

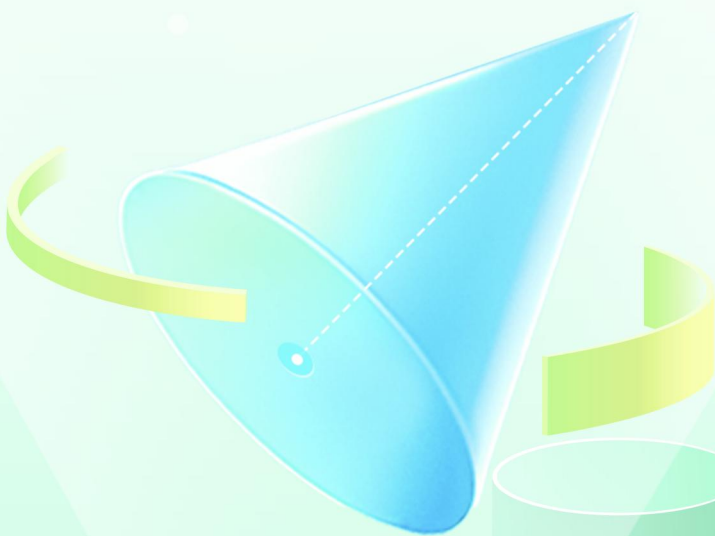
高三 数学

一轮闯关训练-三角

Math

产品亮点

- ▶ 分层合理效率高
- ▶ 精选分类覆盖广
- ▶ 题目典型收获多



目录



第 1 讲

三角函数的定义	1
---------	---

第 2 讲

三角恒等变换	7
--------	---

第 3 讲

三角函数的图象性质	12
-----------	----

第 4 讲

三角函数性质综合	18
----------	----

第 5 讲

正弦定理余弦定理	24
----------	----

第 6 讲

解三角形综合	30
--------	----

第 7 讲

基础检测卷	36
-------	----

第 8 讲

中档检测卷	38
-------	----

参考答案与解析	41
---------	----

第 1 讲

三角函数的定义



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础

本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

任意角

练1 (★☆☆☆☆)

时针走过2时40分，则分针转过的角度是（ ）

- A. 80° B. -80° C. 960° D. -960°

练2 (★★☆☆☆)

已知 α 是第二象限角，那么 $\frac{\alpha}{2}$ 是（ ）

- A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第二或第四象限角 D. 第一或第三象限角

弧度制

练3 (★☆☆☆☆)

若扇形的面积为 $\frac{3\pi}{8}$ ，半径为1，则扇形的圆心角为（ ）

- A. $\frac{3\pi}{2}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{3\pi}{8}$ D. $\frac{3\pi}{16}$

三角函数的定义

练4 (★☆☆☆☆)

若角 β 的终边经过点 $P(1, -2)$, 则 $\sin \beta$ 的值是 ()

- A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

练5 (★☆☆☆☆)

已知 $\sin \theta < 0$, $\tan \theta > 0$, 则 θ 在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

同角三角函数关系

练6 (★☆☆☆☆)

α 是第四象限角, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, 则 $\sin \alpha =$ ()

- A. $\frac{5}{13}$ B. $-\frac{5}{13}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $-\frac{5}{12}$

练7 (★☆☆☆☆)

已知 $\tan \theta = 3$, 则 $\frac{\sin \theta + 2 \cos \theta}{3 \sin \theta - 4 \cos \theta}$ 的值是 ()

- A. -1 B. 1 C. $-\frac{7}{9}$ D. $\frac{7}{9}$

练8 (★★☆☆☆)

已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$, 则 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ 的值为 ()

- A. $\frac{12}{25}$ B. $-\frac{12}{25}$ C. $-\frac{7}{5}$ D. $\frac{7}{5}$

诱导公式

练9 (★☆☆☆☆)

 $\tan 690^\circ$ 的值为 ()

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $-\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}$

练10 (★☆☆☆☆)

已知 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos(\pi + \alpha)$ 的值为 ()

A. $\frac{4}{5}$

B. $-\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $-\frac{3}{5}$

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分)。

三角函数的定义

练11 (★★☆☆☆)

已知角 θ 的终边过点 $P(-4k, 3k)$ ($k < 0$), 则 $2\sin\theta + \cos\theta$ 的值是 ()

A. $\frac{2}{5}$

B. $-\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{2}{5}$

D. 随着 k 的取值不同, 其值不同

练12 (★★☆☆☆)

已知 $\sin\theta \cdot \tan\theta < 0$, 那么角 θ 是 ()

A. 第一或第二象限角

B. 第二或第三象限角

C. 第三或第四象限角

D. 第一或第四象限角

练13 (★★☆☆☆)

 $\sin\frac{4}{3}\pi \cdot \cos\frac{25}{6}\pi \cdot \tan\frac{5}{4}\pi$ 的值是 ()

A. $-\frac{3}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

同角三角函数关系

练14 (★★☆☆☆)

若 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 且 $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

练15 (★★☆☆☆)

已知 $\tan x = 3$, 则 $\frac{2 \sin x \cos x - \cos^2 x}{\sin x \cos x + \sin^2 x}$ 等于 ()

A. $\frac{5}{12}$

B. $\frac{5}{13}$

C. $\frac{5}{14}$

D. $\frac{1}{3}$

练16 (★★☆☆☆)

已知 $\tan \theta = 2$, 则 $\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta =$ ()

A.

$-\frac{4}{3}$

B.

$\frac{5}{4}$

C.

$-\frac{3}{4}$

D.

$\frac{4}{5}$

练17 (★★★★☆☆)

若 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 为方程 $25x^2 - 5(2t+1)x + t^2 + t = 0$ 的两根, α 为锐角, 则 t 的值为 ()

A. 3

B. 4

C. 3或-4

D. -4

诱导公式

练18 (★★★★☆☆)

已知 $f(\alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha) \cos(2\pi - \alpha)}{\cos(-\pi - \alpha) \tan \alpha}$, 则 $f\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$ 的值为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

练19 (★★☆☆☆)

已知 $\sin(3\pi - \alpha) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, 则 $\sin \alpha \cos \alpha =$ ()

A. $-\frac{2}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{2}{5}$

D. $-\frac{1}{5}$

练20 (★★☆☆☆)

已知 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) =$ ()

A. $\frac{1}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $-\frac{1}{3}$

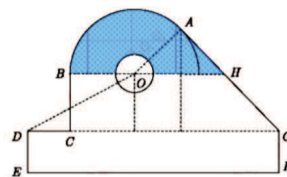
提能力

本模块适合90-120分水平学生(满分150分)。

弧度制

练21 (★★★★☆)

某中学开展劳动实习, 学生加工制作零件, 零件的截面如图所示, O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心, A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点, B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点, 四边形 $DEFG$ 为矩形, $BC \perp DG$, 垂足为 C , $\tan \angle ODC = \frac{3}{5}$, $BH \parallel DG$, $EF = 12$ cm, $DE = 2$ cm, A 到直线 DE 和 EF 的距离均为 7 cm, 圆孔半径为 1, 则图中阴影部分的面积为 _____ cm^2 .



三角函数的定义

练22 (★★★★☆)

设点 $P\left(\frac{t}{2} + \frac{2}{t}, 1\right)$ ($t < 0$) 是角 α 终边上一点, 则当 $|\overrightarrow{OP}|$ 最小时, $\cos \alpha$ 的值是 ()

A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

练23 (★★★☆☆)

函数 $y = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\cos x} + \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin x}$ 的值域是 ()

A. $\{0, 2\}$

B. $\{-2, 2\}$

C. $\{0, -2\}$

D. $\{-2, 0, 2\}$

同角三角函数关系

练24 (★★★☆☆)

化简式子 $\sqrt{2 + 2 \cos 1 - \sin^2 1} + \sqrt{2 - 2 \sin 1 - \cos^2 1} + \sqrt{1 - 2 \sin 1 \cos 1}$ 的结果为 ()

A. $2(1 + \cos 1 - \sin 1)$

B. $2(1 + \sin 1 - \cos 1)$

C. 2

D. $2(\sin 1 + \cos 1 - 1)$

练25 (★★★☆☆)

已知 $3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha = 5$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

诱导公式

练26 (★★★☆☆)

若 A, B 是锐角 $\triangle ABC$ 的两个内角, 则点 $P(\cos B - \sin A, \sin B - \cos A)$ 在 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

第 2 讲

三角恒等变换



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

和差角公式

练1 (★☆☆☆☆)

$\cos 105^\circ \cos 15^\circ + \sin 105^\circ \sin 15^\circ$ 的值为 ()

A. 0

B. -1

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

练2 (★★☆☆☆)

$\sin 7^\circ \cos 37^\circ - \sin 83^\circ \cos 53^\circ$ 的值为 ()

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

练3 (★★☆☆☆)

若 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, α 是第三象限的角, 则 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

A. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

B. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

练4 (★☆☆☆☆)

已知 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, $\tan \beta = 1$, 则 $\tan(\alpha + \beta) =$ ()

A. $\frac{5}{7}$

B. 1

C. $-\frac{1}{2}$

D. 2

练5 (★★☆☆☆)

若 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{6}$, 则 $\tan \alpha =$ ()

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{3}{5}$

C. 1

D. $\frac{7}{5}$

辅助角公式

练6 (★☆☆☆☆)

$\frac{1}{2} \cos 15^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 15^\circ$ 的值是 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

练7 (★★☆☆☆)

$\sin \frac{\pi}{12} - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12}$ 的值是 ()

A. $\sqrt{2}$

B. $-\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

二倍角公式

练8 (★☆☆☆☆)

$2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ =$ ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

练9 (★☆☆☆☆)

若 $\tan \alpha = 2$, 则 $\tan 2\alpha =$ _____.

练10 (★★☆☆☆)

已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()

A. $-\frac{24}{25}$

B. $-\frac{7}{25}$

C. $\frac{7}{25}$

D. $\frac{24}{25}$

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分).

和差角公式

练11 (★★☆☆☆)

已知 $\sin \alpha + \cos \beta = 1$, $\cos \alpha + \sin \beta = 0$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____.

练12 (★★☆☆☆)

$$\frac{\sin 47^\circ - \sin 17^\circ \cos 30^\circ}{\cos 17^\circ} = ()$$

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

练13 (★★★★☆)

已知 $2 \tan \theta - \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 7$, 则 $\tan \theta =$ ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

练14 (★★☆☆☆)

若 α 为锐角, 且 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos \alpha =$ _____.

练15 (★★★★☆)

若 α, β 都是锐角, 且 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5}$, 则 $\sin \beta$ 的值是 ()

A. $\frac{56}{65}$

B. $\frac{16}{65}$

C. $\frac{33}{65}$

D. $\frac{63}{65}$

二倍角公式

练16 (★★★★☆☆)

$\frac{\sqrt{3} - \tan 20^\circ}{\sin 20^\circ}$ 的值为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

练17 (★★☆☆☆☆)

$\sqrt{1 - \sin 6}$ 等于 ()

A. $\sin 3 + \cos 3$

B. $-\sin 3 - \cos 3$

C. $\sin 3 - \cos 3$

D. $\cos 3 - \sin 3$

练18 (★★☆☆☆☆)

$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = ()$

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{16}$

D. $\frac{1}{32}$

练19 (★★★★☆☆)

已知 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $3 \cos 2\alpha - 8 \cos \alpha = 5$, 则 $\sin \alpha = ()$

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

练20 (★★★★☆☆)

已知 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = ()$

A. $-\frac{5}{18}$

B. $\frac{5}{18}$

C. $-\frac{7}{9}$

D. $\frac{7}{9}$

提能力

本模块适合90-120分水平学生(满分150分)。

练21 (★★★★☆☆)

计算 $\frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \cos(-100^\circ)}{\sqrt{1 - \sin 10^\circ}} = (\quad)$

A. $-\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. 1

D. $\sqrt{3}$

练22 (★★★★☆☆)

已知 $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{2}{3}$, 则 $\sin 2\alpha$ 的值是_____.

练23 (★★★★☆☆)

已知 $\alpha, \beta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$, $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, $\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{12}{13}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

练24 (★★★★☆☆)

若 $\cos\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 则 $\sqrt{3} \cos 2\alpha - \sin 2\alpha$ 的值为 ()

A. $-\frac{5}{9}$

B. $\frac{5}{9}$

C. $-\frac{10}{9}$

D. $\frac{10}{9}$

练25 (★★★★☆☆)

若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$, $\sin\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos(2\alpha + \beta) =$ _____.

练26 (★★★★☆☆)

已知 α, β 为锐角, 若 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos 2\beta$ 的值为 ()

A. $-\frac{117}{125}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $-\frac{117}{125}$ 或 $\frac{3}{5}$

D. $\frac{117}{125}$

第3讲

三角函数的图象性质



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

正弦与正弦型函数

练1 (★☆☆☆☆)

函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 ()

A. 4π

B. 2π

C. π

D. $\frac{\pi}{2}$

练2 (★☆☆☆☆)

在 $[0, 2\pi]$ 上，满足 $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的 x 的取值范围为 ()

A. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

B. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$

D. $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$

练3 (★★☆☆☆)

函数 $y = \sin^2 x - 4 \sin x + 5$ 的值域为_____.

