

高三 数学

一轮闯关训练-数列

Math

产品亮点

- ▶ 分层合理效率高
- ▶ 精选分类覆盖广
- ▶ 题目典型收获多

目录



第 1 讲

等差等比的运算及性质	1
------------	---

第 2 讲

数列求通项	7
-------	---

第 3 讲

数列求和	13
------	----

第 4 讲

基础检测卷-数列	20
----------	----

第 5 讲

中档检测卷-数列	23
----------	----

参考答案与解析	25
---------	----

第 1 讲

等差等比的运算及性质



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

数列的概念与表示

练1 (★☆☆☆☆)

下列四个数中，是数列 $\{n(n-1)\}$ 中的一项是 ()

- A. 56 B. 39 C. 32 D. 23

练2 (★★☆☆☆)

数列 $7, 9, 11, \dots, 2n-1$ 的项数是 ()

- A. $n-3$ B. $n-2$ C. $n-1$ D. n

练3 (★★☆☆☆)

观察下列各式： $a+b=1$ ， $a^2+b^2=3$ ， $a^3+b^3=4$ ， $a^4+b^4=7$ ， $a^5+b^5=11$ ， $\dots$ ，则 $a^{10}+b^{10}=(\quad)$

- A. 28 B. 76 C. 123 D. 199

等差数列计算

练4 (★★☆☆☆)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 \neq 0$ ，且满足 $a_1 + a_{10} = a_9$ ，则 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_9}{a_{10}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

练5 (★★★★☆)

已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 成等差数列，则角 B 等于()

- A. 60° B. 45° C. 30° D. 不能确定

练6 (★★★★☆)

设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_4 = 0$ ， $a_5 = 5$ ，则()

- A. $a_n = 2n - 5$ B. $a_n = 3n - 10$ C. $S_n = 2n^2 - 8n$ D. $S_n = \frac{1}{2}n^2 - 2n$

等比数列计算

练7 (★★☆☆☆)

等比数列 $x, 3x+3, 6x+6, \dots$ 的第四项等于()

- A. -24 B. 0 C. 12 D. 24

练8 (★★★★☆)

已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前4项和为15，且 $a_5 = 3a_3 + 4a_1$ ，则 $a_3 = (\quad)$

- A. 16 B. 8 C. 4 D. 2

练9 (★★☆☆☆)

设 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列，若 $a_1 = 1$ ， $a_5 = 16$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的前7项的和为()

- A. 63 B. 64 C. 127 D. 128

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分).

等差数列中的计算

练10 (★★★★☆☆)

记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1 \neq 0$, $a_2 = 3a_1$, 则 $\frac{S_{10}}{S_5} =$ _____.

练11 (★★★★☆☆)

设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是等差数列, 若 $a_1 + b_1 = 7$, $a_3 + b_3 = 21$, 则 $a_5 + b_5 =$ _____.

练12 (★★☆☆☆☆)

设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 = 1$, 公差 $d = 2$, $S_{k+2} - S_k = 24$, 则 $k =$ ()

A. 8

B. 7

C. 6

D. 5

等比数列中的计算

练13 (★★★★☆☆)

设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, $a_2 + a_3 + a_4 = 2$, 则 $a_6 + a_7 + a_8 =$ ()

A. 12

B. 24

C. 30

D. 32

练14 (★★★★☆☆)

记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_5 - a_3 = 12$, $a_6 - a_4 = 24$, 则 $\frac{S_n}{a_n} =$ ()

A. $2^n - 1$ B. $2 - 2^{1-n}$ C. $2 - 2^{n-1}$ D. $2^{1-n} - 1$

练15 (★★★★☆☆)

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n = 126$, 则 $n =$ _____.

提能力

本模块适合90-120分水平学生(满分150分).

等差等比综合计算

练16 (★★★★☆☆)

数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,若 $a_1 + 1$, $a_3 + 3$, $a_5 + 5$ 构成公比为 q 的等比数列,则 $q =$ _____.

练17 (★★☆☆☆☆)

设 $f(n) = 2 + 2^4 + 2^7 + 2^{10} + \cdots + 2^{3n+10}$ ($n \in \mathbf{N}$), 则 $f(n)$ 等于 ()

- A. $\frac{2}{7}(8^n - 1)$ B. $\frac{2}{7}(8^{n+1} - 1)$ C. $\frac{2}{7}(8^{n+3} - 1)$ D. $\frac{2}{7}(8^{n+4} - 1)$

练18 (★★★★☆☆)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差 $d \neq 0$, 且 $\frac{a_1}{d} \leq 1$. 记 $b_1 = S_2$, $b_{n+1} = S_{2n+2} - S_{2n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 下列等式不可能成立的是 ()

- A. $2a_4 = a_2 + a_6$ B. $2b_4 = b_2 + b_6$ C. $a_4^2 = a_2 a_8$ D. $b_4^2 = b_2 b_8$

练19 (★★★★☆☆)

数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{m+n} = a_m a_n$, 若 $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+10} = 2^{15} - 2^5$, 则 $k =$ ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

等差等比的函数性质

练20 (★★☆☆☆☆)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 若数列 $\{2^{a_1 a_n}\}$ 为递减数列, 则 ()

- A. $d > 0$ B. $d < 0$ C. $a_1 d > 0$ D. $a_1 d < 0$

练21 (★★★☆☆)

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -9$, $a_5 = -1$, 记 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 则数列 $\{T_n\}$ ()

- A. 有最大项, 有最小项 B. 有最大项, 无最小项 C. 无最大项, 有最小项 D. 无最大项, 无最小项

练22 (★★★☆☆)

下列关于公差 $d > 0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 的四个命题:

p_1 : 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列;

p_2 : 数列 $\{na_n\}$ 是递增数列;

p_3 : 数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是递增数列;

p_4 : 数列 $\{a_n + 3nd\}$ 是递增数列.

