1 + 2e_2$
 C. $e_1 + e_2$ 与 $e_1 - e_2$
 D. $e_1 - 2e_2$ 与 $-e_1 + 2e_2$

3. (★★☆☆☆)

已知 D 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点， $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ，则()

- A. $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$
 B. $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$
 C. $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$
 D. $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

4. (★★☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 为边 AB 的中点, 则向量 $\overrightarrow{CD} = (\quad)$

A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

B. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

C. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

5. (★★☆☆☆)

已知向量 $\mathbf{a} = (2, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 3)$, 则向量 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 的夹角为 ()

A. 135°

B. 60°

C. 45°

D. 30°

二、填空题, 共3题, 每题10分.

6. (★★☆☆☆)

若向量 $\mathbf{m} = (2k - 1, k)$ 与向量 $\mathbf{n} = (4, 1)$ 共线, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. (★★☆☆☆)

在矩形 $ABCD$ 中, $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{BC}| = 4$, 则 $|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DC}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. (★★☆☆☆)

设向量 $\mathbf{a} = (4, m)$, $\mathbf{b} = (1, -2)$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题, 共1题, 每题20分.

9. (★★☆☆☆)

已知向量 $\overrightarrow{OP}$ 的终点在二次函数 $y = x^2 - 1$ 的图象上.(1) 若 $|\overrightarrow{OP}| = 1$, 求 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标;(2) $\mathbf{a} = (-2, -3)$, 若 $\overrightarrow{OP} \parallel \mathbf{a}$, 求 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标. (提示: 设 $P(a, a^2 - 1)$)

平面向量

中档检测卷

本试卷共9个题目，选择5个，填空3个，解答1个，均为中档水平题目。限时30分钟。得分在70分以上视为合格，可以去做【提能力】模块题目，冲刺更高的水平。

一、单选题，共5题，每题10分.

练1 (★★★★☆)

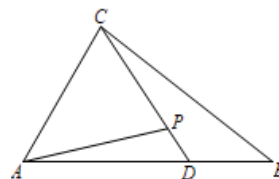
已知平面内一点 P 及 $\triangle ABC$ ，若 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC}$ ，则 P 与 $\triangle ABC$ 的位置关系是()

- A. P 在 $\triangle ABC$ 外部 B. P 在线段 AB 上 C. P 在线段 AC 上 D. P 在线段 BC 上

练2 (★★★★☆)

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ ， $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$ ， P 为 CD 上一点，且满足 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ，若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$ ，则 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为()

- A. $\sqrt{2}$
B. $\sqrt{3}$
C. 3
D. $\frac{4}{3}$



练3 (★★★★☆)

$\triangle ABC$ 中， $|\overrightarrow{AC}| = 2$ ， $|\overrightarrow{BC}| = 3$ ， $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 3$ ， O 为该三角形的外心，则 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AO} = ()$

- A. $\frac{19}{2}$ B. $-\frac{19}{2}$ C. $-\frac{7}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

练4 (★★★★☆☆)

已知平面向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 1$, 且 $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{3}$, 则向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 夹角的正弦值为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

练5 (★★★★☆☆)

$\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $AC = 4$, $\angle BAC = 60^\circ$, P 为线段 AC 上任意一点, 则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的范围是 ()

- A. $[1, 4]$ B. $[0, 4]$ C. $[-2, 4]$ D. $\left[-\frac{9}{4}, 4\right]$

二、填空题, 共3题, 每题10分.

练6 (★★★★☆☆)

设 E 为 $\triangle ABC$ 的边 AC 的中点, $\overrightarrow{BE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, 则 $m + n =$ _____.

练7 (★★★★☆☆)

已知平面向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足: $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{5}$, $|\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{2}$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ 的夹角 $\theta =$ _____.

练8 (★★★★☆☆)

已知 $\mathbf{a} = (3, m)$, $\mathbf{b} = (1, -2)$, 若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 3b^2 = 0$, 则实数 $m =$ _____.

三、解答题, 共1题, 每题20分.

练9 (★★★★☆☆)

已知 $\triangle ABC$ 内接于以 O 为圆心, 1 为半径的圆, 且 $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$.

(1) 求数量积, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$.

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

参考答案与解析

第 1 讲 平面向量的概念及线性运算

练 1

答案：D

解答：

若 a, b 都是零向量，则 $a = b$

所以 a 与 b 一定不都是零向量

故选：D.

练 2

答案：D

解答：

向量是既有方向，又有大小的量，四个选项中只有速度既有方向，又有大小

故选：D.

练 3

答案：D

解答：

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$$

故选：D.

练 4

答案：A

解答：

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$

故选：A.

练5

答案: A

解答:

$$4(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - 3(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$$

故选: A.

练6

答案: B

解答:

$$\text{由条件可得 } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -8\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = 2\overrightarrow{BC}$$

$$\text{则关系式中正确的是 } \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$$

故选: B.

练7

答案: B

解答:

$$\text{A. } \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \lambda(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \lambda \text{ 不存在, 故两向量不共线}$$

$$\text{B. } 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 = \lambda(-6\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2), \text{ 解得 } \lambda = -\frac{1}{2}, \text{ 故两向量共线}$$

$$\text{C. } \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 = \lambda(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \lambda \text{ 不存在, 故两向量不共线}$$

$$\text{D. } \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 = \lambda(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \lambda \text{ 不存在, 故两向量不共线}$$

故选: B.

练8

答案: B

解答:

$\because D, E$ 分别是 AB, AC 的中点

由三角形的中位线定理可得: $DE \parallel BC$

$\therefore \overrightarrow{DE}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 共线

故选: B.

练9

答案: B

解答:

$$\therefore \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} = 2\mathbf{a} + 6\mathbf{b} = 2(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = 2\overrightarrow{AB}$$

又 $\therefore \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 共点B

$\therefore A, B, D$ 三点共线

故选: B.

练10

答案: A

解答:

$$\therefore \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{AB}$$

$$\text{可得: } \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$$

故选: A.

练11

答案: A

解答:

$$\text{由 } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

知 $AB \parallel CD$, $AB = CD$, 故四边形 $ABCD$ 为平行四边形

故选: A.

练12

答案: B

解答:

由 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ 可得四边形 $ABCD$ 是平行四边形

由 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ 得四边形 $ABCD$ 的一组邻边相等

$\therefore$ 一组邻边相等的平行四边形是菱形

故选: B.

练13

答案: A

解答:

由向量的运算法则可得: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$

故选: A.

练14

答案: D

解答:

$$\textcircled{1} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$$

$$\textcircled{2} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} = \mathbf{0}$$

$$\textcircled{3} \overrightarrow{FQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{EP} = \mathbf{0}$$

$$\textcircled{4} \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB} = \mathbf{0}$$

所以结果为零向量的个数是4,

故选: D.

练15

答案: A

解答:

根据题意, 向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 不共线, 若 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = -4\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = -5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$

则向量 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -8\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$

分析可得: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$, 即直线 AD 与 BC 平行

而向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 不共线, 即直线 AB 与 CD 不平行

故四边形 $ABCD$ 是梯形

故选: A.

练16

答案: D

解答:

$\because$ 点 C 在线段 AB 上, 且 $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{3}{5}\overrightarrow{CB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CA}$, 化为 $\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

故选: D.

练17

答案: B

解答:

由题意得, 向量的减法有: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}$,

$$\therefore (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) + (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}) = -m\overrightarrow{PA};$$

$$\therefore (m-2)\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0,$$

$$\therefore m-2=1,$$

$$\therefore m=3.$$

故选: B.

练18

答案: C

解答:

(1) 两个具有公共终点的向量, 不一定是共线向量, 不正确

(2) 两个向量不能比较大小, 但它们的模能比较大小, 正确

(3) 若 $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$ (λ 为实数), 则 $\lambda = 0$ 或 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, 不正确

(4) 若 λ, μ 都为 0, $\lambda \mathbf{a} = \mu \mathbf{b}$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不一定共线, 不正确

综上可知: 只有 (2) 正确

故选: C.