练4 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$) 图象的一条对称轴方程是 ()

A. $x = 0$

B. $x = -\frac{\pi}{4}$

C. $x = \frac{\pi}{4}$

D. $x = \frac{\pi}{2}$

练5 (★☆☆☆☆)

函数 $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心是 ()

A. $(0, 0)$

B. $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$

D. $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$

余弦与余弦型函数

练6 (★☆☆☆☆)

函数 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象的对称轴方程可能是 ()

A. $x = -\frac{\pi}{6}$

B. $x = -\frac{\pi}{12}$

C. $x = \frac{\pi}{6}$

D. $x = \frac{\pi}{12}$

练7 (★☆☆☆☆)

函数 $y = \cos 2x$ 的图象的一个对称中心是 ()

A. $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

B. $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

C. $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

D. $(0, 0)$

正切函数

练8 (★☆☆☆☆)

函数 $f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是_____.

练9 (★☆☆☆☆)

函数 $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域为_____.

练10 (★★☆☆☆)

函数 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 图象的对称中心为_____.

刷中档 本模块适合60-90分水平学生 (满分150分) .

正弦与正弦型函数

练11 (★★☆☆☆)

函数 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$ 的单调递减区间是 ()

- A. $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$ B. $\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$
C. $\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$ D. $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$

练12 (★★☆☆☆)

函数 $y = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{3}\right) (0 \leq x \leq 9)$ 的最大值与最小值之和为 ()

- A. $2 - \sqrt{3}$ B. 0 C. -1 D. $-1 - \sqrt{3}$

练13 (★★☆☆☆)

函数 $y = \sin(2x + \varphi) (0 \leq \varphi \leq \pi)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 则 φ 的值是 ()

- A. 0 B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

余弦与余弦型函数

练14 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = 5 \cos\left(3x + \frac{4\pi}{5}\right)$ 的一个单调递减区间是 ()

- A. $\left[-\frac{4\pi}{15}, \frac{2\pi}{15}\right]$ B. $\left[-\frac{4\pi}{15}, \frac{\pi}{15}\right]$ C. $\left[-\frac{\pi}{15}, \frac{2\pi}{15}\right]$ D. $\left[-\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{15}\right]$

练15 (★★☆☆☆)

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 ()

- A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ D. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

三角函数图象变换

练16 (★★☆☆☆)

为了得到函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需把函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象 ()

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位 B. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位
C. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个长度单位 D. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个长度单位

练17 (★★★★☆☆)

为了得到函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 可以将函数 $y = \cos 2x$ 的图象 ()

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 D. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

练18 (★★★★☆☆)

已知曲线 $C_1: y = \cos x$, $C_2: y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, 则下面结论正确的是 ()

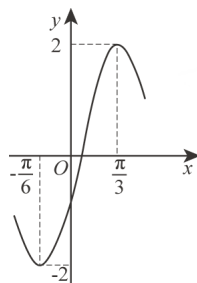
- A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2
B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2
C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2
D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

利用图象求解析式

练19 (★★☆☆☆)

函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 ()

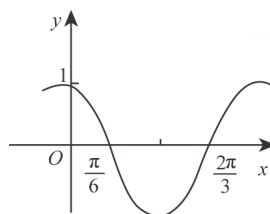
- A. $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
- B. $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
- C. $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
- D. $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$



练20 (★★★★☆☆) (多选)

如图是函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象, 则 $\sin(\omega x + \varphi) =$ ()

- A. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
- B. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$
- C. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$
- D. $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right)$



提能力 本模块适合90-120分水平学生 (满分150分)。

练21 (★★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. 给出下列结论:

- ① $f(x)$ 的最小正周期为 2π
- ② $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的最大值
- ③ 把函数 $y = \sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 可得到函数 $y = f(x)$ 的图象

其中所有正确结论的序号是 ()

- A. ①
- B. ①③
- C. ②③
- D. ①②③

练22 (★★★★☆☆)

将函数 $y = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后与原函数图象重合, 则 ω 的最小值为 ()

- A. 6 B. $\frac{\pi}{3}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$

练23 (★★★★☆☆)

函数 $y = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \omega x\right)$ ($\omega > 0$) 在区间 $[0, 1]$ 上至少出现 20 个最小值, 则 ω 的最小值是 ()

- A. 38π B. 38.5π C. 39.5π D. 40π

练24 (★★★★☆☆)

已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减, 则实数 ω 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]$ B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ D. $(0, 2]$

练25 (★★★★☆☆)

若函数 $f(x)$ 同时满足以下三个性质: ① $f(x)$ 的最小正周期为 π ; ② 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f(-x) = 0$; ③ $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数, 则 $f(x)$ 的解析式可能是 ()

- A. $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$ B. $f(x) = \sin 2x$ C. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$ D. $f(x) = \cos 2x$

练26 (★★★★☆☆)

函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi) + 1$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 满足 $f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 2 - f(x)$, 且对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 当 ω 取最小值时, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 ()

- A. $\left[\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$ B. $\left[\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$
C. $\left[-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$ D. $\left[-\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{\pi}{12} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$

第4讲

三角函数性质综合



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

三角函数的性质与辅助角公式综合

练1 (★☆☆☆☆)

函数 $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 的最小值为 ()

- A. -1 B. 2 C. $-\sqrt{3}$ D. -2

练2 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ 的最小正周期为 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

练3 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ 图象的一个对称中心是 ()

- A. $\left(\frac{7\pi}{12}, 0\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ C. $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ D. $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$

练4 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 的单调递增区间是_____.

练5 (★★☆☆☆)

函数 $y = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$ 的图像的一条对称轴方程为 ()

- A. $x = \frac{\pi}{12}$ B. $x = -\frac{\pi}{12}$ C. $x = \frac{\pi}{3}$ D. $x = -\frac{\pi}{6}$

三角函数的性质与二倍角公式综合

练6 (★☆☆☆☆)

函数 $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ 的最小值为_____.

练7 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. 2π C. π D. $\frac{\pi}{4}$

练8 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = 2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos 2x$ 的对称轴方程为 ()

- A. $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \ (k \in \mathbf{Z})$ B. $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \ (k \in \mathbf{Z})$
C. $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \ (k \in \mathbf{Z})$ D. $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \ (k \in \mathbf{Z})$

练9 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = \cos 2x + 2 \sin x$ 的最小值和最大值分别为 ()

- A. $-3, 1$ B. $-2, 2$ C. $-3, \frac{3}{2}$ D. $-2, \frac{3}{2}$

练10 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - \frac{1}{2} \ (x \in \mathbf{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 讨论 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的单调性.

刷中档 本模块适合60-90分水平学生（满分150分）.

三角函数的性质与辅助角公式综合

练11 (★★☆☆☆)

函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 ()

- A. 2π B. 4π C. π D. $\frac{\pi}{2}$

练12 (★★★★☆☆)

函数 $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + \sin 2x$ 的最小正周期是_____.

练13 (★★☆☆☆)

若 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ 的取值范围是 ()

- A. $[-2, 2]$ B. $[-2, \sqrt{3}]$ C. $[-\sqrt{3}, 2]$ D. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

练14 (★★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

- (1) 若 $f(\theta) + \sin \theta = \sqrt{3}$, 求 $\cos \theta$ 的值;
(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

练15 (★★★★☆☆)

设函数 $f(x) = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小值, 并求使 $f(x)$ 取得最小值的 x 的集合;
(2) 不画图, 说明函数 $y = f(x)$ 的图象可由 $y = \sin x$ 的图象经过怎样的变化得到.

三角函数的性质与二倍角公式综合

练16 (★★☆☆☆)

函数 $y = 1 - 2 \cos^2 2x$ 的最小正周期是_____.

练17 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = 2 \cos^2 x - \sin^2 x + 2$, 则 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π , 最大值为 3
 B. $f(x)$ 的最小正周期为 π , 最大值为 4
 C. $f(x)$ 的最小正周期为 2π , 最大值为 3
 D. $f(x)$ 的最小正周期为 2π , 最大值为 4

练18 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = 2 \cos 2x + \sin^2 x - 4 \cos x$.

(1) 求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

练19 (★★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \cos x (\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$.

(1) 若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 $f(\alpha)$ 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间.

练20 (★★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - 2 \sin^2 x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的零点的集合.

提能力

本模块适合90-120分水平学生(满分150分)。

三角函数的性质与三角恒等变换综合

练21 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x$ ($\omega > 0$), $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 2$ 的两个相邻交点的距离等于 π , 则 $f(x)$ 的单调递增区间是 ()

- A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$ B. $\left[k\pi + \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{11\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$
C. $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$ D. $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right], k \in \mathbf{Z}$

练22 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \cos x \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$), 给出下列四个命题:

- ①若 $f(x_1) = -f(x_2)$, 则 $x_1 = -x_2$
② $f(x)$ 的最小正周期是 2π
③ $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数;
④ $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{3\pi}{4}$ 对称;
⑤当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$.

其中正确的命题为 ()

- A. ①②④ B. ③④⑤ C. ②③ D. ③④

练23 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x$, $x \in \mathbf{R}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;
(2) 求方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, \pi]$ 内的所有解.

练24 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = 2 \sin \omega x \cos \omega x + \cos 2\omega x$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .

- (1) 求 ω 的值;
(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

练25 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x$, $x \in \mathbf{R}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;
 (2) 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有解, 求实数 a 的取值范围.

练26 (★★★☆☆)

已知向量 $\mathbf{a} = (1 + \cos \omega x, 1)$, $\mathbf{b} = (1, a + \sqrt{3} \sin \omega x)$ (ω 为常数且 $\omega > 0$), 函数 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最大值为 2.

- (1) 求实数 a 的值;
 (2) 把函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6\omega}$ 个单位, 可得函数 $y = g(x)$ 的图象, 若 $y = g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上为增函数, 求 ω 的最大值.

第5讲

正弦定理余弦定理



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

正弦定理及变形

练1 (★☆☆☆☆)

$\triangle ABC$ 中， $A = 45^\circ$ ， $B = 60^\circ$ ， $a = 10$ ，则 b 等于（ ）

- A. $5\sqrt{2}$ B. $10\sqrt{2}$ C. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ D. $5\sqrt{6}$

练2 (★☆☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a = 4$ ， $b = 6$ ， $B = 60^\circ$ ，则 $\sin A$ 的值为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

练3 (★☆☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A ， B ， C 所对的边为 a ， b ， c ，若 $A = 30^\circ$ ， $a = \sqrt{3}$ ，则 $\frac{c}{\sin C} =$ _____.

练4 (★★☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A ， B ， C 所对的边分别为 a ， b ， c ，且 $A : B : C = 1 : 2 : 3$ ，则 $a : b : c$ 等于_____.

练5 (★☆☆☆☆)

$\triangle ABC$ 中, 若 $a = 1$, $c = 2$, $B = 60^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{3}$

练6 (★☆☆☆☆)

已知 a , b , c 是 $\triangle ABC$ 的三边, S 是 $\triangle ABC$ 的面积, 若 $a = 4$, $b = 5$, $S = 5\sqrt{3}$, 则 $\sin C =$ _____。

余弦定理及变形

练7 (★☆☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中, a , b , c 分别是角 A , B , C 的对边, $a = 3$, $b = \sqrt{7}$, $c = 2$, 那么 B 等于 ()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°

练8 (★☆☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b = \sqrt{3}$, $A = 30^\circ$, $c = 2$, 则 $a =$ _____。

练9 (★☆☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB = \sqrt{13}$, $BC = 3$, $\angle C = 120^\circ$, 则 $AC =$ ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

练10 (★★☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$, 则 $A =$ ()

- A. 60° B. 90° C. 135° D. 150°

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分).

正弦定理及变形

练11 (★★☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A = 60^\circ$, $a = \sqrt{3}$, 则 $\frac{a-b-c}{\sin A - \sin B - \sin C} = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

练12 (★★☆☆☆)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $b = 2a \sin B$, 则角 A 等于()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$

练13 (★★★★☆)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $3b \cos A = c \cos A + a \cos C$, 则 $\tan A$ 的值是()

- A. $-2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $-\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

练14 (★★★★☆)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a^2 \cos A \sin B = b^2 \sin A \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为()

- A. 等腰直角三角形 B. 直角三角形
C. 等腰三角形或直角三角形 D. 等边三角形

练15 (★★★★☆)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a \cos B + b \cos A = c \sin C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为()

- A. 锐角三角形 B. 等腰三角形 C. 钝角三角形 D. 直角三角形

练16 (★★★★☆)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2a \sin B = \sqrt{3}b$.

- (1) 求角 A 的大小;
 (2) 若 $a = 6, b + c = 8$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

余弦定理及变形

练17 (★★☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 2, b + c = 7, \cos B = -\frac{1}{4}$, 则 $b =$ _____.

练18 (★★☆☆☆)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$, 则 $C =$ ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

练19 (★★★★☆)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $B = 150^\circ$.

- (1) 若 $a = \sqrt{3}c, b = 2\sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;
 (2) 若 $\sin A + \sqrt{3} \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 C .

练20 (★★★★☆)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $A = \frac{\pi}{4}, b^2 - a^2 = \frac{1}{2}c^2$.

- (1) 求 $\tan C$ 的值;
 (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为3, 求 b 的值.

提能力 本模块适合90-120分水平学生(满分150分).

正余弦定理综合

练21 (★★★☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $b^2 \sin^2 C + c^2 \sin^2 B = 2bc \cos B \cos C$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()

- A. 等边三角形 B. 等腰三角形 C. 直角三角形 D. 等腰直角三角形

练22 (★★★☆☆)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a \sin A + c \sin C - \sqrt{2}a \sin C = b \sin B$, 则 $B =$ ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

练23 (★★★☆☆)

$\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sqrt{3}b \sin A = a \cos B$, $b = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为_____.

练24 (★★★☆☆)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $b \sin B - c \sin C = a$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}$, 则 $B =$ _____.