其中的真命题为 ()

- A. p_1, p_2 B. p_3, p_4 C. p_2, p_3 D. p_1, p_4

练23 (★★★☆☆)

设 S_n 是公差为 d ($d \neq 0$) 的无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则下列命题错误的是 ()

- A. 若 $d < 0$, 则数列 $\{S_n\}$ 有最大项
 B. 若数列 $\{S_n\}$ 有最大项, 则 $d < 0$
 C. 若数列 $\{S_n\}$ 是递增数列, 则对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 均有 $S_n > 0$
 D. 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 均有 $S_n > 0$, 则数列 $\{S_n\}$ 是递增数列

数列应用

练24 (★★☆☆☆)

九连环是我国从古至今广泛流传的一种益智游戏, 在某种玩法中, 用 a_n 表示解下 n ($n \leq 9, n \in \mathbf{N}^*$) 个圆环所需移动的最少次数, $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_n = \begin{cases} 2a_{n-1} - 1, & n \text{ 为偶数} \\ 2a_{n-1} + 2, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$ ($2 \leq n \leq 9, n \in \mathbf{N}^*$), 则解下4个圆环所需移动的最少次数为 ()

- A. 7 B. 10 C. 12 D. 22

练25 (★★★☆☆)

《九章算术》“竹九节”问题：现有一根9节的竹子，自上而下各节的容积成等差数列，上面4节的容积共3升，下面3节的容积共4升，则第五节的容积为（ ）

- A. 1升 B. $\frac{67}{66}$ 升 C. $\frac{47}{44}$ 升 D. $\frac{37}{33}$ 升

练26 (★★★☆☆)

北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层。上层中心有一块圆形石板（称为天心石），环绕天心石砌9块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加9块，下一层的第一环比上一层的最后一环多9块，向外每环依次也增加9块。已知每层环数相同，且下层比中层多729块。则三层共有扇面形石板（不含天心石）（ ）

- A. 3699块 B. 3474块
C. 3402块 D. 3339块



第 2 讲

数列求通项



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

等差等比数列的判断

练1 (★★☆☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ ，对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，点 $P_n(n, a_n)$ 都在直线 $y = 2x + 1$ 上，则 $\{a_n\}$ 为（ ）

- A. 公差为2的等差数列 B. 公差为1的等差数列 C. 公差为-2的等差数列 D. 非等差数列

练2 (★★☆☆☆)

若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 4 \cdot 3^{-n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，则下列选项中正确的是（ ）

- A. 以4为首项，3为公比的等比数列 B. 以4为首项， $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列
C. 以 $\frac{4}{3}$ 为首项，3为公比的等比数列 D. 以 $\frac{4}{3}$ 为首项， $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列

累加法求通项

练3 (★★☆☆☆)

在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} - a_n = 2^n$ ，则 $a_n =$ （ ）

- A. $2^n - 1$ B. $2n - 1$ C. $2^{n+1} - 3$ D. $2^{n+1} - 1$

练4 (★★☆☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = n$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()

A. $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$

B. $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1$

C. $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$

D. $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

累乘法求通项

练5 (★★★★☆)

数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 1$, $a_n = n(a_{n+1} - a_n)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ ()

A. $2n - 1$

B. $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}$

C. n^2

D. n

a_n 与 S_n 互化求通项

练6 (★★★★☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $S_n = 2a_{n+1}$, 则当 $n > 1$ 时, $S_n =$ ()

A. $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

B. 2^{n-1}

C. $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

D. $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)$

练7 (★★☆☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2n^2 + n$, 则 ()

A. $a_n = 2n - 1$

B. $a_n = 2n + 1$

C. $a_n = 4n - 1$

D. $a_n = 4n + 1$

刷中档

本模块适合60-90分水平学生(满分150分)。

累加法求通项

练8 (★★★★☆)

数列 $\{a_n\}$ 的首项为1, $\{b_n\}$ 是以2为首项, 以2为公比的等比数列, 且 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则 $a_n =$ ()

A. $2^n - 1$

B. 2^n

C. $2^{n+1} - 1$

D. $2^n - 2$

练9 (★★★☆☆)

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 则 $a_n =$ ()

- A. $2 + \ln n$ B. $2 + (n-1)\ln n$ C. $2 + n\ln n$ D. $1 + n + \ln n$

累乘法求通项

练10 (★★★☆☆)

在数列 $\{a_n\}$ 中, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}$, $a_1 = 2$, 则 a_{2018} 为 ()

- A. 2018 B. 2019 C. 4036 D. 4037

练11 (★★★☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n+3}{n+1}$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()

- A. $a_n = \frac{n(n+2)}{2}$ B. $a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{3}$
C. $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{3}$ D. $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

类一阶线性递推

练12 (★★☆☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = 1$, 则 $a_{10} =$ ()

- A. 10 B. 20 C. 100 D. 200

 a_n 与 S_n 互化求通项

练13 (★★★☆☆)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $2, S_n, 3a_n$ 成等差数列, 则 S_5 的值是 ()

- A. -243 B. 243 C. -162 D. -242

练14 (★★☆☆☆)

已知函数 $\{a_n\}$ 的前 n 项和满足 $S_n = 2^{n+1} - 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()

- A. $a_n = 2^n$ B. $a_n = 2n$ C. $a_n = \begin{cases} 3, n=1 \\ 2^n, n \geq 2 \end{cases}$ D. $a_n = \begin{cases} 3, n=1 \\ 2n, n \geq 2 \end{cases}$

构造等差数列求通项

练15 (★★★★☆)

数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()

- A. $a_n = \frac{1}{2n-1}$ B. $a_n = \frac{2}{n+1}$ C. $a_n = \frac{3}{n+2}$ D. $a_n = \frac{2n}{n+1}$

练16 (★★★★☆)

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $na_{n+1} = (n+1)a_n + n(n+1)$, 则 $a_n =$ _____.

构造等比数列求通项

练17 (★★★★☆)

在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$ ($n \geq 1$), 则该数列的通项 $a_n =$ _____.

练18 (★★★★☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ($n \geq 2$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$), 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()

- A. $a_n = \frac{3^n}{n+2}$ B. $a_n = \frac{n+2}{3^n}$ C. $a_n = n+2$ D. $a_n = (n+2)3^n$

提能力 本模块适合90-120分水平学生(满分150分)。

构造等差数列求通项

练19 (★★★★☆☆)

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, 若 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$, 则 a_{16} 等于()

- A. 224 B. 225 C. 226 D. 227

练20 (★★★★☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{3}$, 若 $a_n(a_{n-1} + 2a_{n+1}) = 3a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ ($n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}^*$), 则数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n =$ ()

- A. $\frac{1}{2^{n-1}}$ B. $\frac{1}{2^n - 1}$ C. $\frac{1}{3^{n-1}}$ D. $\frac{1}{2^{n-1} + 1}$

构造等比数列求通项

练21 (★★★★☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 3$, $a_n = 2a_{n-1} + n - 2$ ($n \geq 2$), 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为()

- A. $a_n = 2^{n+1} - n - 1$ B. $a_n = 2^{n+1} - n$ C. $a_n = 2^n - n - 1$ D. $a_n = 2^n - n$

练22 (★★★★☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}$, ($n \in \mathbf{N}^*$). 若 $b_n = \log_2\left(\frac{1}{a_n} + 1\right)$, 则数列 $\{b_n\}$ 的通项公式是()

- A. $b_n = \frac{1}{2}n$ B. $b_n = n - 1$ C. $b_n = n$ D. $b_n = 2n$

练23 (★★★★☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $4a_{n+1} = 3a_n - b_n + 4$, $4b_{n+1} = 3b_n - a_n - 4$.