练19

答案: A

解答:

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\text{故有 } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{c}$$

故选: A.

练20

答案: A

解答:

$$\because D \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 所在平面内一点, } \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

故选: A.

练21

答案: D

解答:

$$\begin{aligned} \text{A. } \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BQ}) &= \overrightarrow{PA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}) \\ &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} \\ &= \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B. } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PC}) + (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{QC}) &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{QC}) \\ &= \mathbf{0} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} \\ &= \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

$$\text{C. } \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{PQ}$$

$$\text{D. } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{BQ}, \text{ 显然得不到 } \overrightarrow{PQ}$$

故选: D.

练22

答案: A

解答:

$$\because \text{向量 } m\mathbf{a} - 3\mathbf{b} \text{ 与 } \mathbf{a} + (2-m)\mathbf{b} \text{ 共线}$$

$$\therefore \text{存在实数 } k \text{ 使得: } m\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = k[\mathbf{a} + (2-m)\mathbf{b}]$$

$$\text{化为: } (m-k)\mathbf{a} + [-3-k(2-m)]\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$$\because \text{向量 } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ 是两个不共线的向量}$$

$$\therefore \begin{cases} m-k=0 \\ -3-k(2-m)=0 \end{cases}, \text{ 解得 } m=3 \text{ 或 } -1$$

故选: A.

练23

答案: D

解答:

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\because \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

$$\text{即 } \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

$$\text{故 } \frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{DC}|} = \frac{2}{1}$$

故选: D.

练24

答案: B

解答:

$$\text{由图可知, } \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$$

因为 E 为线段 AD 的中点

$$\text{所以 } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{因为 } 2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) - \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB}$$

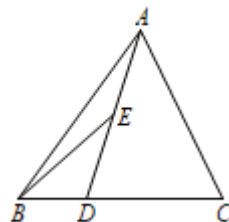
$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{BE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

$$\text{所以 } x = -\frac{2}{3}, y = \frac{1}{6}$$

$$\text{所以 } x + y = -\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$$

故选: B.



练25

答案: D

解答:

$$\because \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$$

$$\text{即 } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$$

$$2\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{CP}$$

$\therefore$ 点 P 在线段 AC 上

$$\text{且 } |AC| = 3|PA|$$

那么 $\triangle PAB$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积之比是 $\frac{1}{3}$

故选: D.

练26

答案: C

解答:

方法1:

$$\because \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = -2(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$$

如图, 作平行四边形 $PBEC$, 连接 PE 与 BC 交于点 G , 作平行四边形 $PCDA$, 连接 PD 与 AC 交于点 F

$$\because \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PF}, \quad \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PE} = 2\overrightarrow{PG}$$

$$\therefore \overrightarrow{PF} = -2\overrightarrow{PG}$$

$\therefore F, P, G$ 三点共线, 且 $PF = 2PG$, GF 为三角形 ABC 的中位线

$$\therefore \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle BPC}} = \frac{PF}{PG} = 2$$

$$\text{而 } S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$$

$\therefore \triangle APB, \triangle APC, \triangle BPC$ 的面积之比等于 $3:2:1$

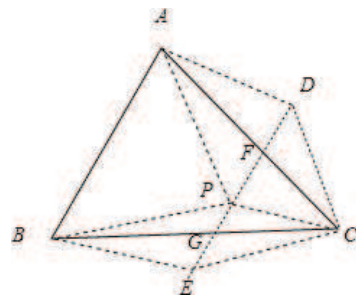
故选: C.

方法2: 奔驰定理根据奔驰定理: $S_{\triangle PBC} \cdot \overrightarrow{PA} + S_{\triangle PAC} \cdot \overrightarrow{PB} + S_{\triangle PAB} \cdot \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$ (P 在 $\triangle ABC$ 内部)

$$\because \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} : S_{\triangle PAC} : S_{\triangle PAB} = 1:2:3$$

故选: C.



第2讲 平面向量基本定理

练1

答案：B

解答：

平面中任意两个不共线的向量可以作为该平面所有向量的基底，故①错②对③对

故选：B.

练2

答案：C

解答：

只有两向量不共线才可作为基底

A. $e_1 = 0e_2$, $\therefore e_1, e_2$ 共线,

$\therefore$ 不可以作为基底;

B. $e_2 = -3e_1$, $\therefore e_1, e_2$ 共线,

$\therefore$ 不可以作为基底;

C. 不存在 λ 使 $e_1 = \lambda e_2$, $\therefore e_1, e_2$ 不共线,

$\therefore$ 可以作为基底;

D. $e_1 = -e_2$, $\therefore e_1, e_2$ 共线,

$\therefore$ 不可以作为基底;

故选：C.

练3

答案：B

解答：

在A中, $\therefore e_1, e_2$ 是两不共线的向量

$\therefore e_1 + e_2$ 与 $e_1 - e_2$ 不共线

$\therefore e_1 + e_2$ 与 $e_1 - e_2$ 能作为平面向量的一组基底

在B中, $\therefore e_1, e_2$ 是两不共线的向量

$$\therefore 2e_1 - 3e_2 = \frac{1}{2}(4e_1 - 6e_2)$$

$\therefore 2e_1 - 3e_2$ 与 $4e_1 - 6e_2$ 共线, 不能作为平面向量的一组基底

在C中, $\therefore e_1, e_2$ 是两不共线的向量

$\therefore e_1 + 2e_2$ 与 $2e_1 + e_2$ 不共线

$\therefore e_1 + 2e_2$ 与 $2e_1 + e_2$ 能作为平面向量的一组基底

在D中, $\because e_1, e_2$ 是两不共线的向量

$\therefore e_2$ 和 $e_1 + e_2$ 不共线

$\therefore e_2$ 和 $e_1 + e_2$ 能作为平面向量的一组基底

故选: B.

练4

答案: D

解答:

$\because e_1, e_2$ 是两个不共线的向量

若 $a = e_1 + \lambda e_2$ 与 $b = -\frac{1}{3}e_2 - e_1$ 共线

则存在实数 μ 使得 $a = \mu b$

即 $e_1 + \lambda e_2 = \mu \left(-\frac{1}{3}e_2 - e_1 \right)$

$$\text{即} \begin{cases} 1 = -\mu \\ \lambda = -\frac{1}{3}\mu \end{cases}$$

解得 $\lambda = \frac{1}{3}$

故选: D.

练5

答案: C

解答:

$\because$ 向量 $8a - kb$ 与 $-ka + b$ 共线

$\therefore$ 存在实数 λ , 使 $8a - kb = \lambda(-ka + b)$

$\because a, b$ 为非零不共线向量

$$\therefore \begin{cases} 8 = -\lambda k \\ -k = \lambda \end{cases}$$

解得, $k = \pm 2\sqrt{2}$

故选: C.

练6

答案: B

解答:

$$\because \lambda + \mu = 1$$

$$\therefore \lambda = 1 - \mu$$

$$\therefore c = (1 - \mu)a + \mu b$$

即 $\mathbf{c} - \mathbf{a} = \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a})$

$$\therefore \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \mu \overrightarrow{AB}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} // \overrightarrow{AB}$$

$\therefore A, B, C$ 共线

故选: B.

练7

答案: C

解答:

$\therefore$ 若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是共起点的向量, 且终点共线

$\therefore \mathbf{b} - \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ 是共线向量, 则 $\mathbf{c} - \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a})$

$$\therefore \mathbf{c} = (\lambda + 1)\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}$$

$\therefore$ 存在 $m, n \in \mathbf{R}$ 使 $\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ 成立

$$\therefore m = -\lambda, n = \lambda + 1$$

$$\text{则 } m + n = 1$$

故选: C.