练25 (★★★★☆)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $9a^2 + 9b^2 = 19c^2$, 则 $\frac{\tan A \tan B}{\tan C (\tan A + \tan B)} =$ ()

- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{5}{9}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{7}{9}$

练26 (★★★☆☆)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = 2$. 设 F 为线段 AC 上一点, $CF = \sqrt{2}BF$, 有下列条件:

(1) $c = 2$

(2) $b = 2\sqrt{3}$

(3) $a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab = c^2$.

请从以上三个条件中任选两个, 求 $\angle CBF$ 的大小和 $\triangle ABF$ 的面积.

第6讲

解三角形综合



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

解三角形

练1（★★☆☆☆）（2019·河北邢台市月考）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c ，若 $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$ ，则 $A =$ （ ）

- A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

练2（★★☆☆☆）（2019·山东莱芜市模拟）

在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边， $b = 2, c = \sqrt{7}, C = 60^\circ$ ，则 $\sin A$ 的值为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{7}}{7}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ C. $\frac{3\sqrt{7}}{14}$ D. $\frac{3\sqrt{21}}{14}$

练3（★★☆☆☆）（2019·江苏南京市月考）

在 $\triangle ABC$ 中，设 a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边，若 $a = 5, A = \frac{\pi}{4}, \cos B = \frac{3}{5}$ ，则边 $c =$ _____.

实际问题

练4 (★★☆☆☆) (2020·浙江杭州市模拟)

一艘船向正北航行,在某处看见正西方向有相距10海里的两个灯塔恰好与它在一条直线上,继续航行半小时后,看见一灯塔在船的南偏西 60° ,另一灯塔在船的南偏西 75° ,则这艘船的速度是_____海里/时.

练5 (★★☆☆☆) (2019·安徽期末)

某船从A处向北偏东 60° 方向航行 $2\sqrt{3}$ 千米后到达B处,然后朝南偏西 30° 的方向航行6千米到达C处,则A处与C处之间的距离为()

- A. $\sqrt{3}$ 千米 B. $2\sqrt{3}$ 千米 C. 3千米 D. 6千米

练6 (★★☆☆☆) (2018·甘肃临夏市月考)

为测量一座塔的高度,在一座与塔相距20米的楼的楼顶处测得塔顶的仰角为 30° ,测得塔基的俯角为 45° ,那么塔的高度是()米

- A. $20\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ B. $20\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ C. $20(1 + \sqrt{3})$ D. 30

多三角形问题

练7 (★★☆☆☆)

已知 $\triangle ABC$ 中, $c = 4$, $b = 7$, 边BC上的中线 $AD = \frac{7}{2}$, 求边长a.

练8 (★★☆☆☆) (2016·安徽安庆市三模【文】)

在 $\triangle ABC$ 中, 角A, B, C所对的边分别为a, b, c, 若 $c = 2b = 4$, $B = \frac{\pi}{6}$, 则角A的平分线AD的长等于()

- A. $\sqrt{5}$ B. 3 C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

练9 (★★☆☆☆) (2018·河北石家庄市月考)

在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 2$, $\angle B = 60^\circ$, $b = \sqrt{7}$, 则 BC 边上的高等于 ()

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 3 D. $\sqrt{5}$

练10 (★★☆☆☆) (2018·陕西西安市月考【理】)

在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AC 边上一点, 若 $BD = 3$, $CD = 4$, $AD = 5$, $AB = 7$, 则 $BC =$ _____.

刷中档 本模块适合60-90分水平学生 (满分150分) .

解三角形

练11 (★★☆☆☆) (2020·四川月考)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A , B , C 的对边分别是 a , b , c , 若 $a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc$, $\sin C = 2\sqrt{3}\sin B$, 则 $A =$ ()

- A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

练12 (★★★★☆)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}c = 2a\sin C$, $a = 2\sqrt{3}$, 则 $b + c =$ _____.

练13 (★★★★☆) (2018·福建龙岩市期中【理】)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 若 $(2a - c)\cos B = b\cos C$.

- (1) 求角 B ;
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, $a + c = 2\sqrt{6}$, 求 $\sin A \sin C$ 的值.

三角形中的范围问题

练14 (★★★★☆) (2018·黑龙江鹤岗市期中【文】)

在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b = \sqrt{3}$, $B = \frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 周长最大值为_____.

练15 (★★★☆☆) (2016·河北衡水市二模【理】)

在 $\triangle ABC$ 中, 已知 a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 且满足 $\frac{\cos A}{\cos C} = -\frac{a}{2b+c}$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $a=2$, 求 $b+c$ 的取值范围.

练16 (★★★☆☆) (2017·陕西西安市期末)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $C = \frac{\pi}{6}$, $a+b=12$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

练17 (★★★☆☆) (2018·江苏常州市期中)

在 $\triangle ABC$ 中, $B=2A$, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是_____.

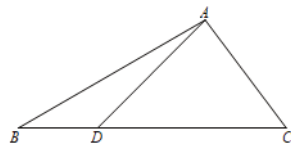
多三角形问题

练18 (★★☆☆☆) (2019·江苏淮安市期末)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 30^\circ$, D 是 BC 边上一点, $AD = 4\sqrt{2}$, $CD = 7$, $AC = 5$.

(1) 求 $\angle ADC$ 的大小;

(2) 求 AB 的长.



练19 (★★★☆☆) (2019·黑龙江哈尔滨市期中)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 45^\circ$, $AC = \sqrt{10}$, $\cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 BC 的长;

(2) 若点 D 是 AB 的中点, 求中线 CD 的长度.

练20 (★★★★☆) (2020·安徽六安市模拟【理】)

在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=2$, $AC=3$, $A = \frac{\pi}{3}$, 角 A 的平分线交 BC 边于点 D , 则 $AD =$ _____.

提能力

本模块适合90-120分水平学生(满分150分).

三角形中的范围问题

练21 (★★★☆☆)

若 $c = 2$, $C = \frac{\pi}{3}$, 且 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 则 $\triangle ABC$ 周长的取值范围_____.

练22 (★★★☆☆) (2017·江西宜春市模拟【理】)

锐角三角形 ABC 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $B = 2A$, 则 $\frac{\sqrt{2}b}{a}$ 的取值范围是 ()

- A. $(\sqrt{2}, 2)$ B. $(2, \sqrt{6})$ C. $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ D. $(\sqrt{6}, 4)$

练23 (★★★★☆)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a^2 + c^2 - b^2 = ac$, $b = \sqrt{3}$, 则 $2a + c$ 的取值范围是 ()

- A. $[2\sqrt{7}, +\infty)$ B. $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7}]$ C. $[\sqrt{3}, 2\sqrt{7}]$ D. $[1, \sqrt{3}]$

多三角形问题

练24 (★★★☆☆) (2019·广东深圳市模拟【理】)

在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $AB = 2$, $BD = 5$.

- (1) 求 $\cos \angle ADB$;
(2) 若 $DC = 2\sqrt{2}$, 求 BC .

练25 (★★★☆☆) (2019·浙江)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 3$, 点 D 在线段 AC 上. 若 $\angle BDC = 45^\circ$, 则 $BD =$ _____, $\cos \angle ABD =$ _____.

练26 (★★★★☆☆) (2019·山西晋中市期末)

在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$, 则 $\cos A$ 等于 ()

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

第7讲

基础检测卷

本试卷共9个题目，选择5个，填空3个，解答1个，均为基础水平题目。限时30分钟。得分在70分以上视为合格，可以去做【刷中档】模块题目，冲刺更高的水平。

一、单选题，共5题，每题10分.

练1 (★☆☆☆☆)

若 $\sin \alpha > 0$ ，且 $\cos \alpha < 0$ ，则角 α 是 ()

- A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角

练2 (★☆☆☆☆)

函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的最小正周期为 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 2π D. 4π

练3 (★☆☆☆☆)

已知 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$ ，则 $\cos(\pi + \alpha)$ 的值为 ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

练4 (★★☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中， $A = \frac{\pi}{4}$ ， $BC = \sqrt{6}$ ， $AC = \sqrt{3}$ ，则 $B =$ ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

练5 (★★☆☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $(\sqrt{3}b - c)\cos A = a\cos C$, 则 $\cos A =$ ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题, 共3题, 每题10分.

练6 (★☆☆☆☆)

若 $\sin x = -\frac{2}{3}$, 则 $\cos 2x =$ _____.

练7 (★★☆☆☆)

函数 $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right)$, $x \in [0, 2\pi]$ 的单调增区间是_____.

练8 (★★☆☆☆)

已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边, $a \tan B = 3b \sin A$, 则 $\cos B =$ _____.

三、解答题, 共1题, 每题20分.

练9 (★★☆☆☆)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x + 1$ ($x \in \mathbf{R}$).

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, 求 $f(x)$ 的值域.

第8讲

中档检测卷

本试卷共9个题目，选择5个，填空3个，解答1个，均为中档水平题目。限时30分钟。得分在70分以上视为合格，可以去做【提能力】模块题目，冲刺更高的水平。

一、单选题，共5题，每题10分.

练1 (★★★★☆)

已知 $\tan \alpha = 2$ ，则 $\frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = (\quad)$

- A. -5 B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{5}{3}$

练2 (★★★★☆)

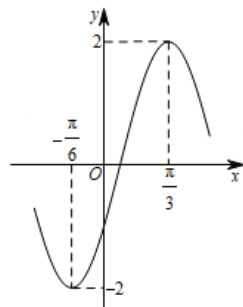
若 $\sin x = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ，则 $\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (\quad)$

- A. $\frac{3}{10}$ B. $-\frac{3}{10}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $-\frac{3}{4}$

练3 (★★★★☆)

函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $-\pi < \varphi < 0$) 的部分图象如图所示，为了得到 $g(x) = A \cos \omega x$ 的图象，只需将函数 $y = f(x)$ 的图象 ()

- A. 向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度
B. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
C. 向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度
D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度



练4 (★★★☆☆)

将函数 $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ 的图象向右平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位, 所得图象对应的函数恰为偶函数, 则 φ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{12}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

练5 (★★★☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状一定是 ()

- A. 正三角形 B. 直角三角形 C. 等腰三角形 D. 等腰直角三角形

二、填空题, 共3题, 每题10分.

练6 (★★★☆☆)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 若 $c^2 = (a-b)^2 + 6$, $C = \frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $3\sqrt{3}$

练7 (★★★☆☆)

已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$), 若当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值, 则 ω 的最小值为_____.

练8 (★★★☆☆)

$\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sqrt{3}b \sin A = a \cos B$, $b = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为_____.

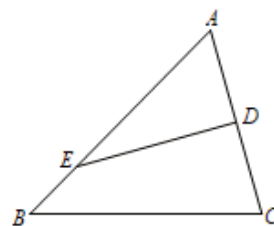
三、解答题，共1题，每题20分.

练9 (★★★★☆)

已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边，且 $b^2 + c^2 - a^2 = ac \cos C + c^2 \cos A$.

(1) 求 A ;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中， $BC = \sqrt{3}$ ， D 为边 AC 的中点， E 为 AB 边上一点，且 $DE \perp AC$ ， $DE = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.



参考答案与解析

第1讲 三角函数的定义

练1

答案: D

解答:

$$\because 40 \div 60 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore 360^\circ \times \frac{2}{3} = 240^\circ$$

由于时针都是顺时针旋转

$$\therefore \text{时针走过2小时40分, 分针转过的角的度数为 } -2 \times 360^\circ - 240^\circ = -960^\circ$$

故选: D.

练2

答案: D

解答:

$\because \alpha$ 是第二象限角

$$\therefore 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\therefore k\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

当 k 取偶数时, $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角, 当 k 取奇数时, $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角

故选: D.

练3

答案: B

解答:

设扇形的圆心角为 α

$\because$ 扇形的面积为 $\frac{3\pi}{8}$, 半径为 1

$$\therefore \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} \alpha \cdot 1^2$$

$$\therefore \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

故选: B.

练4

答案: A

解答:

$\therefore$ 角 β 的终边经过点 $P(1, -2)$

$\therefore x_P = 1, y_P = -2, |OP| = \sqrt{5}$ (其中 O 为坐标原点)

因此, $\sin \beta = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

故选: A.

练5

答案: C

解答:

$\therefore \sin \theta < 0$

$\therefore \theta$ 为第三、四象限角或在 y 轴的负半轴上

$\therefore \tan \theta > 0$

$\therefore \theta$ 为第一、三象限角

$\therefore \theta$ 为第三象限角

故选: C.

练6

答案: B

解答:

$\therefore \alpha$ 是第四象限角, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

$\therefore \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{5}{13}$

故选: B.

练7

答案: B

解答:

$\therefore \tan \theta = 3$

$\therefore \frac{\sin \theta + 2 \cos \theta}{3 \sin \theta - 4 \cos \theta} = \frac{\tan \theta + 2}{3 \tan \theta - 4} = \frac{3 + 2}{3 \times 3 - 4} = 1$

故选: B.

练8

答案: B

解答:

$$\text{由 } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\text{可得 } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{25}$$

$$\text{即 } 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{25}$$

$$\text{所以 } \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{12}{25}$$

故选: B.

练9

答案: A

解答:

$$\tan 690^\circ = \tan(720^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

故选: A.

练10

答案: D

解答:

$$\because \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

故选: D.

练11

答案: B

解答:

由题意, 角 θ 的终边在第四象限

$$\text{由 } P(-4k, 3k) \ (k < 0), \text{ 得 } \sin \theta = \frac{3k}{\sqrt{(-4k)^2 + (3k)^2}} = -\frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{-4k}{\sqrt{(-4k)^2 + (3k)^2}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{则 } 2 \sin \theta + \cos \theta = -\frac{2}{5}$$

故选: B.