(1) 证明: $\{a_n + b_n\}$ 是等比数列, $\{a_n - b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

a_n 与 S_n 互化求通项

练24 (★★☆☆☆)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_n = 2a_n + 1$, 则 $S_6 =$ _____.

练25 (★★★★☆☆)

S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = -1$, $a_{n+1} = S_n S_{n+1}$, $S_n =$ _____.

练26 (★★★★☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 是一个公差大于0的等差数列, 且满足 $a_3 a_6 = 55$, $a_2 + a_7 = 16$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$ 满足等式 $a_n = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \cdots + \frac{b_n}{2^n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和 S_n .

第 3 讲

数列求和



本书所有选择题均为单选题，有且只有一个选项是正确的。

夯基础 本模块适合30-60分水平学生（满分150分）。

利用等差等比基本公式求和

练1 (★★☆☆☆)

我国古代数学家杨辉，朱世杰等研究过高阶等差数列的求和问题，如数列 $\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}$ 就是二阶等差数列。数列 $\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的前3项和是_____。

练2 (★★★★☆☆)

设 $\{a_n\}$ 是等差数列，若 $a_2 = 3$ ， $a_7 = 13$ ，则数列 $\{a_n\}$ 前8项的和为 ()

- A. 128 B. 80 C. 64 D. 56

练3 (★☆☆☆☆)

设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_1 = 1$ ，公比 $q = 2$ ，则 S_4 的值为 ()

- A. 15 B. 16 C. 30 D. 31

分组求和

练4 (★★☆☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n = 2^n + n$, 则其前 n 项和 $S_n = (\quad)$

A. $2^{n+1} - 1 + \frac{n(n-1)}{2}$

B. $2^{n+1} - 2 + \frac{n(n+1)}{2}$

C. $2^n + \frac{n(n+1)}{2}$

D. $2^{n+1} - 1 - \frac{n(n-1)}{2}$

错位相减

练5 (★★☆☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = (n+2) \times 3^n$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = (\quad)$

A. $\frac{(3n+9) \cdot 3^n - 9}{4}$

B. $\frac{(6n+9) \cdot 3^n - 9}{4}$

C. $\frac{(6n+3) \cdot 3^n - 3}{4}$

D. $\frac{(9n+9) \cdot 3^n - 9}{4}$

裂项相消

练6 (★★☆☆☆)

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, 则 S_5 等于 $(\quad)$

A. 1

B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{30}$

练7 (★★☆☆☆)

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, 则该数列的前 99 项之和等于 $(\quad)$

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

刷中档 本模块适合60-90分水平学生(满分150分).

利用等差等比基本公式求和

练8 (★★☆☆☆)

等差数列 $\{a_n\}$ 公差为零, 首项 $a_1 = 1$, a_1, a_2, a_5 是等比数列, 则数列 $\{a_n\}$ 的前10项和是()

- A. 90 B. 100 C. 145 D. 190

练9 (★★☆☆☆)

设首项为1, 公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则()

- A. $S_n = 2a_n - 1$ B. $S_n = 3a_n - 2$ C. $S_n = 4 - 3a_n$ D. $S_n = 3 - 2a_n$

分组求和

练10 (★★☆☆☆)

设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$, 则 S_n 的值为()

- A. $2^n - 1$ B. $2^{n-1} - 1$ C. $2^n - n - 2$ D. $2^{n+1} - n - 2$

练11 (★★★☆☆)

数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = (-1)^n n$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018} =$ ()

- A. -1006 B. 1007 C. -1008 D. 1009

练12 (★★★★☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n \cdot \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2}$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = (\quad)$

A. 0

B. -2

C. 2

D. 1

错位相减

练13 (★★★★☆)

设 $\{a_n\}$ 是公比不为1的等比数列, a_1 为 a_2, a_3 的等差中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比.

(2) 若 $a_1 = 1$, 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

裂项相消

练14 (★★★★☆)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_5 = 5$, $S_5 = 15$, 则数列 $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前100项和为()

A. $\frac{100}{101}$

B. $\frac{99}{101}$

C. $\frac{99}{100}$

D. $\frac{101}{100}$

练15 (★★☆☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = \lg \frac{n+1}{n}$, 若其前 m 项和 $S_m = 2$, 则 $m =$ ()

- A. 98 B. 99 C. 100 D. 101

练16 (★★★★☆)

在各项都为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 2$, 且 $a_1 \cdot a_5 = 64$, 则数列 $\left\{ \frac{a_n}{(a_n - 1)(a_{n+1} - 1)} \right\}$ 的前 n 项和是 ()

- A. $1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1}$ B. $1 - \frac{1}{2^{n+1} + 1}$ C. $1 - \frac{1}{2^n + 1}$ D. $1 - \frac{1}{2^n - 1}$

提能力 本模块适合90–120分水平学生 (满分150分) .

利用等差等比基本公式求和

练17 (★★☆☆☆)

设 $f(n) = 2 + 2^4 + 2^7 + 2^{10} + \cdots + 2^{3n+10}$ ($n \in \mathbf{N}$), 则 $f(n)$ 等于 ()

- A. $\frac{2}{7}(8^n - 1)$ B. $\frac{2}{7}(8^{n+1} - 1)$ C. $\frac{2}{7}(8^{n+3} - 1)$ D. $\frac{2}{7}(8^{n+4} - 1)$

练18 (★★★★☆)

将数列 $\{2n - 1\}$ 与 $\{3n - 2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为_____.