练8

答案: D

解答:

$\therefore A, D, B$ 三点共线

$$\therefore \overrightarrow{CD} = m\overrightarrow{CA} + (1 - m)\overrightarrow{CB}$$

$$\therefore \begin{cases} -m = \frac{1}{3} \\ 1 - m = -\lambda \end{cases}, \text{ 解得 } \lambda = -\frac{4}{3}$$

故选: D.

练9

答案: C

解答:

$$\text{由题意可得 } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$$

故选: C.

练10

答案: D

解答:

因为点 E 是 CD 的中点

$$\text{所以 } \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

点 F 是 BC 的中点

$$\text{所以 } \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$$

故选: D.

练11

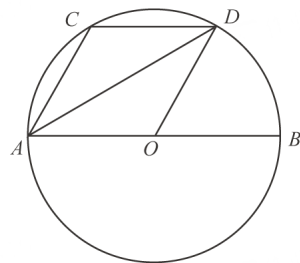
答案: D

解答:

如图, 连接 CD , OD $\because AB$ 是圆 O 的直径, 点 C , D 是半圆弧的两个三等分点 $\therefore$ 四边形 $AODC$ 是平行四边形

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

故选: D.

**练12**

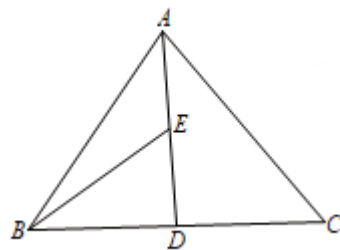
答案: B

解答:

$$\text{由题意可知 } \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \mathbf{a} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \mathbf{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right)$$

$$= \mathbf{a} - \frac{1}{4} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{3}{4} \mathbf{a} - \frac{1}{4} \mathbf{b}$$

故选: B.

**练13**

答案: A

解答:

在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 为 CD 的中点, 点 F 满足 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FD}$

$$\text{则 } \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{6} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$$

由于 $\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AB}$

$$\text{则 } x + y = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$$

故选: A.

练14

答案: A

解答:

因为 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 两边同时除以5, 得 $\frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$

可令 $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OC}$, 即 $\frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = \mathbf{0}$

所以 B, C, M 共线, A, O, M 共线

故 D, M 重合

$$\text{所以 } \overrightarrow{OA} = -5\overrightarrow{OM} = -5\overrightarrow{OD}$$

$$\text{故 } -5\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$$

$$\text{则 } 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \mathbf{0}$$

故选: A.

练15

答案: C

解答:

$\because 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \mathbf{0}$, $\therefore$ 点 A, B, C 共线, 且 A 为 BC 中点, 则点 O 的位置有5种情况, 如图

$$(1) \because 2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}, \therefore \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

$$(2) \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

$$(3) \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

$$(4) \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

$$(5) \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

故选: C.

练16

答案: C

解答:

$$\text{在 } \triangle AOB \text{ 中, } \overrightarrow{OG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}$$

$$\text{由平面向量的基本定理得, } \frac{2}{5} + m = 1$$

解得 $m = \frac{3}{5}$

又 OG 是 $\angle AOB$ 的平分线

$$\therefore \frac{2}{5} |\overrightarrow{OA}| = \frac{3}{5} |\overrightarrow{OB}|$$

$$\therefore \frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OB}|} = \frac{3}{2}$$

故选: C.

练17

答案: A

解答:

由题意, 在正方形 $ABCD$ 中, E 为 DC 的中点, 可知

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

则 $\lambda + \mu$ 的值为 $\frac{1}{2}$

故选: A.

练18

答案: A

解答:

如图, 在 $\triangle ABC$ 中

$\because$ 点 D 在线段 BC 上, $BD = 3DC$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BC}$$

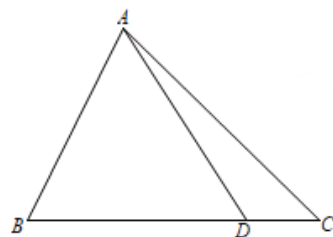
$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{4}, \mu = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \lambda + \mu = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

故选: A.



练19

答案: C

解答:

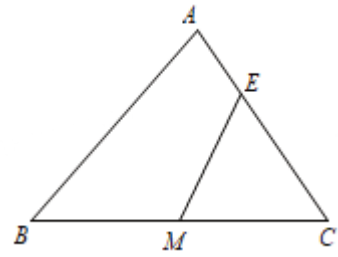
如图：点 M 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点，点 E 在边 AC 上

且 $\overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{AE}$

则向量

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EM} &= \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CM} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

故选：C



练20

答案：C

解答：

如图所示

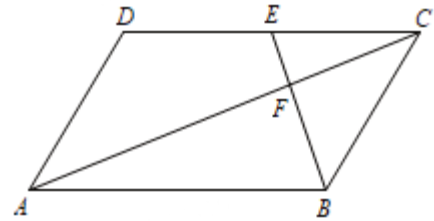
$\because$ 点 E 为 CD 的中点， $CD \parallel AB$

$$\therefore \frac{BF}{EF} = \frac{AB}{EC} = 2$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}, \quad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\left(\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) = -\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$$

故选：C



练21

答案：B

解答：

$$\therefore \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

又因为 C, P, D 三点共线

$$\text{则 } m + \frac{3}{4} = 1$$

$$\text{即 } m = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP}^2 = \frac{1}{16}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \geq 2 \times \frac{1}{8}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}| + \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{8}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|$$

当且仅当 $|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AB}|$ 时可取等

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AC}| |\vec{AB}| \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore |\vec{AC}| |\vec{AB}| = 8$$

$$\therefore \vec{AP}^2 \geq \frac{3}{8} \times 8 = 3$$

$$\therefore |\vec{AP}| \geq \sqrt{3}$$

则 $|\vec{AP}|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$

故选: B.

练22

答案: A

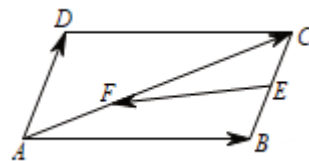
解答:

如图

$$\text{由 } \vec{AB} = \mathbf{a}, \vec{AD} = \mathbf{b}, \vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{BC}, \vec{AF} = \frac{1}{3}\vec{AC}$$

$$\text{得 } \vec{EF} = \vec{EC} + \vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{BC} - \frac{2}{3}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AD} - \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AD}) = -\frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{6}\vec{AD} = -\frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{6}\mathbf{b}$$

故选: A.



练23

答案: C

解答:

$$\text{由题意可得 } \vec{DF} = \vec{DA} + \vec{AF} = -\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AE} = -\vec{AD} + \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{BE}) = -\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{5}{6}\vec{AD}$$

故选: C.

练24

答案: A

解答:

如图所示: $\triangle ABC$ 中, AM 是 $\triangle ABC$ 的中线

$$\therefore \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$$

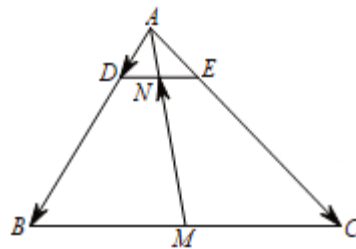
$$\text{又 } \because \vec{AD} = \frac{1}{4}\vec{AB}, DE \parallel BC$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC, \frac{AN}{AM} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \vec{NM} = \frac{3}{4}\vec{AM}$$

$$\text{即 } \vec{MN} = -\frac{3}{4}\vec{AM} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = -\frac{3}{8}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

故选: A.