练12

答案: B

解答:

$$\text{由 } \sin\theta \cdot \tan\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} < 0$$

知 $\sin\theta \neq 0$ 且 $\cos\theta < 0$

故 θ 为第二或第三象限角

故选: B.

练13

答案: A

解答:

$$\text{根据题意, } \sin \frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{25\pi}{6} = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{4} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\text{故 } \sin \frac{4\pi}{3} \cdot \cos \frac{25\pi}{6} \cdot \tan \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = -\frac{3}{4}$$

故选: A.

练14

$$\text{答案: } \frac{4}{3}$$

解答:

$$\text{因为 } \alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\text{所以 } \sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\text{所以 } \tan \alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{故答案为: } \frac{4}{3}.$$

练15

答案: A

解答:

因为 $\tan x = 3$

所以 $\cos x \neq 0$

$$\text{所以 } \frac{2 \sin x \cos x - \cos^2 x}{\sin x \cos x + \sin^2 x} = \frac{2 \tan x - 1}{\tan x + \tan^2 x} = \frac{2 \times 3 - 1}{3 + 3^2} = \frac{5}{12}$$

故选: A.

练16

答案: D

解答:

因为 $\tan \theta = 2$, 所以 $\cos \theta \neq 0$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta &= \frac{\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\tan^2 \theta + \tan \theta - 2}{\tan^2 \theta + 1} \\ &= \frac{4 + 2 - 2}{4 + 1} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

故选: D.

练17

答案: A

解答:

$\therefore \sin \alpha, \cos \alpha$ 为方程 $25x^2 - 5(2t+1)x + t^2 + t = 0$ 的两根

$$\therefore \begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2t+1}{5} \\ \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{t^2+t}{25} \end{cases}$$

$$\therefore (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\therefore \frac{(2t+1)^2}{25} = 1 + \frac{2t^2+t}{25}$$

$$\text{整理可得 } t^2 + t - 12 = 0$$

$$\text{解得 } t = -4 \text{ 或 } t = 3$$

$\therefore \alpha$ 为锐角

$$\therefore \sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$$

$$\text{故 } t = 3$$

故选: A.

练18

答案: A

解答:

$$\text{根据三角函数诱导公式, } f(\alpha) = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{-\cos \alpha \tan \alpha} = -\cos \alpha$$

$$\text{则 } f\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = -\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = -\cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

故选: A.

练19

答案: A

解答:

$$\because \sin(3\pi - \alpha) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right), \therefore \sin \alpha = -2\cos \alpha, \therefore \tan \alpha = -2,$$

$$\therefore \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{-2}{(-2)^2 + 1} = -\frac{2}{5}.$$

故选: A.

练20

答案: D

解答:

$$\because \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left[\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= -\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

故选: D.

练21

$$\text{答案: } \frac{5}{2}\pi + 4$$

解答:

由已知得 A 到 DG 的距离与 A 到 FG 的距离相等, 均为 5 cm

所以 $\angle AGD = \angle AHO = \angle AOH = 45^\circ$

由 $\tan \angle ODC = \frac{3}{5}$, 设 O 到 DG 的距离为 $3t$ (cm), 则 O 到 DE 的距离为 $5t$ (cm)

$$OA \cos 45^\circ + 5t = 7, \quad OA \sin 45^\circ + 3t = 5$$

可得 $t = 1$, $OA = 2\sqrt{2}$ cm, $OH = 4$ cm

$$\text{所以图中阴影部分的面积为 } \frac{1}{2}OA^2 \cdot \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \times 4 \times 2 - \frac{1}{2}\pi = \left(\frac{5}{2}\pi + 4\right) \text{ cm}^2$$

故答案为: $\frac{5}{2}\pi + 4$.

练22

答案: A

解答:

$$\text{由题可知 } |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\left(\frac{t}{2} + \frac{2}{t}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{-t}{2} + \frac{2}{-t}\right)^2 + 1} \geq \sqrt{\left(2\sqrt{\left(\frac{-t}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{-t}\right)}\right)^2 + 1} = \sqrt{5}$$

当且仅当 $t = -2$ 时取等号故 $|OP|$ 最小时, $t = -2$ $\therefore$ 点 $P\left(\frac{t}{2} + \frac{2}{t}, 1\right)$ ($t < 0$) 是角 α 终边上一点

$$\therefore \cos \alpha = \frac{\frac{t}{2} + \frac{2}{t}}{\sqrt{\left(\frac{t}{2} + \frac{2}{t}\right)^2 + 1}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

故选: A.

练23

答案: D

解答:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\cos x} + \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin x} \\ &= \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{|\sin x|}{\sin x} \end{aligned}$$

当 $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ 时, $y = 2$ 当 $\sin x < 0$, $\cos x < 0$ 时, $y = -2$ 当 $\sin x$, $\cos x$ 异号时, $y = 0$ 故函数的值域为 $\{-2, 0, 2\}$

故选: D

练24

答案: C

解答:

$$\begin{aligned} &\sqrt{2 + 2\cos 1 - \sin^2 1} + \sqrt{2 - 2\sin 1 - \cos^2 1} + \sqrt{1 - 2\sin 1 \cos 1} \\ &= \sqrt{1 + 2\cos 1 + \cos^2 1} + \sqrt{1 - 2\sin 1 + \sin^2 1} + \sqrt{(\sin 1 - \cos 1)^2} \\ &= |1 + \cos 1| + |1 - \sin 1| + |\sin 1 - \cos 1| \\ &= 1 + \cos 1 + 1 - \sin 1 + \sin 1 - \cos 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

故选: C.

练25

答案: $-\frac{3}{4}$

解答:

常规解析:

$\because 3\sin\alpha - 4\cos\alpha = 5$, 即 $\frac{3}{5}\sin\alpha - \frac{4}{5}\cos\alpha = 1$, 结合 $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\therefore \sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$\therefore \tan\alpha = -\frac{3}{4}$

故答案为: $-\frac{3}{4}$.

大招解析:

根据对偶法解三角方程

$\because 3\sin\alpha - 4\cos\alpha = 5$

令 $3\cos\alpha + 4\sin\alpha = t$

$\therefore (3\sin\alpha - 4\cos\alpha)^2 + (3\cos\alpha + 4\sin\alpha)^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 + t^2$

解得: $t = 0$

则 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$\therefore \tan\alpha = -\frac{3}{4}$

故答案为: $-\frac{3}{4}$.

练26

答案: B

解答:

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形

$\therefore A + B > \frac{\pi}{2}$

$\therefore A > \frac{\pi}{2} - B$, $B > \frac{\pi}{2} - A$

$\therefore \sin A > \cos B$, $\sin B > \cos A$

$\therefore \cos B - \sin A < 0$, $\sin B - \cos A > 0$

$\therefore P$ 在第二象限

故选: B.

第 2 讲 三角恒等变换

练 1

答案: A

解答:

$$\begin{aligned} & \cos 105^\circ \cos 15^\circ + \sin 105^\circ \sin 15^\circ \\ &= \cos(105^\circ - 15^\circ) \\ &= \cos 90^\circ \\ &= 0 \end{aligned}$$

故选: A.

练 2

答案: A

解答:

$$\begin{aligned} & \sin 7^\circ \cos 37^\circ - \sin 83^\circ \cos 53^\circ \\ &= \cos 83^\circ \cos 37^\circ - \sin 83^\circ \sin 37^\circ \\ &= \cos(83^\circ + 37^\circ) \\ &= \cos 120^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

故选: A.

练 3

答案: A

解答:

$\because \alpha$ 是第三象限的角

$$\therefore \sin \alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{所以 } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

故选: A.

练4

答案: D

解答:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{3} + 1}{1 - \frac{1}{3} \times 1} = 2$$

故选: D

练5

答案: D

解答:

$$\text{因为 } \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\text{所以 } \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1} = \frac{1}{6}$$

$$\text{解得 } \tan \alpha = \frac{7}{5}$$

故选: D.

练6

答案: A

解答:

$$\frac{1}{2} \cos 15^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 15^\circ$$

$$= \sin 30^\circ \cos 15^\circ + \cos 30^\circ \sin 15^\circ$$

$$= \sin(30^\circ + 15^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

故选: A.

练7

答案: B

解答:

$$\text{原式} = 2 \times \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\pi}{12} \right)$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= -2 \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= -\sqrt{2}$$

故选：B.

练8

答案：A

解答：

$$2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

故选：A.

练9

答案： $-\frac{4}{3}$

解答：

因为 $\tan \alpha = 2$

$$\text{所以 } \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}$$

故答案为： $-\frac{4}{3}$.

练10

答案：C

解答：

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

故选：C.

练11

答案： $-\frac{1}{2}$

解答：

$$\because \sin \alpha + \cos \beta = 1, \quad \cos \alpha + \sin \beta = 0$$

平方相加得

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = 1$$

$$\therefore 1 + 2(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) + 1 = 1$$

$$\therefore 2 \sin(\alpha + \beta) = -1$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$$

故答案为： $-\frac{1}{2}$.

练12

答案: C

解答:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin 47^\circ - \sin 17^\circ \cos 30^\circ}{\cos 17^\circ} \\ &= \frac{\sin(17^\circ + 30^\circ) - \sin 17^\circ \cos 30^\circ}{\cos 17^\circ} \\ &= \frac{\sin 17^\circ \cos 30^\circ + \cos 17^\circ \sin 30^\circ - \sin 17^\circ \cos 30^\circ}{\cos 17^\circ} \\ &= \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

故选: C.

练13

答案: D

解答:

$$2 \tan \theta - \tan \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \tan \theta - \frac{\tan \theta + 1}{1 - \tan \theta} = 7$$

整理得 $\tan^2 \theta - 4 \tan \theta + 4 = 0$ ($\tan \theta \neq 1$)

解得 $\tan \theta = 2$

故选: D.

练14

答案:

$$\frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$$

解答:

$$\because \alpha \text{ 为锐角, 且 } \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \alpha + \frac{\pi}{6} \text{ 为锐角, } \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{1 - \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{4}{5}$$

则

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \left[\left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\pi}{6} \right] \\ &= \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cos \frac{\pi}{6} + \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10} \end{aligned}$$

故答案为:

练15

答案: A

解答:

α, β 都是锐角, 则 $0 < \alpha + \beta < \pi$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{3}{5}$$

$$\text{又 } \sin \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\therefore \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \sin \beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha] = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} - \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{5}{13} = \frac{56}{65}$$

故选: A.

练16

答案: D

解答:

$$\frac{\sqrt{3} - \tan 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}}{\sin 20^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3} \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}}{\sin 20^\circ} = \frac{2 \sin(60^\circ - 20^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 40^\circ} = 4 \times \frac{\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} = 4$$

故选: D.

练17

答案: C

解答:

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \sin 6} \\ &= \sqrt{\sin^2 3 - 2 \sin 3 \cos 3 + \cos^2 3} \\ &= \sqrt{(\sin 3 - \cos 3)^2} \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \frac{\pi}{2} < 3 < \pi$$

$$\text{所以 } \sin 3 > 0, \cos 3 < 0$$

$$\text{所以 } \sin 3 - \cos 3 > 0$$

$$\text{所以 } \sqrt{1 - \sin 6} = \sin 3 - \cos 3$$

故选: C.

练18

答案: C

解答:

$$\therefore \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2 \sin 20^\circ}$$

$$= \frac{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2^2 \sin 20^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{2^3 \sin 20^\circ}$$

$$\therefore \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8} \times \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} \times \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}$$

$$\text{又} \because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \therefore \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

故选: C.

练19

答案: A

解答:

$$\because 3 \cos 2\alpha - 8 \cos \alpha = 5$$

$$\therefore 3(2\cos^2 \alpha - 1) - 8 \cos \alpha = 5$$

$$\text{即 } 2(3\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha - 4) = 0$$

$$\text{即 } 2(\cos \alpha - 2)(3\cos \alpha + 2) = 0$$

$$\therefore \cos \alpha = -\frac{2}{3} \text{ 或 } \cos \alpha = 2 \text{ (舍)}$$

$$\text{又 } \alpha \in (0, \pi)$$

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

故选: A.

练20

答案: D

解答:

$$\because \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} - \cos \alpha = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2 \times \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

故选: D.

练21

答案: B

解答:

$$\frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \cos(-100^\circ)}{\sqrt{1 - \sin 10^\circ}} = \frac{\cos 10^\circ + \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sqrt{1 - \sin 10^\circ}}$$

$$= \frac{2 \sin(10^\circ + 30^\circ)}{\sqrt{(\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2}} = \frac{2 \sin 40^\circ}{\cos 5^\circ - \sin 5^\circ}$$

$$= \frac{2 \sin 40^\circ}{\sqrt{2} \sin(45^\circ - 5^\circ)} = \sqrt{2}$$

故选: B.

练22

答案: $\frac{1}{3}$

解答:

$$\text{因为 } \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)\right] = \frac{1}{2}(1 + \sin 2\alpha) = \frac{2}{3}$$

$$\text{所以 } \sin 2\alpha = \frac{1}{3}$$

故答案为: $\frac{1}{3}$.

练23

答案: $-\frac{56}{65}$

解答:

$$\text{已知 } \alpha, \beta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right), \sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$$

$$\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{12}{13}, \alpha + \beta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \beta - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}, \cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{5}{13}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left[(\alpha + \beta) - \left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= \cos(\alpha + \beta)\cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) + \sin(\alpha + \beta)\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{13}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{12}{13} \\ &= -\frac{56}{65} \end{aligned}$$

故答案为: $-\frac{56}{65}$.