练19 (★★★★☆)

已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是公差为1的等差数列, 其首项分别为 a_1 , b_1 , 且 $a_1 + b_1 = 5$, $a_1, b_1 \in \mathbf{N}^*$, 设 $c_n = a_{b_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则数列 $\{c_n\}$ 的前10项和等于 ()

- A. 55 B. 70 C. 85 D. 100

倒序相加求和

练20 (★★☆☆)

设 $f(x) = \frac{1}{3^x + \sqrt{3}}$ ，利用课本中推导等差数列前 n 项和公式的方法，可求得

$$f(-12) + f(-11) + f(-10) + \cdots + f(0) + \cdots + f(11) + f(12) + f(13) = (\quad)$$

- A. $\sqrt{3}$ B. $13\sqrt{3}$ C. $\frac{28}{3}\sqrt{3}$ D. $\frac{13}{3}\sqrt{3}$

分组求和

练21 (★★☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \begin{cases} 2a_n, n \text{ 为奇数} \\ a_n + 3, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $S_{2n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

练22 (★★☆☆)

设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 7$, 则 $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{15}| = (\quad)$

- A. 153 B. 210 C. 135 D. 120

练23 (★★☆☆)

已知公比大于1的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 = 20$, $a_3 = 8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0, m]$ ($m \in \mathbf{N}^*$) 中的项的个数, 求数列 $\{b_m\}$ 的前100项和 S_{100} .

错位相减

练24 (★★☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为1, 公差为2的等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足关系: $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} = 1 - \frac{1}{2^n}$, 数列

$\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 S_5 的值为 ()

- A. 454 B. 450 C. 446 D. 442

裂项相消

练25 (★★★☆☆)

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3 = 3$, $S_4 = 10$, 则 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} = \underline{\hspace{2cm}}$.

练26 (★★★☆☆)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 前 n 项和为 S_n , 且 S_1 , S_2 , S_4 成等比数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 令 $b_n = (-1)^{n-1} \frac{4n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

第4讲

基础检测卷-数列

本试卷共10个题目，选择5个，填空3个，解答2个，均为基础水平题目。限时30分钟。得分在70分以上视为合格，可以去做【刷中档】模块题目，冲刺更高的水平。

一、单选题，共5题，每题10分.

练1 (★★☆☆☆)

记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_2 = 4$ ， $S_4 = 20$ ，则该数列的公差 $d = (\quad)$

- A. 2 B. 3 C. 6 D. 7

练2 (★★☆☆☆)

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = \frac{1}{3}$ ， $a_2 + a_5 = 4$ ， $a_n = 33$ ，则 n 为()

- A. 48 B. 49 C. 50 D. 51

练3 (★★☆☆☆)

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = 2$ ，前 n 项和为 S_n ，则 $\frac{S_4}{a_2} = (\quad)$

- A. 2 B. 4 C. $\frac{15}{2}$ D. $\frac{17}{2}$

练4 (★★★★☆)

设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $\frac{a_5}{a_3} = \frac{5}{9}$ ，则 $\frac{S_9}{S_5} = (\quad)$

- A. 1 B. -1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

练5 (★★★☆☆)

设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, S_n 为其前 n 项和, 已知 $a_2 a_4 = 1$, $S_3 = 7$, 则 S_5 等于 ()

- A. $\frac{15}{2}$ B. $\frac{31}{4}$ C. $\frac{33}{4}$ D. $\frac{17}{2}$

二、填空题, 共3题, 每题10分.

练6 (★★★☆☆)

数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{4n-3} = 1$, $a_{4n-1} = 0$, $a_{2n} = a_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $a_{2009} =$ _____; $a_{2014} =$ _____.

练7 (★★★☆☆)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前9项和等于前4项和. 若 $a_1 = 1$, $a_k + a_4 = 0$, 则 $k =$ _____.

练8 (★★★☆☆)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为0, 且 a_1, a_2, a_4 成等比数列, 则 $\frac{a_1}{d}$ 的值为_____.

三、解答题, 共2题, 每题10分.

练9 (★★★☆☆)

记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = -7$, $S_3 = -15$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 S_n , 并求 S_n 的最小值.

练10 (★★★☆☆)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零, $a_1 = 25$, 且 a_1, a_{11}, a_{13} 成等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $a_1 + a_4 + a_7 + \cdots + a_{3n-2}$.

第 5 讲

中档检测卷-数列

本试卷共10个题目，选择5个，填空3个，解答2个，均为中档水平题目。限时30分钟。得分在70分以上视为合格，可以去做【提能力】模块题目，冲刺更高的水平。

一、单选题，共5题，每题10分.

练1 (★★☆☆☆)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 + a_8 = 8$ ，则该数列前9项和 S_9 等于()

- A. 18 B. 27 C. 36 D. 45

练2 (★★☆☆☆)

设 $\{a_n\}$ 是等比数列，下列结论中正确的是()

- A. 若 $a_1 + a_2 > 0$ ，则 $a_2 + a_3 > 0$ B. 若 $a_1 + a_3 < 0$ ，则 $a_1 + a_2 < 0$
C. 若 $0 < a_1 < a_2$ ，则 $2a_2 < a_1 + a_3$ D. 若 $a_1 < 0$ ，则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$

练3 (★★★☆☆)

已知某等差数列共有10项，其奇数项之和为15，偶数项之和为30，则其公差为()

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

练4 (★★☆☆☆)

在等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_{10} = 3$ ，则 $a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 = ()$

- A. 81 B. $3\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. 243

练5 (★★★☆☆)

若互不相等的实数 a, b, c 成等差数列, c, a, b 成等比数列, 且 $a + 3b + c = 10$, 则 $a =$ ()

- A. 4 B. 2 C. -2 D. -4

二、填空题, 共3题, 每题10分.

练6 (★★★☆☆) (2019·黑龙江哈尔滨市期中)

若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 + a_8 + a_9 > 0$, $a_7 + a_{10} < 0$, 则当 $n =$ _____ 时, $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大.

练7 (★★★☆☆)

设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 已知 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - n + 2^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则 $d + q$ 的值是 _____.

练8 (★★★☆☆)

若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n =$ _____.

三、解答题, 共2题, 每题10分.

练9 (★★★☆☆)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 令 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 证明: $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

练10 (★★★☆☆)

S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_n > 0$, $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

参考答案与解析

第1讲 等差等比的运算及性质

练1

答案: A

解答:

由 $n(n-1) = 56$ 可解得, $n = 8$ 或 $n = -7$

$\therefore 56$ 是数列 $\{n(n-1)\}$ 中的第8项

故选: A.

练2

答案: A

解答:

由数列 $7, 9, 11, \dots, 2n-1$

可得 $7 = 2 \times 4 - 1, 9 = 2 \times 5 - 1, 11 = 2 \times 6 - 1, \dots, 2 \times n - 1$

$\therefore$ 此数列的项数是 $n-3$

故选: A.