练25

答案: C

解答:

设 $\triangle ABC$ 的边长为 2, 不妨以线段 BC 的中点 O 为坐标原点, 建立如图所示的平面直角坐标系 xOy

则点 $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$

以线段 BC 为直径的圆的方程为 $x^2 + y^2 = 1$

设点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$

则 $\overrightarrow{AB} = (-1, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AC} = (1, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AP} = (\cos \theta, \sin \theta - \sqrt{3})$

由于 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$

$$\begin{cases} -\lambda + \mu = \cos \theta \\ -\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}\mu = \sin \theta - \sqrt{3} \end{cases}$$

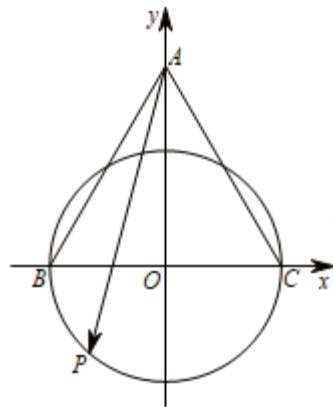
$$\text{解得} \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin \theta - \frac{1}{2}\cos \theta \\ \mu = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin \theta + \frac{1}{2}\cos \theta \end{cases}$$

所以 $\lambda + 2\mu = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \theta + \frac{1}{2}\cos \theta = \frac{3}{2} - \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

当 $\theta = \frac{5\pi}{3}$ 时取到等号

因此, $\lambda + 2\mu$ 的最大值为 $\frac{5}{2}$

故选: C.



练26

答案: D

解答:

由题意, 向量 $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{GD}$, D 为 BC 中点, 且 $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EC}$

可得 $\overrightarrow{AG} = \frac{x}{1+x} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{x}{2(1+x)} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{x}{2(1+x)} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{x}{2(1+x)} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3x}{4(1+x)} \cdot \overrightarrow{AE}$

因为 B, G, E 三点共线

所以 $\frac{x}{2(1+x)} + \frac{3x}{4(1+x)} = 1$, 解得 $x = 4$

又由 $\overrightarrow{BG} = y\overrightarrow{GE}$, D 为 BC 中点, 且 $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EC}$

可得 $\overrightarrow{BG} = \frac{y}{1+y} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{y}{1+y} \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{y}{1+y} \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BD}\right) = \frac{y}{3(1+y)} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{4y}{3(1+y)} \cdot \overrightarrow{BD}$

因为 A, G, D 三点共线

所以 $\frac{y}{3(1+y)} + \frac{4y}{3(1+y)} = 1$, 解得 $y = \frac{3}{2}$

所以 $x + y = \frac{11}{2}$

故选: D.

第 3 讲 平面向量的数量积

练 1

答案: D

解答:

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{BC}| \times |\overrightarrow{CA}| \times \cos \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA} \rangle = 5 \times 8 \times \cos 120^\circ = -20$$

故选: D.

练 2

答案: C

解答:

向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 的夹角为 60°

且 $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$

$$\text{则 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2 \times 1 \times \frac{1}{2}$$

故选: C.

练 3

答案: B

解答:

$$\text{由向量的数量积公式得 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos 120^\circ = 1 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

故选: B.

练 4

答案: C

解答:

$$\because |\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = 1, \text{ 且 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1$$

$$\therefore \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ 的夹角为 } \frac{\pi}{3}$$

故选: C.

练5

答案: B

解答:

$$\because |a| = 5, |b| = 4 \text{ 且 } a \cdot b = 10$$

$$\therefore a, b \text{ 的夹角 } \theta \text{ 满足: } \cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{1}{2}$$

$$\because 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

故选: B.

练6

答案: B

解答:

$$\because (a - b) \perp b$$

$$\therefore (a - b) \cdot b = a \cdot b - b^2 = |a| |b| \cos \langle a, b \rangle - b^2 = 0$$

$$\therefore \cos \langle a, b \rangle = \frac{|b|^2}{|a| |b|} = \frac{|b|^2}{2|b|^2} = \frac{1}{2}$$

$$\because \langle a, b \rangle \in [0, \pi]$$

$$\therefore \langle a, b \rangle = \frac{\pi}{3}$$

故选: B.

练7

答案: B

解答:

由题意得, 两个单位向量 e_1, e_2

$$\text{因为 } (e_1 - 2e_2) \perp e_1$$

$$\text{所以 } (e_1 - 2e_2) \cdot e_1 = 0$$

$$\text{所以 } e_1^2 = 2e_1 \cdot e_2 = 1$$

$$\text{所以 } \cos \langle e_1, e_2 \rangle = \frac{e_1 \cdot e_2}{|e_1| |e_2|} = \frac{1}{2}$$

又因为向量 e_1, e_2 的夹角取值范围为 $[0, \pi]$

$$\text{所以 } e_1, e_2 \text{ 的夹角为 } \frac{\pi}{3}$$

故选: B.

练8

答案: A

解答:

向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 方向上的投影为 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{-12}{3} = -4$

故选: A.

练9

答案: C

解答:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos 60^\circ$$

$$\because |\mathbf{a}| = \sqrt{2}$$

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} |\mathbf{b}|$$

$$\therefore \mathbf{a} \text{ 在 } \mathbf{b} \text{ 方向上的投影为 } \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

故选: C.

练10

答案: D

解答:

$$\because \mathbf{a} = (2, 2\sqrt{3}), \text{ 且 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\frac{16}{3}$$

$$\therefore |\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$\text{则 } \mathbf{b} \text{ 在 } \mathbf{a} \text{ 上的投影是 } \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{-\frac{16}{3}}{4} = -\frac{4}{3}$$

故选: D.

练11

答案: A

解答:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形

$$\therefore AD = AB = 1$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ + \frac{1}{2} \times 1 = 1$$

故选: A.

练12

答案: A

解答:

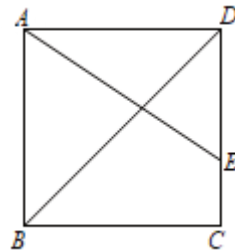
如图

因为正方形 $ABCD$ 的边长为 3, $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{EC}$

则

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2 = 3^2 - \frac{2}{3} \times 3^2 = 3$$

故选: A.



练13

答案: B

解答:

向量 a, b 满足 $|a| = 1, a \cdot b = -1$

则 $a \cdot (2a - b) = 2a^2 - a \cdot b = 2 + 1 = 3$

故选: B.

练14

答案: A

解答:

$$\begin{aligned} & (e_1 + te_2) \cdot (te_1 + e_2) \\ &= t|e_1|^2 + (t^2 + 1)e_1 \cdot e_2 + t|e_2|^2 \\ &= t|e_1|^2 + (t^2 + 1)|e_1| \cdot |e_2| \cdot \cos\langle e_1, e_2 \rangle + t|e_2|^2 \\ &= t \cdot 1^2 + (t^2 + 1) \times \cos \frac{\pi}{3} + t \cdot 1^2 \\ &= \frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(t+2)^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

所以当 $t = -2$ 时, $(e_1 + te_2) \cdot (te_1 + e_2)$ 取到最小值 $-\frac{3}{2}$

故选: A.

练15

答案: B

解答:

$$|a| = 1, |b| = 2, |2a + b| = \sqrt{3}|2a - b|$$

$$\therefore (2a + b) \cdot (2a + b) = 3(2a - b) \cdot (2a - b)$$

$$\therefore 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 12\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 12\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 3\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$$

$$\therefore 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 8\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 0, \text{ 即 } 4 - 8\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 4 = 0$$

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1$$

$$\therefore \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{1}{2}, \text{ 且 } 0^\circ \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq 180^\circ$$

$$\therefore \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 60^\circ$$

故选: B.

练16

答案: B

解答:

因为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为单位向量

所以 $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 1$

设 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)

$$\because |2\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{3}$$

$$\therefore (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 4|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta$$

$$= 5 - 4 \cos \theta = 3$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2}, \text{ 则 } \theta = \frac{\pi}{3}$$

故选: B.

练17

答案: C

解答:

$$\because \text{向量 } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ 满足 } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 5, |\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = 1$$

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 5$$

$$\therefore 4 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 5, \text{ 即 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1$$

$$\text{设向量 } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ 的夹角为 } \theta, \text{ 则 } \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{-1}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\because \theta \in [0, \pi]$$

$$\therefore \text{向量 } \mathbf{a} \text{ 与 } \mathbf{b} \text{ 的夹角为 } \frac{2\pi}{3}$$

故选: C.