练24

答案: D

解答:

$$\begin{aligned} &\sqrt{3}\cos 2\alpha - \sin 2\alpha \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) \\ &= 2\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 4\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) - 2 \\ &\because \cos\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ &\therefore \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ &\therefore \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = 1 - \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{3} \cos 2\alpha - \sin 2\alpha = 4 \times \frac{7}{9} - 2 = \frac{10}{9}$$

故选: D.

练25

答案: $\frac{23}{27}$

解答:

$$\because \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{3}, \text{ 可得: } \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore \text{两边平方可得, } 1 - \sin 2\alpha = \frac{2}{9}, \text{ 解得: } \sin 2\alpha = \frac{7}{9}$$

$$\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ 可得: } \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{1 + \sin 2\alpha} = \frac{4}{3} \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore \text{由} \textcircled{1} \textcircled{2} \text{ 解得: } \cos 2\alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\text{又} \because \sin\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 可得: } \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{两边平方, 可得: } \sin \beta = -\frac{1}{3}, \text{ 又 } -\frac{\pi}{2} < \beta < 0$$

$$\therefore \cos \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \cos(2\alpha + \beta) = \cos 2\alpha \cos \beta - \sin 2\alpha \sin \beta = \frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{7}{9} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{23}{27}$$

故答案为: $\frac{23}{27}$.

练26

答案: A

解答:

$$\alpha, \beta \text{ 都是锐角, 且 } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{2} < \sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{1}{2}, \frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} < \alpha + \beta < \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}(\cos \beta - 2 \sin \beta) = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}(2 \cos \beta + \sin \beta) = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{25}$$

$$\therefore \cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = -\frac{117}{125}$$

故选: A.

第 3 讲 三角函数的图象性质

练 1

答案: C

解答:

函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为: $\frac{2\pi}{2} = \pi$

故选: C.

练 2

答案: B

解答:

因为 $x \in [0, 2\pi]$, $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

解得 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$

故选: B.

练 3

答案: $[2, 10]$

解答:

$$y = \sin^2 x - 4 \sin x + 5 = (\sin x - 2)^2 + 1$$

$$\because -1 \leq \sin x \leq 1$$

$\therefore$ 当 $\sin x = -1$ 时, y 取得最大值 10

当 $\sin x = 1$ 时, y 取得最小值 2

故答案为: $[2, 10]$

练 4

答案: B

解答:

由题意可知 $x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{R}$

得 $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$, $k \in \mathbf{R}$

所以当 $k = -1$ 时, $x = -\frac{\pi}{4}$ 为函数 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$) 图象的一条对称轴方程

故选: B.

练5

答案: B

解答:

对于函数 $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 令 $x + \frac{\pi}{3} = k\pi$, 求得 $x = k\pi - \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$

可得函数 $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心是 $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$

故选: B.

练6

答案: B

解答:

$\because y = \cos x$ 的对称轴方程为 $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

$\therefore$ 函数 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 中

令 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$, $k \in \mathbf{Z}$

上面四个选项中只有 $-\frac{\pi}{12}$ 符合

故选: B.

练7

答案: B

解答:

令 $2x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 可得对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, 0\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

令 $k = 0$, 得到一个对称中心的坐标 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

故选: B.

练8

答案: $\frac{\pi}{2}$

解答:

$\because f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ 其最小正周期 $T = \frac{\pi}{2}$

故答案为: $\frac{\pi}{2}$.

练9

答案: $\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

解答:

要使函数 $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 有意义

必须满足 $x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

解得 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

故答案为: $\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

练10

答案: $\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$

解答:

$\therefore$ 由 $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 得 $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} (k \in \mathbf{Z})$

$\therefore$ 函数 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$

故答案为: $\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$.

练11

答案: D

解答:

令 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

求得 $k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{6}$

故函数的减区间为 $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$

故选: D.

练12

答案: A

解答:

因为 $0 \leq x \leq 9$

所以 $\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$

所以, 当 $\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$, 即 $x = 0$ 时, $2\sin\left(\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$ 取得最小值 $-\sqrt{3}$

当 $\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = 5$ 时, $2\sin\left(\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$ 取得最大值 2

所以函数 $y = 2\sin\left(\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$ ($0 \leq x \leq 9$) 的最大值与最小值之和为 $2 - \sqrt{3}$

故选: A.

练13

答案: C

解答:

$\because y = \sin(2x + \varphi)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数

$\therefore$ 函数的图象关于直线 $x = 0$ 对称

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = \pm 1$

即 $\sin \varphi = \pm 1$

$\therefore \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)

$\because 0 \leq \varphi \leq \pi$

$\therefore \varphi = \frac{\pi}{2}$

故选: C.

练14

答案: B

解答:

$f(x) = 5\cos\left(3x + \frac{4\pi}{5}\right)$

由 $2k\pi \leq 3x + \frac{4\pi}{5} \leq \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

得 $\frac{2k\pi}{3} - \frac{4\pi}{15} \leq x \leq \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{15}$ ($k \in \mathbf{Z}$)

$\therefore \left[-\frac{4\pi}{15}, \frac{\pi}{15}\right]$ 是 $f(x)$ 的一个单调递减区间

故选: B.

练15

答案: C

解答:

$\because 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$

$\therefore -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3}$

$\therefore \frac{1}{2} \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$

即 $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$

故选: C.

练16

答案: B

解答:

$$y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

所以将 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位得到 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象

故选: B.

练17

答案: B

解答:

$$\begin{aligned} \because y &= \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

$\therefore$ 将函数 $y = \cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度即可得到函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象

故选: B.

练18

答案: D

解答:

曲线

$$C_1: y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

把曲线

$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变

得到

$$y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

再把得到的曲线

练19

答案: A

解答:

由图象可知 $A = 2$, $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore T = \pi$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$$

代入点 $\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

$$\text{得 } 2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$\therefore \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$\therefore$ 结合各选项可知函数解析式为 $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

故选: A.

练20

答案: BC

解答:

A. 设最小正周期为 T , 由图知 $\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, $T = \pi$, 排除A

B, C. 由于 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期为 $T = \pi$, 所以 $\omega = \pm \frac{2\pi}{T} = \pm 2$

当 $\omega = 2$ 时, $y = \sin(\omega x + \varphi) = \sin(2x + \varphi)$

由图知, 点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 在 $y = \sin(2x + \varphi)$ 上, 所以 $\sin\left(\frac{2\pi}{3} \times 2 + \varphi\right) = 0$

结合图象可得 $2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi = 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$, 当 $k = 1$ 时, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$

即 $y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 故B, C正确

D. 将 $x = 0$ 代入 $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right)$, 可得 $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right) = \cos \frac{5\pi}{6} < 0$, 排除D

故选: BC.

练21

答案: B

解答:

$$\therefore f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore f(x) \text{ 的最小正周期为 } \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$\therefore$ ①正确

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{而 } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不是 $f(x)$ 的最大值

$\therefore$ ②不正确

把 $y = \sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 可得到 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 即 $f(x)$ 的图象

∴③正确

故选: B.

练22

答案: A

解答:

∵函数 $y = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后与原图象重合

$$\therefore \frac{\pi}{3} = k \cdot \frac{2\pi}{\omega}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\therefore \omega = 6k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\therefore \omega > 0$$

∴可得 $\omega = 6$ 最小

故选: A.

练23

答案: C

解答:

$$\therefore \text{函数 } y = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \omega x\right) \quad (\omega > 0)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega x\right)$$

$$= \sin \omega x$$

而函数在

$[0, 1]$ 上至少有 20 个最小值

∴至少有 19.75 个最小正周期

$$\therefore \left(19 + \frac{3}{4}\right) T \leq 1$$

即

$$\frac{79}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \leq 1$$

$$\therefore \omega \geq 39.5\pi$$

故

ω 的最小值是 39.5π

练24

答案: A

解答:

$$\therefore x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ 且 } \omega > 0$$

$$\therefore \omega x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}, \pi\omega + \frac{\pi}{4}\right)$$

由 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减

易得: $\left(\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}, \pi\omega + \frac{\pi}{4}\right) \subseteq \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \pi\omega + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}$$

解得: $\frac{1}{2} \leq \omega \leq \frac{5}{4}$

$\therefore$ 实数 ω 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]$

故选: A.

练25

答案: A

解答:

A. $f(x) = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 满足①

$f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f(-x) = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, 满足②

$x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), 2x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

因为 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数, 满足③. 故A项符合题意

B. $f(x) = \sin 2x, T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 满足①; $f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f(-x) = -\cos 2x - \sin 2x \neq 0$, 不满足②

$x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), 2x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

因为 $\sin 2x$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数, 满足③. 故B项不符合题意

C. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right), T = 2\pi$, 不满足①. 故C项不符合题意

D. $f(x) = \cos 2x, T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 满足①; $f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f(-x) = \sin 2x + \cos 2x \neq 0$, 不满足②. 故D项不符合题意

故选: A.

练26

答案: A

解答:

函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) + 1$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)

由 $f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 2 - f(x)$, 得 $f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + f(x) = 2$

可知, $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$ 对称

又 $\because$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 可得 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)$ 取得最小值

当 ω 取最小值时, 即周期 T 最大, 可得 $\frac{1}{4}T = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

可得: $T = \frac{\pi}{3}$

那么 $\omega = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$

函数 $f(x) = 2\sin(6x + \varphi) + 1$, 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)$ 取得最小值

$\therefore 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \varphi\right) + 1 = -1$

$\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \varphi = 0$, 即函数 $f(x) = 2\sin 6x + 1$

令 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 6x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$

得 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$

故选: A.

第4讲 三角函数性质综合

练1

答案: D

解答:

$$\because y = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\because -1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$$

$\therefore$ 当 $\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = -1$ 时, 函数 y 取得最小值 -2

故选: D.

练2

答案: C

解答:

$$\because f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\therefore \text{最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

故选: C.

练3

答案: C

解答:

函数

$$f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$$

令

$$2x + \frac{\pi}{3} = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad \text{可得 } x = \frac{1}{2}k\pi - \frac{\pi}{6}$$

当

$$k = 1 \text{ 时, 可得 } x = \frac{\pi}{3}$$

那么图象的一个对称中心是

练4

$$\text{答案: } \left[2k\pi - \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6} \right] (k \in \mathbf{Z})$$

解答:

$$\because f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\therefore 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$\therefore 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbf{Z})$$

函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 的单调递增区间是 $\left[2k\pi - \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right] \quad (k \in \mathbf{Z})$

故答案为: $\left[2k\pi - \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right] \quad (k \in \mathbf{Z})$.

练5

答案: B

解答:

$$\because y = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ 即 } x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

故选: B.

练6

答案: $-\frac{1}{2}$

解答:

$$\because f(x) = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\text{又} \because -1 \leq \sin 2x \leq 1$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$

故答案为: $-\frac{1}{2}$.

练7

答案: C

解答:

$$\text{因为 } f(x) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1}{2} = \frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$$

所以它的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$

故选: C.

练8

答案: D

解答:

$$f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

令 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$

故选: D.

练9

答案: C

解答:

$$f(x) = \cos 2x + 2 \sin x = 1 - 2 \sin^2 x + 2 \sin x = -2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2}$$

因为 $-1 \leq \sin x \leq 1$

所以当 $\sin x = \frac{1}{2}$ 时, 函数取到最大值 $\frac{3}{2}$

当 $\sin x = -1$ 时, 函数取到最小值 -3

故选: C.

练10

解答:

$$(1) \text{ 因为 } f(x) = \frac{1}{2}(2 \cos^2 x - 1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(2 \sin x \cos x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$$(2) \text{ 由 } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ 得 } -\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}$$

又因为正弦函数 $y = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减

$$\text{令 } -\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 解得 } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\text{令 } \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}, \text{ 解得 } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减

练11

答案: C

解答:

函数

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} + \sin 2x \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 2 \sin 2x \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \sin 2x \end{aligned}$$

故它的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$

故选: C.

练12答案: π

解答:

$$\text{因为 } y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

因此最小正周期是 $\frac{2\pi}{2} = \pi$

故答案为: π .**练13**

答案: C

解答:

$$f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\because -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

则函数 $f(x)$ 的取值范围是 $[-\sqrt{3}, 2]$

故选: C.

练14

解答:

$$(1) \because f(\theta) + \sin \theta = \sqrt{3}$$

$$\therefore 2\sin \theta + \sqrt{3}\cos \theta = \sqrt{3}$$

$$\text{又} \because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{1}{7} \text{ 或 } \cos \theta = 1$$

$$(2) \because f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{解得 } -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$f(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$$

练15

解答:

$$(1) f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{3}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

∴当 $x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)，即 $x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时， $f(x)$ 取得最小值 $-\sqrt{3}$

此时 x 的取值集合为 $\left\{x \mid x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})\right\}$

(2) 先由 $y = \sin x$ 的图象上的所有点的纵坐标变为原来的 $\sqrt{3}$ 倍，横坐标不变，得到 $y = \sqrt{3} \sin x$ 的图象

再由 $y = \sqrt{3} \sin x$ 的图象上的所有点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到 $y = f(x)$ 的图象

练16

答案: $\frac{\pi}{2}$

解答:

$$y = 1 - 2 \cos^2 2x = -(2 \cos^2 2x - 1) = -\cos 4x$$

∴函数的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

故答案为: $\frac{\pi}{2}$.

练17

答案: B

解答:

$$\because \text{函数 } f(x) = 2 \cos^2 x - \sin^2 x + 2$$

$$= 2 \times \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2 = \frac{3}{2} \cos 2x + \frac{5}{2}$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的最小正周期为 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\because -1 \leq \cos 2x \leq 1$$

∴当 $\cos 2x = 1$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值

$$\text{最大值为 } \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$$

故选: B.