练3

答案: C

解答:

观察可得各式的值构成数列 $1, 3, 4, 7, 11, \dots$, 其规律为从第三项起, 每项等于其前相邻两项的和, 所求值为数列中的第十项

继续写出此数列为 $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \dots$, 第十项为 123 , 即 $a^{10} + b^{10} = 123$

故选: C.

练4

答案: $\frac{27}{8}$

解答:

$$a_1 + a_{10} = a_9 \Rightarrow a_1 = -d$$

$$\therefore \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_9}{a_{10}} = \frac{9a_5}{a_{10}} = \frac{27d}{8d} = \frac{27}{8}$$

故答案为: $\frac{27}{8}$.

练5

答案: A

解答:

$\because \triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 成等差数列

$$\therefore \begin{cases} 2B = A + C \\ A + B + C = 180^\circ \end{cases}$$

$$\therefore 3B = 180^\circ$$

$$\therefore B = 60^\circ$$

故选: A.

练6

答案: A

解答:

设公差为 d

$$\text{由题意可得, } \begin{cases} S_4 = 4a_1 + 6d = 0 \\ a_5 = a_1 + 4d = 5 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} d = 2 \\ a_1 = -3 \end{cases}$$

$$\text{所以 } S_n = n^2 - 4n, \quad a_n = 2n - 5$$

故选: A.

练7

答案: A

解答:

由于 $x, 3x+3, 6x+6$ 是等比数列的前三项, 故有 $(3x+3)^2 = x(6x+6)$, 解 $x = -3$

故此等比数列的前三项分别为 $-3, -6, -12$, 故此等比数列的公比为 2, 故第四项为 -24

故选: A.

练8

答案: C

解答:

设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, q ($q > 0$) 为公比

由题意有 $S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 15$

又因为 $a_5 = 3a_3 + 4a_1$, 即 $a_1q^4 = 3a_1q^2 + 4a_1$

消去 a_1 可得, $q^4 = 3q^2 + 4$, 即 $(q^2 - 4)(q^2 + 1) = 0$

解得 $q^2 = 4$ (负值舍)

由 $q > 0$ 可得 $q = 2$

将 $q = 2$ 代入 $S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 15$, 得 $a_1 = 1$

所以 $a_3 = a_1q^2 = 4$

故选: C.

练9

答案: C

解答:

因为 $a_5 = a_1q^4$, 即 $q^4 = 16$

又 $q > 0$

所以 $q = 2$

所以 $S_7 = \frac{1-2^7}{1-2} = 127$

故选: C.

练10

答案: 4

解答:

设公差为 d

因为 $a_2 = 3a_1$

所以 $a_1 + d = 3a_1$, 即 $2a_1 = d$, 则 $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10 \times \frac{1}{2}}{(a_1 + a_5) \cdot 5 \times \frac{1}{2}} = \frac{(a_1 + a_1 + 9d) \cdot 10 \times \frac{1}{2}}{(a_1 + a_1 + 4d) \cdot 5 \times \frac{1}{2}} = \frac{(20a_1) \cdot 10 \times \frac{1}{2}}{(10a_1) \cdot 5 \times \frac{1}{2}} = 4$

故答案为: 4.

练11

答案: 35

解答:

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是等差数列

$\therefore$ 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d_1 , 设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d_2

$\therefore a_3 + b_3 = a_1 + b_1 + 2(d_1 + d_2) = 21$

而 $a_1 + b_1 = 7$, 可得 $2(d_1 + d_2) = 21 - 7 = 14$

$$\therefore a_5 + b_5 = a_3 + b_3 + 2(d_1 + d_2) = 21 + 14 = 35$$

故答案为: 35.

练12

答案: D

解答:

根据 $a_1 = 1$, 公差 $d = 2$, 可得 $S_n = n^2$

$$\therefore S_{k+2} = (k+2)^2, S_k = k^2$$

$$\therefore S_{k+2} - S_k = 24 \text{ 转化为: } (k+2)^2 - k^2 = 24$$

$$\therefore k = 5$$

故选: D.

练13

答案: D

解答:

设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , $q \neq 0$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 = 1, a_2 + a_3 + a_4 = 2$$

$$\therefore q = \frac{a_2 + a_3 + a_4}{a_1 + a_2 + a_3} = 2$$

$$\therefore a_6 + a_7 + a_8 = (a_1 + a_2 + a_3) \times q^5 = 2^5 = 32$$

故选: D.

练14

答案: B

解答:

设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , $q \neq 0$, 则 $q = \frac{a_6 - a_4}{a_5 - a_3} = 2$

所以 $a_5 - a_3 = 16a_1 - 4a_1 = 12$, 解得 $a_1 = 1$

$$\text{所以 } a_n = 2^{n-1}, S_n = 2^n - 1$$

$$\text{所以 } \frac{S_n}{a_n} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2 - 2^{1-n}$$

故选: B.

练15

答案: 6

解答:

$$\because a_{n+1} = 2a_n,$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2,$$

$$\because a_1 = 2,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列,

$$\therefore S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2 = 126,$$

$$\therefore 2^{n+1} = 128,$$

$$\therefore n+1 = 7,$$

$$\therefore n = 6.$$

故答案为: 6.

练16

答案: 1

解答:

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d

因为 $a_1 + 1$, $a_3 + 3$, $a_5 + 5$ 构成等比数列

$$\text{所以 } (a_3 + 3)^2 = (a_1 + 1)(a_5 + 5)$$

$$\text{整理得 } a_3^2 + 6a_3 + 4 = a_1a_5 + 5a_1 + a_5$$

$$\text{即 } (a_1 + 2d)^2 + 6(a_1 + 2d) + 4 = a_1(a_1 + 4d) + 5a_1 + a_1 + 4d$$

$$\text{化简得 } (d+1)^2 = 0, \text{ 即 } d = -1$$

$$\therefore q = \frac{a_3 + 3}{a_1 + 1} = \frac{a_1 + 2d + 3}{a_1 + 1} = \frac{a_1 + 2 \times (-1) + 3}{a_1 + 1} = \frac{a_1 + 1}{a_1 + 1} = 1$$

故答案为: 1.

练17

答案: D

解答:

由题意知, $f(n)$ 是首项为 2, 公比为 8 的等比数列的前 $n+4$ 项和

$$\text{所以 } f(n) = \frac{2(1-8^{n+4})}{1-8} = \frac{2}{7}(8^{n+4} - 1)$$

故选: D.