练18

答案: D

解答:

依题意, 由 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{b}|$, 可得 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{b}|^2$

$$\text{即 } (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{b}|^2$$

$$\text{即 } |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \text{ 又 } |\mathbf{a}| = 2$$

$$\text{所以 } 4 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \text{ 解得 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2$$

$$\therefore \mathbf{b} \text{ 在 } \mathbf{a} \text{ 方向上的投影为 } \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{-2}{2} = -1$$

故选: D.

练19

答案: A

解答:

$$\therefore \mathbf{a} \text{ 在 } \mathbf{b} \text{ 上的投影为: } |\mathbf{a}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2 \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1$$

$$\therefore \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\text{又 } 0 \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq \pi$$

$$\therefore \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$$

故选: A.

练20

答案: B

解答:

$$\therefore |2\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 2$$

$$\therefore 4\mathbf{a}^2 + 4\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = 4$$

$$\therefore |\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2$$

$$\therefore \mathbf{a}\mathbf{b} = -1$$

$$\therefore \text{向量 } \mathbf{b} \text{ 在向量 } \mathbf{a} \text{ 方向上的投影是 } \frac{-1}{|\mathbf{a}|} = -1$$

故选: B.

练21

答案: D

解答:

$$\therefore \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$$

$\therefore$ 点 O 为 $\triangle ABC$ 的重心

$$\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9 \times \frac{1}{3} \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}^2 + 3\overrightarrow{AC}^2$$

$$\therefore 2\overrightarrow{AB}^2 = 3\overrightarrow{AC}^2, \text{ 即 } |\overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{6}}{2}|\overrightarrow{AC}|$$

$$\therefore \lambda = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

故选: D.

练22

答案: B

解答:

$$\text{由题意, } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE})$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CE} = y\overrightarrow{CA}$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}) = (\overrightarrow{CB} + x\overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{CA}) = -1 + \frac{x+y+xy}{2}$$

$$\because x > 0, y > 0, \text{ 且 } x + y = 1$$

$$\therefore xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore -1 + \frac{x+y+xy}{2} = -1 + \frac{1+xy}{2} \leq -\frac{3}{8}$$

当且仅当 $x = y = \frac{1}{2}$ 时, 取等号

$$\therefore \text{当 } x = y = \frac{1}{2} \text{ 时, } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE} \text{ 的最大值为 } -\frac{3}{8}$$

故选: B.

练23

答案: D

解答:

由三角形垂心性质可得, $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}$, 不妨设 $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA} = x$

$$\therefore 3\overrightarrow{HA} + 4\overrightarrow{HB} + 5\overrightarrow{HC} = \mathbf{0}$$

$$\therefore 3\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} + 4\overrightarrow{HB}^2 + 5\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$$

$$\therefore |\overrightarrow{HB}| = \sqrt{-2x}, \text{ 同理可求得 } |\overrightarrow{HC}| = \sqrt{-\frac{7x}{5}}$$

$$\therefore \cos \angle BHC = \frac{\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}}{|\overrightarrow{HB}| |\overrightarrow{HC}|} = -\frac{\sqrt{70}}{14}$$

故选: D.

练24

答案: D

解答:

$\because e_1, e_2$ 是单位向量, 设 e_1, e_2 的夹角为 θ

对 $\left|e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2\right| \leq |e_1 + \lambda e_2|$ 两边平方得

$$1 + \frac{3}{4} + \sqrt{3}\cos\theta \leq 1 + \lambda^2 + 2\lambda\cos\theta$$

整理得, $\lambda^2 + 2\cos\theta \cdot \lambda - \sqrt{3}\cos\theta - \frac{3}{4} \geq 0$, 该不等式对任意实数 λ 恒成立

$$\therefore \Delta = 4\cos^2\theta + 4\sqrt{3}\cos\theta + 3 = (2\cos\theta + \sqrt{3})^2 \leq 0$$

$$\therefore 2\cos\theta + \sqrt{3} = 0$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{又 } 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\therefore \theta = \frac{5\pi}{6}$$

故选: D.

练25

答案: C

解答:

$$\because |a - 2b| \leq 4$$

$$\therefore |a|^2 - 4a \cdot b + 4|b|^2 \leq 16$$

$$\therefore 9 - 4a \cdot b + 16 \leq 16$$

$$\therefore a \cdot b \geq \frac{9}{4}$$

设 b, a 的夹角为 θ

$$\text{则 } \cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} \geq \frac{3}{8}$$

$$\text{又 } \because -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

$$\therefore \frac{3}{8} \leq \cos\theta \leq 1$$

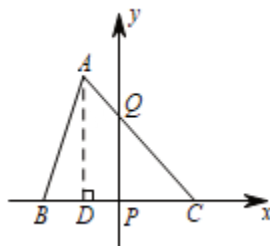
$$\therefore \frac{3}{4} \leq |b|\cos\theta \leq 2$$

故选: C.

练 26

答案: C

解答:

当 A 在 BC 上方时, 建立如图所示的平面直角坐标系则 $B\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $P(0, 0)$ 由 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ 可知, A, B, C 三点在一个定圆上, 且弦 BC 所对的圆周角为 $\frac{\pi}{3}$, 圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 所以圆心在 BC 的中垂线即 y 轴上, 且圆心到直线 BC 的距离为 $\frac{\frac{1}{2}BC}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 即圆心为 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, 半径为

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以点 A 的轨迹方程为 $x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{1}{3}$, 则 $x^2 \leq \frac{1}{3}$, 且 $x \neq \pm \frac{1}{2}$, 且 $y \geq 0$, 即 $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 且 $y > 0$ 由 $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上投影的几何意义可得 $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上投影的绝对值为 $|DP| = |x|$ 则 $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上投影的最大值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 同理, 当 A 在 BC 下方时, 可得 $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上投影的最大值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

故选: C.

第4讲 平面向量的坐标运算

练1

答案: C

解答:

$\therefore \overrightarrow{AB}$ 的坐标等于 B 的坐标减去 A 的坐标

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (-1, 3) - (2, -1) = (-3, 4)$$

故选: C.

练2

答案: B

解答:

$$\therefore A(-1, 2), B(2, 3)$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (2 + 1, 3 - 2) = (3, 1)$$

故选: B.

练3

答案: D

解答:

$$\text{由题意知 } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = (-2, 2)$$

故选: D.

练4

答案: A

解答:

$$\text{向量 } \mathbf{a} = (1, 2), \mathbf{b} = (3, 1), \text{ 则 } \mathbf{b} - \mathbf{a} = (3, 1) - (1, 2) = (2, -1)$$

故选: A.

练5

答案: A

解答:

$$\text{因为 } \mathbf{b} = (-1, 1)$$

$$\text{所以 } 2\mathbf{b} = (-2, 2)$$

所以 $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (4, -3)$

故选: A.

练6

答案: B

解答:

向量 $\mathbf{a} = (m, 4)$, $\mathbf{b} = (3, -2)$, 且 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$

$$\therefore -2m - 4 \times 3 = 0$$

解得 $m = -6$

故选: B.

练7

答案: D

解答:

因为 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$, 则 $x = -2 \times 2$, 即 $x = -4$

故选: D.

练8

答案: D

解答:

向量 $\mathbf{a} = (1, 3)$, $\mathbf{b} = (3, -2)$

则向量 $2\mathbf{a} = (2, 6)$

所以 $2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \times 3 + 6 \times (-2) = -6$

故选: D.

练9

答案: C

解答:

根据向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 的坐标求出 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 的坐标, 然后求模

$$\therefore \mathbf{a} - \mathbf{b} = (3, -4)$$

$$\therefore |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 5$$

故选: C.

练10

答案: B

解答:

根据题意, 向量 $\mathbf{a} = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{b} = (-2, m)$

若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线, 则有 $m = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-2) = 1$, 则 $\mathbf{b} = (-2, 1)$

则 $|\mathbf{b}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

故选: B.