练18

解答:

$$(1) f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos \frac{2\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} - 4 \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= -1 + \frac{3}{4} - 2$$

$$= -\frac{9}{4}$$

$$(2) f(x) = 2(2 \cos^2 x - 1) + (1 - \cos^2 x) - 4 \cos x$$

$$= 3 \cos^2 x - 4 \cos x - 1$$

$$= 3\left(\cos x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}, \quad x \in \mathbf{R}$$

因为 $\cos x \in [-1, 1]$

所以当 $\cos x = -1$ 时, $f(x)$ 取最大值 6; 当 $\cos x = \frac{2}{3}$ 时, $f(x)$ 取最小值 $-\frac{7}{3}$

练19

解答:

$$(1) \because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ 且 } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore f(\alpha) = \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(2) f(x) = \cos x (\sin x + \cos x) - \frac{1}{2} = \sin x \cos x + \cos^2 x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{由 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 得 } k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left[k\pi - \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8} \right], k \in \mathbf{Z}$$

练20

解答:

(1)

$$\because f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - 2 \sin^2 x$$

$$= \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x - 1$$

$$= 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - 1$$

当

$$2x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } x = k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z}) \text{ 时}$$

函数

$$f(x) \text{ 取得最大值等于 } 2 - 1 = 1$$

(2) 由

$$f(x) = 0 \text{ 得 } 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 2 \sin^2 x$$

于是

$$\sin x = 0, \text{ 或 } \sqrt{3} \cos x = \sin x$$

即

练21

答案: C

解答:

$$f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x = 2 \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{6} \right), (\omega > 0)$$

$\therefore f(x)$ 的图象与直线 $y = 2$ 的两个相邻交点的距离等于 π ，恰好是 $f(x)$ 的一个周期

$$\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \quad \omega = 2$$

$$f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

故其单调增区间应满足

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

故选：C.

练22

答案：D

解答：

$$\text{由题意可得：} f(x) = \cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\textcircled{1} f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -f\left(\frac{2\pi}{3}\right), \text{ 但是不满足 } x_1 = -x_2$$

所以①错误

$$\textcircled{2} \text{ 根据周期公式可得 } f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \text{ 的最小正周期为 } \pi$$

所以②错误

$$\textcircled{3} f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \text{ 的单调增区间为 } \left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right] \quad (k \in \mathbf{Z}), \text{ 显然③正确}$$

$$\textcircled{4} f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \text{ 的对称轴为 } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbf{Z}), \text{ 显然④正确}$$

$$\textcircled{5} f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\text{因为 } x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right], \text{ 所以 } 2x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$\text{所以 } \sin 2x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 的值域为 } \left[-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right]$$

所以⑤错误

故选：D.

练23

解答：

(1)

$$f(x) = \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x$$

$$= \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x$$

$$= 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

因为

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

所以

$$k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

所以函数的单调递增区间为

$$\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6} \right], \quad k \in \mathbf{Z}$$

(2) 由

$$f(x) = 0, \text{ 得 } 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

解得:

$$2x + \frac{\pi}{6} = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

▽

练 24

解答:

$$(1) f(x) = 2\sin\omega x \cos\omega x + \cos 2\omega x = \sin 2\omega x + \cos 2\omega x = \sqrt{2}\sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$$

由于函数的最小正周期为 π

$$\text{则 } T = \frac{2\pi}{2\omega} = \pi$$

解得 $\omega = 1$

$$(2) \text{ 由 (1) 得, 函数 } f(x) = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$\text{解得 } -\frac{3\pi}{8} + k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8} \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$\text{所以函数的单调递增区间为 } \left[-\frac{3\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi \right] \quad (k \in \mathbf{Z})$$

练 25

解答:

$$(1) f(x) = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{所以函数 } f(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \right], \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$(2) x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \quad -\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}, \quad -\frac{1}{2} \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

$$-1 \leq 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$$

$$\text{方程 } 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = a \text{ 在 } \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \text{ 上有解}$$

所以实数 a 的取值范围为 $[-1, 2]$

练26

解答:

$$(1) f(x) = 1 + \cos \omega x + a + \sqrt{3} \sin \omega x = 2 \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{6} \right) + a + 1$$

因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最大值为 2

所以 $3 + a = 2$, 故 $a = -1$

$$(2) \text{ 由 (1) 知: } f(x) = 2 \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{6} \right)$$

把函数 $f(x) = 2 \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{6} \right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6\omega}$ 个单位

可得函数 $g(x) = 2 \sin \omega x$ 的图象

又 $\because y = g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$ 上为增函数

$$\therefore \frac{\pi}{4} \omega \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 解得 } \omega \leq 2$$

$\therefore \omega$ 的最大值为 2

第 5 讲 正弦定理余弦定理

练 1

答案: D

解答:

 $\because \triangle ABC$ 中, $A = 45^\circ$, $B = 60^\circ$, $a = 10$, $\therefore$ 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\frac{10}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$ 解之可得 $b = \frac{10 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 5\sqrt{6}$

故选: D.

练 2

答案: A

解答:

 $\because a = 4$, $b = 6$, $B = 60^\circ$ $\therefore$ 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 得: $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

故选: A.

练 3

答案:

 $2\sqrt{3}$

解答:

在

 $\triangle ABC$ 中 $\because A = 30^\circ$, $a = \sqrt{3}$ $\therefore$ 由正弦定理得 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$

故答案为:

练 4

答案: $1 : \sqrt{3} : 2$

解答:

在 $\triangle ABC$ 中 $\because A : B : C = 1 : 2 : 3$ $\therefore B = 2A$, $C = 3A$ $\because A + B + C = \pi$

$$\therefore 6A = \pi$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{3}, C = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{由正弦定理得 } a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$$

$$= 1 : \sqrt{3} : 2$$

故答案为: $1 : \sqrt{3} : 2$.

练5

答案: B

解答:

$$\text{由题意可得 } S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故选: B.

练6

$$\text{答案: } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

解答:

$$\therefore S = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$\therefore 5\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin C$$

$$\therefore \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

练7

答案: C

解答:

$$\therefore a = 3, b = \sqrt{7}, c = 2$$

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{9 + 4 - 7}{2 \times 3 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{又 } B \in (0, \pi)$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{3}$$

故选: C.

练8

答案:

1

解答:

由余弦定理得

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 2 \cdot \cos 30^\circ} = 1$$

故答案为:

1

练9

答案: A

解答:

设 $AC = b$, 由余弦定理得 $13 = b^2 + 9 - 2 \times 3 \times b \times \cos 120^\circ$

$$\therefore b^2 + 3b - 4 = 0$$

$$\therefore b = 1 \text{ 或 } b = -4 \text{ (舍)}$$

故选: A.

练10

答案: A

解答:

$$\text{由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$$

因为 $0^\circ < A < 180^\circ$ 所以 $A = 60^\circ$

故选: A.

练11

答案: D

解答:

$$\text{由 } A = 60^\circ, a = \sqrt{3}$$

$$\text{根据正弦定理得: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2$$

$$\text{可得: } a = 2 \sin A, b = 2 \sin B, c = 2 \sin C$$

$$\text{则 } \frac{a - b - c}{\sin A - \sin B - \sin C} = \frac{2(\sin A - \sin B - \sin C)}{\sin A - \sin B - \sin C} = 2$$

故选: D.

练12

答案: B

解答:

$$\text{由 } b = 2a \sin B$$

$$\text{得: } \sin B = 2 \sin A \sin B$$

$$\text{解得: } \sin A = \frac{1}{2}$$

由于 $\triangle ABC$ 是锐角三角形

$$\text{则: } A = \frac{\pi}{6}$$

故选: B.

练13

答案: B

解答:

$$\text{已知 } 3b \cos A = c \cos A + a \cos C$$

$$\text{由正弦定理可得 } 3 \sin B \cos A = \sin C \cos A + \sin A \cos C$$

$$\text{则 } 3 \sin B \cos A = \sin(C + A)$$

$$\text{因为 } \sin B = \sin(\pi - B) = \sin(C + A) \neq 0$$

$$\text{所以 } 3 \cos A = 1, \cos A = \frac{1}{3}$$

$$\text{由于 } A \in (0, \pi), \sin A > 0$$

$$\text{所以 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = 2\sqrt{2}$$

故选: B.

练14

答案: C

解答:

$$\text{已知等式利用正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 化简得: } ba^2 \cos A = ab^2 \cos B$$

$$\text{整理得: } a \cos A = b \cos B, \text{ 即 } \sin A \cos A = \sin B \cos B$$

$$\therefore 2 \sin A \cos A = 2 \sin B \cos B, \text{ 即 } \sin 2A = \sin 2B$$

$$\therefore 2A = 2B \text{ 或 } 2A + 2B = \pi, \text{ 即 } A = B \text{ 或 } A + B = \frac{\pi}{2}$$

则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形

故选: C.

练15

答案: D

解答:

由 $a \cos B + b \cos A = c \sin C$, 结合正弦定理可得

$$\sin A \cos B + \sin B \cos A = \sin^2 C$$

$$\therefore \sin(B+A) = \sin^2 C, \text{ 即 } \sin C(\sin C - 1) = 0$$

在 $\triangle ABC$ 中, $\therefore \sin C \neq 0$

$$\therefore \sin C = 1, \text{ 又 } 0 < C < \pi$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{2}$$

故选: D.

练16

解答:

$$(1) \text{ 由 } 2a \sin B = \sqrt{3}b, \text{ 利用正弦定理得: } 2 \sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B$$

$$\therefore \sin B \neq 0$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

又 A 为锐角

$$\text{则 } A = \frac{\pi}{3}$$

$$(2) \text{ 由余弦定理得: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \text{ 即 } 36 = b^2 + c^2 - bc$$

$$= (b+c)^2 - 3bc$$

$$= 64 - 3bc$$

$$\therefore bc = \frac{28}{3}, \text{ 又 } \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

练17

答案: 4

解答:

$$\therefore a = 2, b + c = 7, \cos B = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore b^2 = 2^2 + (7-b)^2 - 2 \times 2 \times (7-b) \times \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore b = 4$$

故答案为: 4.

练18

答案: C

解答:

已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C$

所以 $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$

整理可得 $\sin C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

根据余弦定理可知 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

所以 $\sin C = \cos C$

因为 $C \in (0, \pi)$

所以 $C = \frac{\pi}{4}$

故选: C.

练19

解答:

(1) $\because B = 150^\circ, a = \sqrt{3}c, b = 2\sqrt{7}$

由余弦定理得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3c^2 + c^2 - 28}{2\sqrt{3}c^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $7c^2 = 28$

$\therefore c = 2, a = 2\sqrt{3}$

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$

(2) $\because B = 150^\circ$

$\therefore A + C = 30^\circ$

$\therefore \sin A + \sqrt{3} \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \sin(30^\circ - C) + \sqrt{3} \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 30^\circ \cos C - \cos 30^\circ \sin C + \sqrt{3} \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{2} \cos C - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C + \sqrt{3} \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{2} \cos C + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C = \sin(C + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

又 $30^\circ < C + 30^\circ < 60^\circ$

$\therefore C + 30^\circ = 45^\circ$

$\therefore C = 15^\circ$

练20

解答:

$$(1) \because A = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{由余弦定理可得: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore b^2 - a^2 = \sqrt{2}bc - c^2$$

$$\text{又 } b^2 - a^2 = \frac{1}{2}c^2$$

$$\therefore \sqrt{2}bc - c^2 = \frac{1}{2}c^2$$

$$\therefore \sqrt{2}b = \frac{3}{2}c$$

$$\text{可得 } b = \frac{3\sqrt{2}c}{4}$$

$$\therefore a^2 = b^2 - \frac{1}{2}c^2 = \frac{5}{8}c^2, \text{ 即 } a = \frac{\sqrt{10}}{4}c$$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\frac{5}{8}c^2 + \frac{9}{8}c^2 - c^2}{2 \times \frac{\sqrt{10}}{4}c \times \frac{3\sqrt{2}}{4}c} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\because C \in (0, \pi)$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = 2$$

$$(2) \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{4}c \times \frac{3\sqrt{2}}{4}c \times \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= 3$$

$$\text{解得 } c = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore b = \frac{3\sqrt{2}c}{4} = 3$$

练21

答案: C

解答:

$$b^2 \sin^2 C + c^2 \sin^2 B = 2bc \cos B \cos C$$

根据正弦定理

$$\sin^2 B \sin^2 C + \sin^2 C \sin^2 B = 2 \sin B \sin C \cos B \cos C, \text{ 又 } \sin B \sin C \neq 0$$

$$\therefore \sin B \sin C = \cos B \cos C$$

$$\therefore \cos B \cos C - \sin B \sin C = \cos(B + C) = 0$$

又 B 和 C 都为三角形的内角

$$\therefore B + C = 90^\circ$$

则 $\triangle ABC$ 为直角三角形

故选 C

练22

答案：B

解答：

$$\because a \sin A + c \sin C - \sqrt{2}a \sin C = b \sin B$$

$$\therefore \text{由正弦定理可得 } a^2 + c^2 - \sqrt{2}ac = b^2$$

$$\text{由余弦定理可得 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\because 0 < B < \pi$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{4}$$

故选：B.

练23

答案： $4 + 2\sqrt{3}$

解答：

$$\text{因为 } \sqrt{3}b \sin A = a \cos B$$

$$\text{由正弦定理可得, } \sqrt{3} \sin B \sin A = \sin A \cos B$$

$$\text{因为 } \sin A \neq 0$$

$$\text{所以 } \sqrt{3} \sin B = \cos B, \text{ 即 } \tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{因为 } B \in (0, \pi)$$

$$\text{所以 } B = 30^\circ$$

$$\text{则 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}ac \sin 30^\circ = \frac{ac}{4} = \sqrt{3}$$

$$\text{则 } ac = 4\sqrt{3}$$

$$\text{由余弦定理可得, } \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 + c^2 - 4}{2ac} = \frac{(a+c)^2 - 8\sqrt{3} - 4}{8\sqrt{3}}$$

$$\text{解可得, } a + c = 2 + 2\sqrt{3}$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的周长 } a + b + c = 4 + 2\sqrt{3}$$

故答案为： $4 + 2\sqrt{3}$.