练18

答案: B

解答：

A. $a_2 + a_6 = a_4 - 2d + a_4 + 2d = 2a_4$ ，故A成立，排除A

B. 由已知得 $b_2 = S_4 - S_2 = a_3 + a_4$

$$b_4 = S_8 - S_6 = a_7 + a_8$$

$$b_6 = S_{12} - S_{10} = a_{11} + a_{12}$$

$$\text{由 } 2(a_7 + a_8) = a_3 + a_4 + a_{11} + a_{12} = 4a_1 + 26d$$

$$\text{可得 } 2b_4 = b_2 + b_6$$

所以B成立

C. 由 $a_4^2 = a_2 a_8$ 得： $(a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 7d)$

$$\text{化简整理得： } d^2 = a_1 d$$

$$\because d \neq 0$$

$$\therefore a_1 = d, \text{ 故C可能成立，排除C}$$

$$\text{D. } b_8 = S_{16} - S_{14} = a_{15} + a_{16}$$

$$\text{则由 } b_4^2 = b_2 b_8 \text{ 得： } (a_7 + a_8)^2 = (a_3 + a_4)(a_{15} + a_{16})$$

$$\text{即 } (2a_1 + 13d)^2 = (2a_1 + 5d) \cdot (2a_1 + 29d)$$

$$\text{化简整理，得： } 24d^2 = 16a_1 d$$

$$\because d \neq 0$$

$$\therefore \frac{a_1}{d} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} > 1$$

$\therefore$ D不可能成立

故选：D.

练19

答案：C

解答：

$$\because a_{m+n} = a_m a_n, \quad a_1 = 2$$

$$\therefore a_{n+1} = a_n \cdot a_1 = 2a_n, \text{ 即 } \{a_n\} \text{ 为等比数列, } a_n = 2^n$$

$$\therefore a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+10} = 2^{k+1} \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2^{11+k} - 2^{k+1}$$

$$\therefore \begin{cases} k+1=5 \\ 11+k=15 \end{cases}, \text{ 解得 } k=4$$

故选：C.

练20

答案：D

解答:

$\therefore$ 数列 $\{2^{a_1 a_n}\}$ 为递减数列

$$\therefore \frac{2^{a_1 a_{n+1}}}{2^{a_1 a_n}} < 1, \text{ 即 } 2^{a_1 a_{n+1} - a_1 a_n} < 1$$

$$\therefore 2^{a_1(a_{n+1} - a_n)} < 1$$

$$\therefore a_1(a_{n+1} - a_n) = a_1 d < 0$$

故选: D.

练21

答案: B

解答:

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d = \frac{a_5 - a_1}{5 - 1} = \frac{-1 + 9}{4} = 2$

所以 $a_n = -9 + 2(n - 1) = 2n - 11$

令 $a_n < 0$, 得 $2n - 11 < 0$, 即 $n < \frac{11}{2}$; 令 $a_n > 0$, 得 $2n - 11 > 0$, 即 $n > \frac{11}{2}$

即数列 $\{a_n\}$ 前 5 项为负数, 从第 6 项起为正数

数列 $\{a_n\}$ 的项为 $-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots$

数列 $\{T_n\}$ 的项为 $-9, 63, -315, 945, -945, -945, -2835, \dots$

即数列 $\{T_n\}$ 第 2 项, 第 4 项为正数, 从第 6 项起递减且均为负数

所以数列 $\{T_n\}$ 有最大项, 无最小项

故选: B.

练22

答案: D

解答:

因为对于公差 $d > 0$ 的等差数列 $\{a_n\}$, $a_{n+1} - a_n = d > 0$

所以 p_1 : 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列成立, 是真命题

对于数列 $\{na_n\}$, $(n+1)a_{n+1} - na_n = (n+1)d + a_n$, 不一定是正实数

故 p_2 是假命题

对于数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$, $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \frac{na_{n+1} - (n+1)a_n}{n(n+1)} = \frac{nd - a_n}{n(n+1)}$, 不一定是正实数

故 p_3 是假命题

对于数列 $\{a_n + 3nd\}$, $a_{n+1} + 3(n+1)d - a_n - 3nd = 4d > 0$

故 p_4 : 数列 $\{a_n + 3nd\}$ 是递增数列成立, 是真命题

故选：D.

练23

答案：C

解答：

A. 当 $d < 0$ 时，如果首项小于等于0，则 S_1 即为最大项，若首项为正，则所有正项的和即为最大项，故A正确

B. 若 $d > 0$ ，数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，数列 $\{S_n\}$ 不可能有最大项，要使前 n 项和有最大项，则必有公差小于0，故B正确

C. 若首项为负，则有 $S_1 < 0$ ，故C错误

D. 若数列 $\{S_n\}$ 为递减数列，即公差小于0，则一定存在某个实数 k ，当 $n > k$ 时，以后所有项均为负项，不能保证对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，均有 $S_n > 0$ ，因此，若要使任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，均有 $S_n > 0$ ，则数列 $\{S_n\}$ 必须是递增数列，故D正确

故选：C.

练24

答案：A

解答：

由题意，可知

$$a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$a_3 = 2a_2 + 2 = 2 \times 1 + 2 = 4$$

$$a_4 = 2a_3 - 1 = 2 \times 4 - 1 = 7$$

故选：A.

练25

答案：B

解答：

设竹子自上而下各节的容积分别为： $a_1, a_2, \dots, a_9$ ，且为等差数列

根据题意得： $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3$ ， $a_7 + a_8 + a_9 = 4$

即 $4a_1 + 6d = 3$ ①， $3a_1 + 21d = 4$ ②，② $\times 4 -$ ① $\times 3$ 得： $66d = 7$ ，解得 $d = \frac{7}{66}$

把 $d = \frac{7}{66}$ 代入①得： $a_1 = \frac{13}{22}$

则 $a_5 = \frac{13}{22} + \frac{7}{66}(5-1) = \frac{67}{66}$

故选：B.

练26

答案：C

解答：

由题意可得上层第一环为9块，设每层的环数为 n

中层第一环石板为 $(9n + 9)$ 块

下层第一环石板为 $(18n + 9)$ 块

因为下层比中层多729块

$$\text{所以 } (18n + 9)n + \frac{n(n-1) \times 9}{2} - \left[(9n + 9)n + \frac{n(n-1)}{2} \times 9 \right] = 729$$

解得 $9n^2 = 729$ ，即 $n = 9$

∴每一层的环数为9

∴三层共有扇面形石板为 $9 \times 27 + \frac{27 \times 26}{2} \times 9 = 3402$ 块

故选：C.