练11

答案: B

解答:

$\therefore \mathbf{a} = (3, 4)$, $\mathbf{b} = (-1, 5)$

$\therefore 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = 3(3, 4) - 2(-1, 5) = (11, 2)$

故选: B.

练12

答案: C

解答:

$\therefore \mathbf{a} = (-1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -4)$

$\therefore \mathbf{b} = -2\mathbf{a}$

$\therefore \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 反向

$\frac{1}{5}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

$\therefore \left|\frac{1}{5}(\mathbf{a} + \mathbf{b})\right| \neq 1$, 即 $\frac{1}{5}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ 不是单位向量

故选: C.

练13

答案: D

解答:

由平行四边形的性质可得 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (1, 3) - (2, 4) = (-1, -1)$

故选: D.

练14

答案: A

解答:

根据题意, $\overrightarrow{AB} = (2, 8)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 4)$, 则 $\overrightarrow{BC} = (-5, -4)$ 若 $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$, 则 $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \left(-\frac{5}{2}, -2\right)$ 则 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \left(-\frac{1}{2}, 6\right)$

故选: A.

练15

答案: B

解答:

$$2\mathbf{m} + \mathbf{n} = (\sqrt{3}, -3) = -\sqrt{3}(-1, \sqrt{3})$$

 $\therefore 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ 与 $(-1, \sqrt{3})$ 共线

故选: B.

练16

答案: C

解答:

$$\because \mathbf{a} = (-4, 5), \mathbf{b} = (\lambda, 1)$$

$$\therefore \mathbf{a} - \mathbf{b} = (-4 - \lambda, 4)$$

$$\because (\mathbf{a} - \mathbf{b}) // \mathbf{b}$$

$$\therefore (-4 - \lambda) \cdot 1 - 4\lambda = 0$$

$$\text{解得 } \lambda = -\frac{4}{5}$$

故选: C.

练17

答案: B

解答:

$$\because \mathbf{a} // \mathbf{m}, \mathbf{m} = (4, 6)$$

$$\therefore \text{可设 } \mathbf{a} = (4k, 6k) \quad (k \in \mathbf{R})$$

$$\text{又 } \because \mathbf{b} = (-5, 1)$$

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -20k + 6k = -14k = 14$$

$$\text{解得 } k = -1$$

$$\therefore \mathbf{a} = (-4, -6)$$

故选: B.

练18

答案: A

解答:

$$\therefore \text{向量 } \mathbf{a} = (-\sqrt{2}, 1), \mathbf{b} = (m, 3)$$

$$\text{由 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{\sqrt{3}}{|\mathbf{a}|}, \text{ 得 } -\sqrt{2}m + 3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2+1}}$$

$$\text{所以 } -\sqrt{2}m = -2, \text{ 则 } m = \sqrt{2}$$

故选: A.

练19

答案: C

解答:

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 15, \mathbf{b} = (3, 4)$$

$$\text{设 } \mathbf{a} \text{ 与 } \mathbf{b} \text{ 的夹角为 } \theta, \mathbf{a} \text{ 在 } \mathbf{b} \text{ 方向上的投影为: } |\mathbf{a}| \cdot \cos \theta = |\mathbf{a}| \cdot \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{15}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

故选: C.

练20

答案: A

解答:

$$\overrightarrow{AB} = (2, 1), \overrightarrow{CD} = (5, 5), \text{ 向量 } \overrightarrow{AB} \text{ 在 } \overrightarrow{CD} \text{ 方向上的投影为 } \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = \frac{2 \times 5 + 1 \times 5}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

故选: A.

练21

答案: C

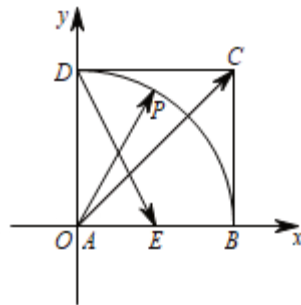
解答:

以A为原点, AB、AD所在直线分别为x轴、y轴, 建立如图所示平面直角坐标系

设正方形ABCD的边长为1, 则 $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$, $A(0, 0)$, $B(1, 0)$

设 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = (1, 1)$$



再由向量 $\overrightarrow{AC} = \lambda \left(\frac{1}{2}, -1 \right) + \mu (\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \cos \theta, -\lambda + \mu \sin \theta \right) = (1, 1)$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\lambda}{2} + \mu \cos \theta = 1 \\ -\lambda + \mu \sin \theta = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda = \frac{2 \sin \theta - 2 \cos \theta}{2 \cos \theta + \sin \theta} \\ \mu = \frac{3}{2 \cos \theta + \sin \theta} \end{cases}$$

$$\therefore \lambda + \mu = \frac{3 + 2 \sin \theta - 2 \cos \theta}{2 \cos \theta + \sin \theta} = \frac{(-2 \cos \theta - \sin \theta) + 3 \sin \theta + 3}{2 \cos \theta + \sin \theta} = -1 + \frac{3 \sin \theta + 3}{2 \cos \theta + \sin \theta}$$

$$\text{又 } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 0 \leq \cos \theta \leq 1, \quad 0 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$\text{设 } y = -1 + \frac{3 \sin \theta + 3}{2 \cos \theta + \sin \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{求得 } y' = \frac{3 \cos \theta (2 \cos \theta + \sin \theta) - (3 \sin \theta + 3)(-2 \sin \theta + \cos \theta)}{(2 \cos \theta + \sin \theta)^2} = \frac{6 + 6 \sin \theta - 3 \cos \theta}{(2 \cos \theta + \sin \theta)^2} > 0$$

故 $y = -1 + \frac{3 \sin \theta + 3}{2 \cos \theta + \sin \theta}$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数

$$\text{故当 } \theta = 0 \text{ 时, } \lambda + \mu \text{ 取得最小值 } \frac{3 + 0 - 2}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

$$\text{当 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \lambda + \mu \text{ 取得最大值 } \frac{3 + 2}{1} = 5$$

故 $\lambda + \mu$ 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$

故选: C.

练22

答案: C

解答:

如图所示, 以 A 为原点, 以 AB , AD 为 x 轴, y 轴, 建立平面直角坐标系

则 $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$, $D(0, 2)$, 直线 BD : $y = -2x + 2$

$\overrightarrow{BA} = (-1, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 2)$, 则 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BA} + \mu \overrightarrow{BC} = \lambda(-1, 0) + \mu(0, 2) = (-\lambda, 2\mu)$

设圆 C 的方程为 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$ ($r > 0$)

由于圆 C 与直线 BD 相切, 则半径 $r = \frac{2}{\sqrt{5}}$

设点 P 的坐标为 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta + 1, \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta + 2\right)$, 则 $\overrightarrow{BP} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta, \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta + 2\right)$

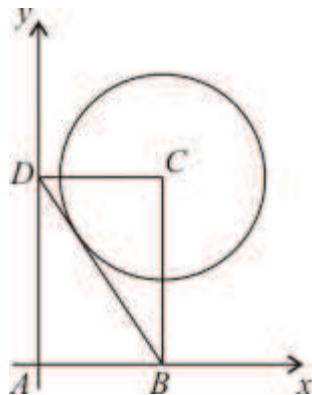
所以 $\lambda = -\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta$, $\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta + 1$

所以 $\lambda + 2\mu = -\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta + 2 = \frac{2\sqrt{10}}{5}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 2$

当 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ 时, 有最大值 $M = \frac{2\sqrt{10}}{5} + 2$

当 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ 时, 有最小值 $N = -\frac{2\sqrt{10}}{5} + 2$

所以 $M - N = \frac{4\sqrt{10}}{5}$



故选: C.