练24

答案: $\frac{5\pi}{8}$

解答:

在 $\triangle ABC$ 中

$$\because S = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \cos A$$

$$\therefore \tan A = 1$$

$$\therefore A = 45^\circ$$

$$\because b \sin B - c \sin C = a$$

$$\therefore \sin^2 B - \sin^2 C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \cos 2C - \cos 2B = \sqrt{2}$$

$$\therefore \cos(270^\circ - 2B) - \cos 2B = \sqrt{2}$$

$$\therefore -\sin 2B - \cos 2B = \sqrt{2}$$

$$\therefore \sin\left(2B + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\therefore 2B + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}, \text{ 解得 } B = \frac{5\pi}{8}$$

故答案为: $\frac{5\pi}{8}$.

练25

答案: B

解答:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin C}{\cos C} \left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} \right)} \\ &= \frac{\frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}}{\frac{\sin C (\sin A \cos B + \cos A \sin B)}{\cos C \cos A \cos B}} \\ &= \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} \cdot \frac{\cos C \cos A \cos B}{\sin C (\sin A \cos B + \cos A \sin B)} \\ &= \frac{\sin A \sin B \cos C}{\sin C \sin (A + B)} = \frac{\sin A \sin B \cos C}{\sin C \sin (\pi - C)} \\ &= \frac{\sin A \sin B \cos C}{\sin^2 C} \end{aligned}$$

$$\text{故由正、余弦定理可得原式} = \frac{ab}{c^2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2c^2}$$

$$\text{由已知 } 9a^2 + 9b^2 = 19c^2 \text{ 可得 } a^2 + b^2 = \frac{19}{9}c^2$$

$$\text{故原式} = \frac{\frac{19c^2}{9} - c^2}{2c^2} = \frac{5}{9}$$

故选: B.

练26

解答:

(解法一) 选 (1) (2), 则 $a = c = 2$, $b = 2\sqrt{3}$

$$\text{由余弦定理可得: } \cos \angle ABC = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -\frac{1}{2}$$

又 $\angle ABC \in (0, \pi)$

$$\therefore \angle ABC = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore A = C = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{在 } \triangle BCF \text{ 中, 由正弦定理可得 } \frac{CF}{\sin \angle CBF} = \frac{BF}{\sin C}$$

$$\therefore CF = \sqrt{2}BF$$

$$\therefore \sin \angle CBF = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{又 } \angle CBF < \angle ABC = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \angle CBF = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \angle ABF = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}, \angle AFB = \pi - \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$$

则在 $\triangle ABF$ 中, $\angle ABF = \angle AFB$

$$\therefore AF = AB = 2$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{\pi}{6} = 1$$

(解法二) 选 (2) (3)

$$\therefore a = 2, b = 2\sqrt{3}, a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab = c^2$$

$$\therefore c = 2$$

$$\text{由余弦定理可得: } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

又 $C \in (0, \pi)$

$$\therefore C = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore A = C = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \angle ABC = \pi - A - C = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{在 } \triangle BCF \text{ 中, 由正弦定理可得 } \frac{CF}{\sin \angle CBF} = \frac{BF}{\sin C}$$

$$\therefore CF = \sqrt{2}BF$$

$$\therefore \sin \angle CBF = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{又 } \angle CBF < \angle CBA = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \angle CBF = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \angle ABF = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}, \quad \angle AFB = \pi - \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$$

则在 $\triangle ABF$ 中, $\angle ABF = \angle AFB$

$$\therefore AF = AB = 2$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{\pi}{6} = 1$$

(解法三) 选 (1) (3), 则 $a = c = 2$, $a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab = c^2$

$$\text{则: } a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{3}ab$$

$$\text{由余弦定理可得: } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{又 } C \in (0, \pi)$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore a = c$$

$$\therefore A = C = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \angle ABC = \pi - A - C = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{在 } \triangle BCF \text{ 中, 由正弦定理可得 } \frac{CF}{\sin \angle CBF} = \frac{BF}{\sin C}$$

$$\therefore CF = \sqrt{2}BF$$

$$\therefore \sin \angle CBF = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{又 } \angle CBF < \angle CBA = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \angle CBF = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \angle ABF = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}, \quad \angle AFB = \pi - \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$$

则在 $\triangle ABF$ 中, $\angle ABF = \angle AFB$

$$\therefore AF = AB = 2$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{\pi}{6} = 1$$

第6讲 解三角形综合

练1

答案: A

解答:

$$\therefore b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$$

$$\therefore \text{由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{又} \because 0^\circ < A < 180^\circ$$

$$\therefore A = 30^\circ$$

故选: A.

练2

答案: D

解答:

$$\text{由余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\text{得 } 7 = a^2 + 4 - 2a$$

解得 $a = 3$ (负值舍去)

$$\text{由正弦定理可得, } \sin A = \frac{a}{c} \sin C = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

故选: D.

练3

答案: 7

解答:

$$\therefore \cos B = \frac{3}{5}, a = 5, A = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \text{由正弦定理可得: } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{5 \times \frac{4}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{由余弦定理可得: } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \text{ 即: } 32 = 25 + c^2 - 6c, \text{ 解得: } c = 7 \text{ 或 } -1 \text{ (舍去)}$$

故答案为: 7.

练4

答案:

10

解答:

如图,依题意有

$$\angle BAC = 60^\circ, \angle BAD = 75^\circ$$

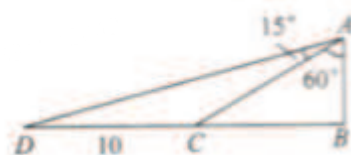
所以

$$\angle CAD = \angle CDA = 15^\circ$$

从而

$$CD = CA = 10$$

在直角三角形

**练5**

答案: B

解答:

设

 A 处与 C 处之间的距离为 x 千米

由余弦定理可得

$$x^2 = (2\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 6 \cos(60^\circ - 30^\circ) = 12$$

则

$$x = 2\sqrt{3}$$

练6

答案: A

解答:

设塔为

 AB , 楼顶 C , 过楼顶 C 作 AB 的垂线, 垂足是 D

因为

$$\angle ACD = 30^\circ, CD = 20 \text{ m}$$

所以

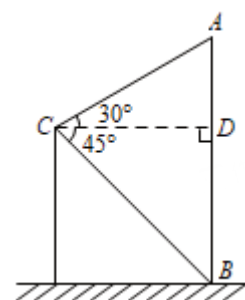
$$AD = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

因为

$$\angle BCD = 45^\circ$$

所以

$$BD = CD = 20$$

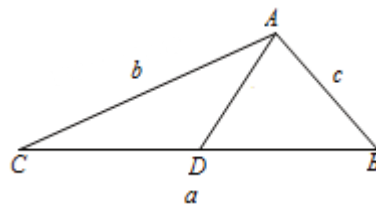


练7

解答:

如图, 在

$$\triangle ABC \text{ 与 } \triangle ACD \text{ 中分别应用余弦定理, 则 } \cos C = \frac{a^2 + 7^2 - 4^2}{2 \times 7 \times a} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 7^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2}{2 \times 7 \times \frac{a}{2}}$$



解得

$$a = 9$$

练8

答案: D

解答:

由正弦定理:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

且

$$c = 2b, \quad B = \frac{\pi}{6}$$

所以

$$\sin C = 1$$

又

$$C \in (0, \pi)$$

所以

$$C = \frac{\pi}{2}$$

故

练9

答案: A

解答:

因为在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 2$, $\angle B = 60^\circ$, $b = \sqrt{7}$

所以 $\cos 60^\circ = \frac{c^2 + 2^2 - (\sqrt{7})^2}{4c}$, 解得 $c = 3$ 或 $c = -1$ (舍去)

则 BC 边上的高为 $c \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

故选: A.

练10答案: $\sqrt{13}$

解答:

由余弦定理得 $\cos \angle ADB = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2}$ 得 $\cos \angle CDB = \frac{1}{2}$ 则 $BC = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{13}$ 故答案为: $\sqrt{13}$.**练11**

答案: A

解答:

由于 $\sin C = 2\sqrt{3}\sin B$ 则由正弦定理可得 $c = 2\sqrt{3}b$ 再由 $a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc$ 可得 $a^2 = 7b^2$

再由余弦定理可得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + 12b^2 - 7b^2}{4\sqrt{3}b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故 $A = 30^\circ$

故选: A.

练12

答案: 6

解答:

由题可得, 在锐角 $\triangle ABC$ 中由正弦定理得, $\sqrt{3}\sin C = 2\sin A\sin C$, $\sin C \neq 0$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}$$

由余弦定理得, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\frac{\pi}{3}$

$$\therefore 12 = b^2 + c^2 - bc \text{ ①}$$

又三角形面积为 $\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$$\therefore bc = 8 \text{ ②}$$

由 ①② 得, $b^2 + c^2 = 20$

$$\therefore (b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 = 36, \quad b+c > 0$$

$$\therefore b + c = 6$$

故答案为：6.

练13

解答：

(1) (法一)：在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $(2\sin A - \sin C)\cos B = \sin B\cos C$

$$\therefore 2\sin A\cos B = \sin B\cos C + \sin C\cos B = \sin(B+C)$$

$$\text{又 } B+C = \pi - A$$

$$\therefore \sin(B+C) = \sin(\pi - A) = \sin A$$

$$\therefore 2\sin A\cos B = \sin A$$

$$\because \sin A \neq 0$$

$$\therefore \cos B = \frac{1}{2}$$

$$\because 0 < B < \pi$$

$$\text{故 } B = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{(法二) 由余弦定理得 } (2a - c) \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = b \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\therefore a^2 + c^2 - b^2 = ac$$

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$$

$$\because 0 < B < \pi$$

$$\text{故 } B = \frac{\pi}{3}$$

$$(2) \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac = \sqrt{3}$$

$$\therefore ac = 4$$

$$\text{又 } a + c = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore \text{由余弦定理得 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = (a+c)^2 - 3ac = 12$$

$$\therefore b = 2\sqrt{3}$$

$$\text{又由正弦定理知 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 4$$

$$\therefore a = 4\sin A, \quad c = 4\sin C, \quad \text{即 } \sin A = \frac{a}{4}, \quad \sin C = \frac{c}{4}$$

$$\therefore \sin A \sin C = \frac{ac}{16} = \frac{1}{4}$$

练14

答案： $3\sqrt{3}$

解答：

设 $\triangle ABC$ 的周长为 l

由正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\text{得 } \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = 2$$

$$C = \pi - A - B = \frac{2\pi}{3} - A$$

$$\text{所以 } a = 2 \sin A, \quad c = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right)$$

$$\text{所以周长 } l = a + c + b = 2 \sin A + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) + \sqrt{3}$$

$$= 2 \sin A + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A \right) + \sqrt{3}$$

$$= 3 \sin A + \sqrt{3} \cos A + \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$$

$$\text{因为 } 0 < A < \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{所以当 } A = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } l_{\max} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

故答案为: $3\sqrt{3}$.

练15

解答:

(1)

$$\therefore \frac{\cos A}{\cos C} = -\frac{a}{2b+c}$$

$$\therefore \frac{\cos A}{\cos C} = -\frac{a}{2b+c} = -\frac{\sin A}{2 \sin B + \sin C}$$

即

$$2 \sin B \cos A + \cos A \sin C = -\sin A \cos C$$

即

$$2 \sin B \cos A = -(\sin A \cos C + \cos A \sin C) = -\sin(A+C) = -\sin B$$

$$\therefore \sin B \neq 0$$

$$\therefore \cos A = -\frac{1}{2}, \quad \text{又} \because 0 < A < \pi$$

故

$$A = \frac{2\pi}{3}$$

(2) 由正弦定理可得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore b+c = \frac{4\sqrt{3}}{3}(\sin B + \sin C) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \left[\sin\left(\frac{\pi}{3} - C\right) + \sin C \right] = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} + C\right)$$

$$\therefore 0 < C < \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < C + \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(C + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$

练16

解答:

根据题意,

$$\triangle ABC \text{ 中, } C = \frac{\pi}{6}, a + b = 12$$

则其面积

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{4}ab \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = 9, \quad a = b = 6 \text{ 时取等号}$$

即三角形面积的最大值为

9

练17

答案: (1, 2)

解答:

$$\because \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } B = 2A, A + B + C = \pi$$

$$\therefore 3A + C = \pi, \text{ 则 } 0 < A < \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin 2A}{\sin A} = 2 \cos A$$

$$\text{又由 } 0 < A < \frac{\pi}{3}, \text{ 得 } \frac{1}{2} < \cos A < 1$$

$$\text{所以 } 1 < \frac{b}{a} < 2$$

$$\text{即 } \frac{b}{a} \text{ 的取值范围是 } (1, 2)$$

故答案为: (1, 2).