第2讲 数列求通项

练1

答案: A

解答:

$\therefore$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 点 $P_n(n, a_n)$ 都在直线 $y = 2x + 1$ 上

$$\therefore a_n = 2n + 1$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n - a_{n-1} = 2n + 1 - [2(n-1) + 1] = 2$$

因此数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列

故选: A.

练2

答案: D

解答:

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$\begin{aligned} a_n &= 4 \cdot 3^{-n} \\ &= 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad (n \in \mathbf{N}^*) \\ &= \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$\therefore$ 这个数列是一个以 $\frac{4}{3}$ 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列

故选: D.

练3

答案: A

解答:

根据题意, 若 $a_{n+1} - a_n = 2^n$

$$\text{则 } a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

故选: A.

练4

答案: A

解答:

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = n$

所以 $a_2 - a_1 = 1$, $a_3 - a_2 = 2$, $a_4 - a_3 = 3$, $\dots$, $a_n - a_{n-1} = n - 1$

所以 $a_n - a_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)$

计算可得 $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$

故选: A.

练5

答案: D

解答:

因为 $a_n = n(a_{n+1} - a_n)$

所以 $\frac{a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{n+1}$

所以 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是常数列

所以 $\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1} = 1$

所以 $a_n = n$

故选: D.

练6

答案: A

解答:

$\because S_n = 2a_{n+1}$, $a_1 = 1$

$\therefore a_1 = 2a_2$, 解得 $a_2 = \frac{1}{2}$

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_n$

$\therefore a_n = 2a_{n+1} - 2a_n$

化为 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 从第二项起为等比数列, 公比为 $\frac{3}{2}$

$\therefore S_n = 2a_{n+1} = 2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, $n > 1$

故选: A.

练7

答案: C

解答:

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 + n - [2(n-1)^2 + n - 1] = 4n - 1$

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 3 = 4 \times 1 - 1$

所以 $a_n = 4n - 1$

故选：C.

练8

答案：A

解答：

$\because \{b_n\}$ 是以2为首项，以2为公比的等比数列

$$\therefore b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$\text{即 } b_n = a_{n+1} - a_n = 2^n$$

$$\text{则 } a_2 - a_1 = 2^1$$

$$a_3 - a_2 = 2^2$$

$$a_4 - a_3 = 2^3$$

...

$$a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\text{等式两边同时相加得, } a_n - a_1 = \frac{2 \cdot (1 - 2^{n-1})}{1 - 2} = 2^n - 2$$

$$\text{即 } a_n = 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1$$

故选：A.

练9

答案：A

解答：

$$\therefore a_2 = a_1 + \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right)$$

$$a_3 = a_2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

...

$$\therefore a_n = a_{n-1} + \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$$

$$= a_1 + \ln\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right) \cdots \left(\frac{n}{n-1}\right) = 2 + \ln n$$

故选：A.

练10

答案：C

解答：

$$\text{由 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}, a_1 = 2$$

$$\text{得 } \frac{a_{2018}}{a_{2017}} \cdot \frac{a_{2017}}{a_{2016}} \cdot \frac{a_{2016}}{a_{2015}} \cdots \frac{a_2}{a_1} = \frac{2018}{2017} \times \frac{2017}{2016} \times \frac{2016}{2015} \times \cdots \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1}$$

$$\text{所以 } a_{2018} = a_1 \times 2018 = 4036$$

故选: C.

练11

答案: C

解答:

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \cdots \times \frac{a_2}{a_1} \times a_1 = \frac{n+2}{n} \times \frac{n+1}{n-1} \times \frac{n}{n-2} \times \cdots \times \frac{4}{2} \times 2 = \frac{(n+1)(n+2)}{3}$$

故选: C.

练12

答案: C

解答:

$$\because \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = 1, \sqrt{a_1} = 1$$

所以数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是以 1 为首项, 以 1 为公差的等差数列

$$\therefore \sqrt{a_n} = n$$

$$\therefore a_n = n^2$$

$$a_{10} = 100$$

故选: C.

练13

答案: D

解答:

由题意可得, $2, S_n, 3a_n$ 成等差数列

$$\text{则 } 2S_n = 3a_n + 2 \text{ ①}$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 2S_{n-1} = 3a_{n-1} + 2 \text{ ②}$$

$$\text{两式相减可得, } 2a_n = 3a_n - 3a_{n-1}, \text{ 即 } a_n = 3a_{n-1}$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } 2a_1 = 3a_1 + 2, \text{ 解得 } a_1 = -2$$

$$\text{当 } n = 2 \text{ 时, } 2(a_1 + a_2) = 3a_2 + 2, \text{ 即 } 2(a_2 - 2) = 3a_2 + 2, \text{ 解得 } a_2 = -6$$

$$a_2 = 3a_1$$

则数列 $\{a_n\}$ 是以 -2 为首项, 3 为公比的等比数列

$$\text{则 } S_5 = \frac{-2 \times (1 - 3^5)}{1 - 3} = -242$$

故选：D.

练14

答案：C

解答：

∵函数 $\{a_n\}$ 的前 n 项和满足 $S_n = 2^{n+1} - 1$

$$\therefore a_1 = S_1 = 2^2 - 1 = 3$$

$$n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$$

$$\therefore \text{数列}\{a_n\}\text{的通项公式为 } a_n = \begin{cases} 3, n=1 \\ 2^n, n \geq 2 \end{cases}$$

故选：C.

练15

答案：B

解答：

解法1

$$\text{数列}\{a_n\}\text{中, } a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}, \text{ 取倒得 } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}$$

因为 $a_1 = 1$

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为1, 公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列

$$\text{所以 } \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{2} \times (n-1) = \frac{n+1}{2}, \text{ 即 } a_n = \frac{2}{n+1}$$

故选：B.

解法2

$$\text{数列}\{a_n\}\text{的递归函数为 } f(x) = \frac{2x}{x+2}$$

不动点为 $x_1 = x_2 = 0$

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1 - 0} = 1$, 公差为 $\frac{2 \times 1}{2 + 2} = \frac{1}{2}$ 的等差数列

$$\text{所以 } \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{2} \times (n-1) = \frac{n+1}{2}, \text{ 即 } a_n = \frac{2}{n+1}$$

故选：B.