练23

答案: A

解答:

$$\because OA = BO = CO$$

$\therefore O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心

设线段 AB 的中点为 M

以线段 AB 的中点 M 为原点, 以 AB 所在的直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系, 如图所示

$$\text{则 } A(-1, 0), B(1, 0), C\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore AB \text{ 的中垂线方程为 } x = 0, AC \text{ 的中垂线方程为 } y - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x + \frac{5}{4}\right)$$

$$\text{由 } \begin{cases} x = 0 \\ y - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x + \frac{5}{4}\right) \end{cases}, \text{ 解得 } O\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = \left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \overrightarrow{AB} = (2, 0), \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

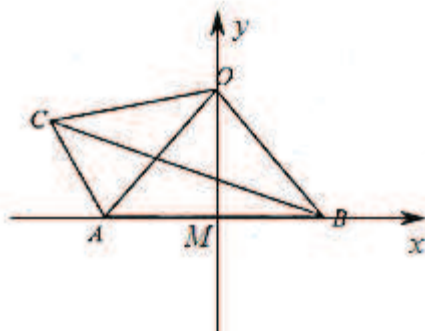
$$\therefore \overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \begin{cases} 2\lambda - \frac{1}{2}\mu = 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\mu = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{5}{6}, \mu = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \lambda + \mu = \frac{13}{6}$$

故选: A.



练24

答案: A

解答:

$$\text{平面向量 } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ 满足 } |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{c}) = 2$$

$$\text{由 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \times 2 \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2$$

$$\text{可得 } \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2}, \sin \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{设 } \overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = (2, 0), \mathbf{b} = (1, \sqrt{3}), \overrightarrow{OC} = \mathbf{c} = (x, y)$$

$$\text{可得 } (x, y) \cdot (4 - 2x, 2\sqrt{3} - 2y) = 2$$

$$\text{即为 } x(4 - 2x) + y(2\sqrt{3} - 2y) = 2$$

$$\text{化为 } x^2 + y^2 - 2x - \sqrt{3}y + 1 = 0$$

则 C 在以 $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 为圆心, 半径 $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的圆上运动

且 $|\mathbf{a} - \mathbf{c}|$ 表示点 A 与点 C 的距离

$$\text{显然最大值为 } |AP| + r = \sqrt{1 + \frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$$

$$\text{最小值为 } |AP| - r = \sqrt{1 + \frac{3}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$$

且 $|\mathbf{a} + \mathbf{c}|$ 表示点 $D(-2, 0)$ 与点 C 的距离

$$\text{显然最大值为 } |DP| + r = \sqrt{9 + \frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{39} + \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{最小值为 } |DP| - r = \frac{\sqrt{39} - \sqrt{3}}{2}$$

故选: A.

练25

答案: B

解答:

如图

$$\text{设 } \mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = (1, 0), \mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = (0, 1)$$

$$\therefore \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-1, 1), \mathbf{a} - \mathbf{b} = (1, -1)$$

$$\therefore t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mathbf{a} = t(-1, 1) + (1, 0) = (1 - t, t)$$

$$\frac{5}{12}\mathbf{b} + (1 - t)(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \frac{5}{12} \times (0, 1) + (1 - t) \times (1, -1)$$

$$= \left(0, \frac{5}{12}\right) + (1 - t, t - 1)$$

$$= \left(1 - t, t - \frac{7}{12}\right)$$

$$\therefore |t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mathbf{a}| + \left|\frac{5}{12}\mathbf{b} + (1 - t)(\mathbf{a} - \mathbf{b})\right|$$

$$= \sqrt{(1 - t)^2 + t^2} + \sqrt{(1 - t)^2 + \left(t - \frac{7}{12}\right)^2}$$

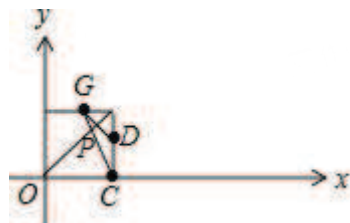
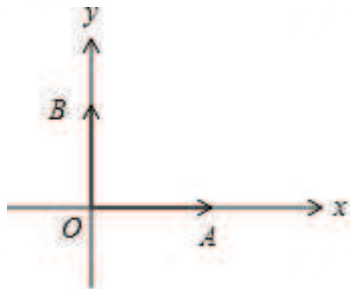
其几何意义为动点 $P(t, t)$ 到两定点 $C(1, 0)$ 与 $D\left(1, \frac{7}{12}\right)$ 距离的和

如图

点 D 关于直线 $y = x$ 的对称点为 $G\left(\frac{7}{12}, 1\right)$

$$\text{其最小值为 } |GC| = \sqrt{\left(\frac{7}{12} - 1\right)^2 + (1 - 0)^2} = \frac{13}{12}$$

故选: B.



练26

答案: D

解答:

因为 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 且 $|\vec{c} - \vec{a}| + |\vec{c} - 2\vec{b}| = \sqrt{5}$,

设单位向量 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$, $\vec{c} = (x, y)$,

则 $\vec{c} - \vec{a} = (x - 1, y)$, $\vec{c} - 2\vec{b} = (x, y - 2)$,

则 $\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{5}$,

即 (x, y) 到 $A(1, 0)$ 和 $B(0, 2)$ 的距离和为 $\sqrt{5}$, 即表示点 $(1, 0)$ 和 $(0, 2)$ 之间的线段,

$|\vec{c} + 2\vec{a}| = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$ 表示 $(-2, 0)$ 到线段 AB 上点的距离,

最小值是点 $(-2, 0)$ 到直线 $2x + y - 2 = 0$ 的距离

所以 $|\vec{c} + 2\vec{a}|_{\min} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$,

最大值为 $(-2, 0)$ 到 $(1, 0)$ 的距离是 3,

所以 $|\vec{c} + 2\vec{a}|$ 的取值范围是 $\left[\frac{6\sqrt{5}}{5}, 3\right]$;

故选: D.

第 5 讲 基础检测卷

1.

答案: D

解答:

- A. 向量 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$, 可能 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 此时不能得到 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的方向相同或相反, 故 A 选项错误
- B. 向量 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$, $\mathbf{b} // \mathbf{c}$, 可能 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 此时不能得到 $\mathbf{a} // \mathbf{c}$, 故 B 选项错误
- C. 两个单位向量相互平行, 可能方向相反, 此时不能得到两个向量相等, 故 C 选项错误
- D. 根据向量相等的知识可知 D 选项正确

故选: D.

2.

答案: D

解答:

 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是平面内一组不共线的向量, 作为基底的向量, 前提为不共线向量

- A. 若 $\mathbf{e}_1$ 与 $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ 共线, 设 $\mathbf{e}_1 = \lambda(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$, 即 $(\lambda - 1)\mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$

$$\text{所以 } \begin{cases} \lambda - 1 = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}, \text{ 无解}$$

所以 $\mathbf{e}_1$ 与 $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ 不共线

- B. 若 $\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ 与 $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ 共线, 设 $\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 = \mu(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$

$$\text{则 } \begin{cases} \mu = 1 \\ -2 = 2\mu \end{cases}, \text{ 无解}$$

所以 $\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ 与 $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ 不共线

- C. 若 $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ 与 $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ 共线, 设 $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = k(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$

$$\text{则 } \begin{cases} k = 1 \\ 1 = -k \end{cases}, \text{ 无解}$$

所以 $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ 与 $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ 不共线

- D. 因为 $-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 = -(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)$

所以 $\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ 与 $-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ 共线, 不能作为平面内所有向量的一组基底

故选: D.

3.

答案: A

解答:

$$\because D \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 所在平面内一点, } \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

故选：A.

4.

答案：A

解答：

由题意结合平面向量的运算法则可得

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$$

故选：A.

5.

答案：C

解答：

由题意可得： $2\mathbf{a} - \mathbf{b} = 2(2, 1) - (1, 3) = (3, -1)$

$$\text{则：} |2\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{且 } (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (3, -1) \cdot (2, 1) = 6 - 1 = 5$$

设所求向量的夹角为 θ

$$\text{由题意可得：} \cos \theta = \frac{(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}}{|2\mathbf{a} - \mathbf{b}| \times |\mathbf{a}|} = \frac{5}{\sqrt{10} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以向量 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 的夹角为 45°

故选：C.