练18

解答:

(1) 在 $\triangle ABC$ 中

$$\because AD = 4\sqrt{2}, CD = 7, AC = 5$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ACD \text{ 中, 由余弦定理可得: } \cos \angle ADC = \frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2AD \times DC} = \frac{32 + 49 - 25}{2 \times 4\sqrt{2} \times 7} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\because \angle ADC \in (0, \pi)$$

$$\therefore \angle ADC = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \because \angle ADC = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \angle ADB = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ABD \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{AD}{\sin \angle B}$$

$$\text{即 } \frac{AB}{\sin \frac{3\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi}{6}}, \text{ 解得 } AB = 8$$

练19

解答:

$$(1) \text{ 由 } \cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 得 } \sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin A = \sin(180^\circ - 45^\circ - C)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos C + \sin C)$$

$$= \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{由正弦定理知 } BC = \frac{AC}{\sin B} \cdot \sin A$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$= 3\sqrt{2}$$

$$(2) AB = \frac{AC}{\sin B} \cdot \sin C$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= 2$$

$$BD = \frac{1}{2}AB = 1$$

由余弦定理知

$$CD = \sqrt{BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cos B}$$

$$= \sqrt{1 + 18 - 2 \cdot 1 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{13}$$

练20

$$\text{答案: } \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

解答:

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 已知 } AB = 2, AC = 3, A = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{利用余弦定理得 } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \frac{\pi}{3}, \text{ 整理得 } BC = \sqrt{7}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} BD + DC = \sqrt{7} \\ \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{2}{3} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} BD = \frac{2\sqrt{7}}{5} \\ DC = \frac{3\sqrt{7}}{5} \end{cases}$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, 由余弦定理得 } BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD$$

$$\text{在 } \triangle ADC \text{ 中, 由余弦定理得 } CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cdot \cos \angle DAC$$

$$\text{设 } AD = x, \text{ 又 } \angle DAC = \angle DAB = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{整理得, } \frac{28}{25} = 4 + x^2 - 2\sqrt{3}x \text{ ①}, \frac{63}{25} = 9 + x^2 - 3\sqrt{3}x \text{ ②}$$

$$\text{联立①②, 解得 } x = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

故答案为: $\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

练21

答案: $(2\sqrt{3} + 2, 6]$

解答:

由 $C = \frac{\pi}{3}$ 且三角形是锐角三角形, 可得 $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2}$

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\therefore a = \frac{c}{\sin C} \times \sin A = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin A, \quad b = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin B = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right)$$

$$\therefore a + b = \frac{4}{\sqrt{3}} \left[\sin A + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) \right] = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A \right) = 4 \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1, \text{ 即 } 2\sqrt{3} < a + b \leq 4$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 周长 } l = a + b + c \in (2\sqrt{3} + 2, 6]$$

故答案为: $(2\sqrt{3} + 2, 6]$.

练22

答案: B

解答:

$$\because B = 2A$$

$$\therefore \sin B = \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

利用正弦定理化简得: $b = 2a \cos A$, 即 $\frac{b}{a} = 2 \cos A$

$\because C = \pi - A - B = \pi - 3A$, C 为锐角

$$\therefore 0 < \pi - 3A < \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{3}$$

又 $B = 2A$, B 为锐角

$$\therefore 0 < 2A < \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } 0 < A < \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos A < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sqrt{2} < \frac{b}{a} < \sqrt{3}$$

则 $\frac{\sqrt{2}b}{a}$ 的取值范围是 $(2, \sqrt{6})$

故选: B.

练23

答案: B

解答:

在 $\triangle ABC$ 中

$$\because a^2 + c^2 - b^2 = ac$$

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$$

$$\because B \in (0, \pi)$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{3}, \quad A + C = \frac{2\pi}{3}$$

$$\because b = \sqrt{3}$$

$$\therefore \text{由正弦定理可得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore 2a + c &= 4 \sin A + 2 \sin C = 4 \sin A + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) \\ &= 5 \sin A + \sqrt{3} \cos A = 2\sqrt{7} \sin(A + \varphi), \text{ 其中 } \tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

$$\because 0 < A < \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \varphi < A + \varphi < \frac{2\pi}{3} + \varphi \quad (0 < \varphi < \frac{\pi}{6})$$

$$\therefore \min \left\{ \sin \varphi, \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) \right\} < \sin(A + \varphi) \leq 1$$

$$\therefore 2a + c \leq 2\sqrt{7}$$

$$\text{又 } 2\sqrt{7} \sin \varphi = \sqrt{3}, \quad 2\sqrt{7} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore 2a + c > \sqrt{3}$$

$$\therefore 2a + c \text{ 的取值范围是: } (\sqrt{3}, 2\sqrt{7}]$$

故选: B.

练24

解答:

$$(1) \text{ 在 } \triangle ABD \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{BD}{\sin \angle A} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$$

$$\text{由题设知, } \frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{2}{\sin \angle ADB}$$

$$\text{所以 } \sin \angle ADB = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$\text{由题设知, } \angle ADB < 90^\circ$$

$$\text{所以 } \cos \angle ADB = \sqrt{1 - \frac{2}{25}} = \frac{\sqrt{23}}{5}$$

$$(2) \text{ 由题设及 (1) 知, } \cos \angle BDC = \sin \angle ADB = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2 \cdot BD \cdot DC \cdot \cos \angle BDC$$

$$= 25 + 8 - 2 \times 5 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$= 25$$

所以 $BC = 5$

练25

答案: $\frac{12\sqrt{2}}{5}; \frac{7\sqrt{2}}{10}$

解答:

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 3$

$$\text{所以 } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$$

$$\text{故 } \sin \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}, \cos \angle A = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

在 $\triangle ABD$ 中, $\angle ADB = 135^\circ$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{BD}{\sin \angle A} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$$

$$\text{所以 } BD = \frac{12\sqrt{2}}{5}$$

又因为 $\angle ABD = \angle BDC - \angle A$

所以 $\cos \angle ABD = \cos(\angle BDC - \angle A)$

$$= \cos 45^\circ \cos \angle A + \sin 45^\circ \sin \angle A$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\text{故答案为: } \frac{12\sqrt{2}}{5}; \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

练26

答案: C

解答:

设

$\triangle ABC$ 中角 A, B, C 对应的边分别为 a, b, c , $AD \perp BC$ 于 D , 令 $\angle DAC = \theta$

$$\therefore \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } B = \frac{\pi}{4}, \text{ } BC \text{ 边上的高 } AD = h = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}a$$

$$\therefore BD = AD = \frac{1}{3}a, \quad CD = \frac{2}{3}a$$

在

$$\text{Rt}\triangle ADC \text{ 中, } \cos \theta = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{a}{3}}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 故 } \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \cos A = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

第 7 讲 基础检测卷

练 1

答案: B

解答:

由 $\sin \alpha > 0$, 可得 α 为第一、第二及 y 轴正半轴上的角

由 $\cos \alpha < 0$, 可得 α 为第二、第三及 x 轴负半轴上的角

$\therefore$ 取交集可得, α 是第二象限角

故选: B.

练 2

答案: B

解答:

函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

故选: B.

练 3

答案: D

解答:

$$\because \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

故选: D.

练 4

答案: A

解答:

由正弦定理可得 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$

$$\text{所以 } \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin B}$$

$$\text{故 } \sin B = \frac{1}{2}$$

因为 $BC > AC$, 故 $A > B$

所以 B 为锐角, 即 $B = \frac{\pi}{6}$

故选：A.

练5

答案：C

解答：

常规解析：

已知等式 $(\sqrt{3}b - c) \cos A = a \cos C$ ，利用正弦定理化简得： $(\sqrt{3} \sin B - \sin C) \cos A = \sin A \cos C$

整理得： $\sqrt{3} \sin B \cos A = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin(A + C) = \sin B$

$\because \sin B \neq 0$

$$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

故选：C.

大招解析：

由射影定理可知， $b = a \cos C + c \cos A$

则由已知移项可得 $\sqrt{3}b \cos A = b$ ，即 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{3}$

故选：C.

练6

答案： $\frac{1}{9}$

解答：

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

故答案为： $\frac{1}{9}$.

练7

答案： $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

解答：

$$\because y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore \text{由 } 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{得 } 4k\pi + \frac{5\pi}{3} \leq x \leq 4k\pi + \frac{11\pi}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\therefore \text{当 } k = 0 \text{ 时, 递增区间为 } \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$$

当 k 取其他值时与区间 $[0, 2\pi]$ 无交集

即在 $[0, 2\pi]$ 内的单调递增区间是 $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

故答案为: $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

练8

答案: $\frac{1}{3}$

解答:

因为 $a \tan B = 3b \sin A$

由正弦定理可得 $\sin A \cdot \frac{\sin B}{\cos B} = 3 \sin B \cdot \sin A$

因为 $\sin A \neq 0$, $\sin B \neq 0$

所以 $\cos B = \frac{1}{3}$

故答案为: $\frac{1}{3}$.

练9

解答:

(1) 函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x + 1 = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)

求得 $k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3}$ ($k \in \mathbf{Z}$)

故函数 $f(x)$ 的增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right]$ ($k \in \mathbf{Z}$)

(2) 若 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, 则 $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right]$

故当 $2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值为 -2

当 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值为 $\sqrt{3}$

所以函数的值域为 $[-2, \sqrt{3}]$

第8讲 中档检测卷

练1

答案: B

解答:

$$\because \tan \alpha = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\tan^2 \alpha + 1}{\tan^2 \alpha - 1} = \frac{4 + 1}{4 - 1} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

故选: B.

练2

答案: A

解答:

$$\sin x = 3 \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = -3 \cos x$$

$$\text{解得: } \tan x = -3$$

$$\text{所以: } \cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x \cos x = \frac{-\tan x}{\tan^2 x + 1} = \frac{3}{10}$$

故选: A.

练3

答案: B

解答:

设最小正周期为 T

由题意可得 $A = 2$

$$\because \frac{T}{2} = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore T = \pi = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ 解得: } \omega = 2$$

$$\text{可得: } f(x) = 2 \cos(2x + \varphi)$$

$$\text{将 } \left(\frac{\pi}{3}, 2 \right) \text{ 代入得: } \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \varphi \right) = 1$$

$$\because -\pi < \varphi < 0$$

$$\therefore \varphi = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\text{可得 } f(x) = 2 \cos \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \cos 2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

故可将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到 $g(x) = A \cos \omega x$ 的图象

故选: B.

练 4

答案: B

解答:

将函数 $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位

所得函数解析式为: $y = \sin\left[2(x - \varphi) + \frac{2\pi}{3}\right] = \sin\left(2x - 2\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$

由此函数为偶函数, 可得: $-2\varphi + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

解得: $\varphi = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbf{Z}$

又因为 $\varphi > 0$

所以当 $k = 0$ 时, φ 取得最小正值 $\frac{\pi}{12}$

故选: B.

练 5

答案: B

解答:

在 $\triangle ABC$ 中

$$\because \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c}$$

$$\therefore \frac{1+\cos A}{2} = \frac{\sin B + \sin C}{2\sin C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin B}{\sin C} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore 1 + \cos A = \frac{\sin B}{\sin C} + 1, \text{ 即 } \cos A = \frac{\sin B}{\sin C}$$

$$\therefore \cos A \sin C = \sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$$

$$\therefore \sin A \cos C = 0$$

$$\because \sin A \neq 0$$

$$\therefore \cos C = 0$$

$\therefore C$ 为直角, $\triangle ABC$ 为直角三角形

故选: B.

练 6

答案: C

解答:

$$\text{由题意得, } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab + 6$$

$$\text{又由余弦定理可知, } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - ab$$

$$\therefore -2ab + 6 = -ab, \text{ 即 } ab = 6$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

故选：C.

练7

答案：5

解答：

当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时， $f(x)$ 取得最大值

$$\text{即 } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\omega - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\text{即 } \frac{\pi}{6}\omega - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{即 } \omega = 12k + 5, \quad k \in \mathbf{Z}$$

由于 $\omega > 0$

所以当 $k = 0$ 时， ω 的最小值为 5

故答案为：5.

练8

答案： $4 + 2\sqrt{3}$

解答：

$$\text{因为 } \sqrt{3}b \sin A = a \cos B$$

$$\text{由正弦定理可得, } \sqrt{3} \sin B \sin A = \sin A \cos B$$

因为 $\sin A \neq 0$

$$\text{所以 } \sqrt{3} \sin B = \cos B, \text{ 即 } \tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

因为 $B \in (0, \pi)$

所以 $B = 30^\circ$

$$\text{则 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}ac \sin 30^\circ = \frac{ac}{4} = \sqrt{3}$$

$$\text{则 } ac = 4\sqrt{3}$$

$$\text{由余弦定理可得, } \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 + c^2 - 4}{2ac} = \frac{(a+c)^2 - 8\sqrt{3} - 4}{8\sqrt{3}}$$

$$\text{解可得, } a + c = 2 + 2\sqrt{3}$$

所以 $\triangle ABC$ 的周长 $a + b + c = 4 + 2\sqrt{3}$

故答案为： $4 + 2\sqrt{3}$.

练9

解答：

$$(1) \quad b^2 + c^2 - a^2 = ac \cos C + c^2 \cos A$$

$$\text{由余弦定理可得: } 2bc \cos A = ac \cos C + c^2 \cos A$$

化为: $2b \cos A = a \cos C + c \cos A$

$$\therefore 2 \sin B \cos A = \sin A \cos C + \sin C \cos A = \sin(A + C) = \sin B$$

结合 $B \in (0, \pi)$ 知 $\sin B \neq 0$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{2}, \text{ 又 } A \in (0, \pi)$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}$$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \perp AC$, $DE = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $A = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{AD} = \tan \frac{\pi}{3}, \text{ 解得 } AD = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore AC = \sqrt{2}$$

$$\text{又 } BC = \sqrt{3}$$

$$\therefore 3 = 2 + AB^2 - 2\sqrt{2}AB \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{解得 } AB = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \text{ (舍负)}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}$$