6.

$$\text{答案：} -\frac{1}{2}$$

解答：

$\therefore$ 向量 $\mathbf{m} = (2k - 1, k)$ 与向量 $\mathbf{n} = (4, 1)$ 共线

$$\therefore 2k - 1 - 4k = 0$$

$$\text{解得 } k = -\frac{1}{2}$$

$$\text{故答案为：} -\frac{1}{2}.$$

7.

$$\text{答案：} 4\sqrt{5}$$

解答：

$$\text{在矩形 } ABCD \text{ 中, } \left| \overrightarrow{CA} \right| = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

$$\left| \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DC} \right| = \left| \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} \right| = 2 \left| \overrightarrow{CA} \right| = 4\sqrt{5}$$

故答案为: $4\sqrt{5}$.

8.

答案: $2\sqrt{10}$

解答:

$\because$ 向量 $\mathbf{a} = (4, m)$, $\mathbf{b} = (1, -2)$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4 - 2m = 0$$

$$\therefore m = 2$$

$$\therefore \mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (6, -2)$$

$$\therefore |\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$$

故答案为: $2\sqrt{10}$.

9.

解答:

(1) 设 $P(x, x^2 - 1)$

$$\because \left| \overrightarrow{OP} \right| = 1$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + (x^2 - 1)^2} = 1$$

$$\text{化为 } x^2(x^2 - 1) = 0$$

解得 $x = 0$ 或 $x = \pm 1$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = (0, -1) \text{ 或 } \overrightarrow{OP} = (1, 0) \text{ 或 } \overrightarrow{OP} = (-1, 0)$$

(2) 设 $P(a, a^2 - 1)$

$$\because \overrightarrow{OP} // \mathbf{a}$$

$$\therefore -2(a^2 - 1) + 3a = 0$$

$$\text{化为 } 2a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$\text{解得 } a = 2 \text{ 或 } -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = (2, 3) \text{ 或 } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

第6讲 中档检测卷

练1

答案: B

解答:

$$\text{因为 } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PB}$$

所以点 P 在线段 AB 上

故选: B.

练2

答案: B

解答:

$$\because \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

又因为 C, P, D 三点共线

$$\text{则 } m + \frac{3}{4} = 1$$

$$\text{即 } m = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP}^2 = \frac{1}{16}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \geq 2 \times \frac{1}{8}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}| + \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{8}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|$$

当且仅当 $|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AB}|$ 时可取等

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}| = 8$$

$$\therefore \overrightarrow{AP}^2 \geq \frac{3}{8} \times 8 = 3$$

$$\therefore |\overrightarrow{AP}| \geq \sqrt{3}$$

则 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$

故选: B.

练3

答案: C

解答:

如图, 设 BA 的中点为 D , 连接 OD 则 $OD \perp AB$

$$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO}) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{BA} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$$

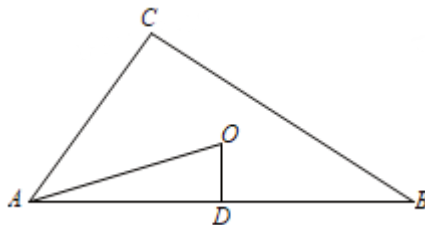
$$\because |\overrightarrow{AC}| = 2, |\overrightarrow{BC}| = 3$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times 3 \times \cos C = 3 \Rightarrow \cos C = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C = 7$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AO} = -\frac{7}{2}$$

故选: C.



练4

答案: C

解答:

由题知, 平面向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 1$, 且 $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{3}$

$$\text{则 } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$= |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| + |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

$$= 2 \times 2 + 2\sqrt{3} \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

$$= 4 + 2\sqrt{3} \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1$$

$$\text{解得 } \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{又 } \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in [0, \pi]$$

$$\text{则 } \sin \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

故选: C.

练5

答案: D

解答:

因为 $AB = 2$, $AC = 4$, $\angle BAC = 60^\circ$

$$\text{所以 } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{所以 } AB^2 + BC^2 = AC^2$$

所以 $\angle ABC = 90^\circ$

以 B 为坐标原点, BC 为 x 轴, BA 为 y 轴, 建立平面直角坐标系

则 $C(2\sqrt{3}, 0)$, $A(0, 2)$, 直线 AC : $\frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{y}{2} = 1$

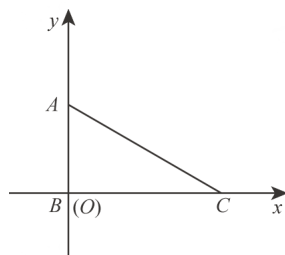
设 $P(x, y)$, $x \in [0, 2\sqrt{3}]$

$$\text{则 } y^2 = \frac{x^2}{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}x + 4$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = (-x, -y) \cdot (2\sqrt{3} - x, -y) = x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x$$

$$= \frac{4}{3}x^2 - \frac{10\sqrt{3}}{3}x + 4 \in \left[-\frac{9}{4}, 4\right]$$

故选: D.



练6

答案: $-\frac{1}{2}$

解答:

如图

$\because E$ 为 $\triangle ABC$ 的边 AC 的中点

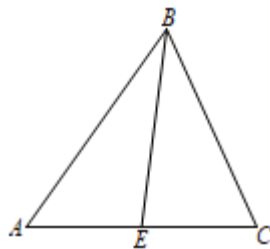
$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

又 $\overrightarrow{BE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, 且 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不共线

$$\therefore m = -1, n = \frac{1}{2}$$

$$\therefore m + n = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

故答案为: $-\frac{1}{2}$.



练7

答案: $\frac{3}{4}\pi$

解答:

常规方法:

$$|b - a| = \sqrt{2}, \text{ 则 } |b - a|^2 = b^2 + a^2 - 2b \cdot a = 1 + 5 - 2b \cdot a = 2, \text{ 故 } b \cdot a = 2$$

$$a \cdot (a - b) = a^2 - a \cdot b = 1 - 2 = -1$$

$$\text{故 } \cos \theta = \frac{a \cdot (a - b)}{|a| \cdot |a - b|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \theta \in [0, \pi], \text{ 故 } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

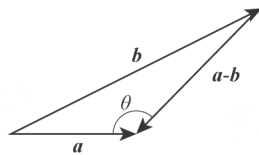
故答案为: $\frac{3}{4}\pi$.

大招解析:

由向量的减法法则可作出图形, 如图所示

由余弦定理可知

$$\cos \theta = \frac{1^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \times 1 \times \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \theta \in [0, \pi], \text{ 则 } \theta = \frac{3\pi}{4}$$



故答案为: $\frac{3\pi}{4}$.

练8

答案: 9

解答:

由题意, 将 $\mathbf{a} = (3, m)$, $\mathbf{b} = (1, -2)$ 代入 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 3b^2 = 0$

得 $3 - 2m + 3 \times (1 + 4) = 0$, 化简得 $2m = 18$

解得 $m = 9$

故答案为: 9.

练9

解答:

(1) $\because \triangle ABC$ 内接于圆 O , $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 且外接圆 O 的半径 $r = 1$

$$\therefore (3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB})^2 = (-5\overrightarrow{OC})^2 = 25$$

$$\therefore 9 + 16 + 24\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 25$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

同理可得, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{4}{5}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{3}{5}$

(2) $\because \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{4}{5}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{3}{5}$

$\triangle ABC$ 内接于以 O 为圆心, 1 为半径的圆

$$\therefore \cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = 0, \cos \angle AOC = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}|} = -\frac{3}{5}, \cos \angle BOC = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OC}|} = -\frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin \angle AOB = 1, \sin \angle AOC = \frac{4}{5}, \sin \angle BOC = \frac{3}{5}$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \angle AOB = \frac{1}{2}, S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \angle AOC = \frac{2}{5},$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \angle BOC = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积 } S = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = \frac{6}{5}$$