练16

答案： n^2

解答：

$$\because na_{n+1} = (n+1)a_n + n(n+1)$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1$$

$\therefore \left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$ 是以 1 为公差的等差数列

$$\text{又} \therefore \frac{a_1}{1} = 1$$

$$\therefore \frac{a_n}{n} = n$$

$$\therefore a_n = n^2$$

故答案为: n^2 .

练17

答案: $2^{n+1} - 3$

解答:

在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$ ($n \geq 1$)

$$\therefore a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3) \quad (n \geq 1)$$

即 $\{a_n + 3\}$ 是以 4 为首项, 2 为公比的等比数列

$$\therefore a_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

所以该数列的通项 $a_n = 2^{n+1} - 3$

故答案为: $2^{n+1} - 3$.

练18

答案: B

解答:

$$\because a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (n \geq 2, \text{且 } n \in \mathbf{N}^*)$$

$$\therefore \frac{a_n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{a_{n-1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} + 1$$

令 $b_n = \frac{a_n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$, 则数列 $\{b_n\}$ 为首项 $b_1 = \frac{a_1}{\frac{1}{3}} = 3a_1 = 3$, 公差为 1 的等差数列

$$\therefore b_n = b_1 + (n-1) \times 1 = 3 + n - 1 = n + 2, \text{ 故 } a_n = \frac{n+2}{3^n}$$

故选: B.

练19

答案: C

解答:

$$\because a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$$

$$\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 2$$

$$\text{设 } b_n = a_{n+1} - a_n$$

$$\therefore b_{n+1} = b_n + 2, \quad b_1 = a_2 - a_1 = 1$$

$\therefore \{b_n\}$ 是首项为1, 公差为2的等差数列

$$\therefore b_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 2n - 1$$

$$\therefore a_2 - a_1 = 1, \quad a_3 - a_2 = 3, \quad \dots, \quad a_{16} - a_{15} = 29$$

$$\therefore a_{16} - a_1 = 1 + 3 + 5 + \dots + 29 = \frac{15 \times (1 + 29)}{2} = 225$$

$$\therefore a_{16} = 225 + a_1 = 225 + 1 = 226$$

故选: C.

练20

答案: B

解答:

由 $a_n(a_{n-1} + 2a_{n+1}) = 3a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$) 且 $a_n \neq 0$

$$\text{可得 } \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2 \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \right)$$

$$\therefore \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = 3 - 1 = 2$$

$\therefore$ 数列 $\left\{ \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right\}$ 是以2为首项, 2为公比的等比数列

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2^n$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \right) + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) + \frac{1}{a_1} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2^n - 1}$$

故选: B.

练21

答案: B

解答:

$$\therefore a_n + n = 2a_{n-1} + 2n - 2 = 2(a_{n-1} + n - 1), \quad a_1 + 1 = 4$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n + n\}$ 是首项为4, 公比为2的等比数列

$$\therefore a_n + n = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}, \quad \text{即 } a_n = 2^{n+1} - n$$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n+1} - n$

故选: B.

练22

答案: C

解答:

解法1

$$\text{由 } a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2} \text{ 得 } \frac{1}{a_{n+1}} = 1 + \frac{2}{a_n}$$

$$\text{所以 } \frac{1}{a_{n+1}} + 1 = 2 \left(\frac{1}{a_n} + 1 \right)$$

故 $\left\{ \frac{1}{a_n} + 1 \right\}$ 是等比数列, 公比为 2

$$\frac{1}{a_n} + 1 = 2^{n-1} \left(\frac{1}{a_1} + 1 \right) = 2^n$$

$$b_n = \log_2 \left(\frac{1}{a_n} + 1 \right) = \log_2 2^n = n$$

故选: C.

解法2

数列 $\{a_n\}$ 的递归函数为 $f(x) = \frac{x}{x+2}$

不动点为 $x_1 = 0, x_2 = -1$

$\therefore$ 数列 $\left\{ \frac{a_n}{a_n + 1} \right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{a_1 + 1} = \frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{1 \times (-1) + 2}{2} = \frac{1}{2}$ 的等比数列

$$\therefore \frac{a_n}{a_n + 1} = \frac{1}{2^n}$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = 2^n - 1$$

$$b_n = \log_2 \left(\frac{1}{a_n} + 1 \right) = \log_2 2^n = n$$

故选: C.

练23

解答:

$$(1) \text{ 由题设得 } 4(a_{n+1} + b_{n+1}) = 2(a_n + b_n)$$

$$\text{即 } a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

$$\text{又因为 } a_1 + b_1 = 1$$

所以 $\{a_n + b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列

$$\text{由题设得 } 4(a_{n+1} - b_{n+1}) = 4(a_n - b_n) + 8$$

$$\text{即 } a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n + 2$$

$$\text{又因为 } a_1 - b_1 = 1$$

所以 $\{a_n - b_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列

(2) 由 (1) 知, $a_n + b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, $a_n - b_n = 2n - 1$

所以 $a_n = \frac{1}{2}[(a_n + b_n) + (a_n - b_n)] = \frac{1}{2^n} + n - \frac{1}{2}$

$b_n = \frac{1}{2}[(a_n + b_n) - (a_n - b_n)] = \frac{1}{2^n} - n + \frac{1}{2}$

练24

答案: -63

解答:

S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_n = 2a_n + 1$ ①

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 2a_1 + 1$, 解得 $a_1 = -1$

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$ ②

由 ① - ② 可得 $a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$

$\therefore a_n = 2a_{n-1}$

$\therefore \{a_n\}$ 是以 -1 为首项, 以 2 为公比的等比数列

$\therefore S_6 = \frac{-1 \times (1 - 2^6)}{1 - 2} = -63$

故答案为: -63.

练25

答案: $-\frac{1}{n}$

解答:

由已知可得 $a_{n+1} = S_n \cdot S_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, 即 $\frac{1}{S_{n+1}} - \frac{1}{S_n} = -1$, 又 $\frac{1}{S_1} = \frac{1}{a_1} = -1$

故数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是公差为 -1, 首项为 -1 的等差数列

则 $\frac{1}{S_n} = -1 + (n-1) \times (-1)$

即 $S_n = -\frac{1}{n}$

故答案为: $-\frac{1}{n}$.

练26

解答:

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d

依题意可知 $d > 0$

由 $a_2 + a_7 = 16$, 得 $2a_1 + 7d = 16$ ①

由 $a_3 a_6 = 55$, 得 $(a_1 + 2d)(a_1 + 5d) = 55$ ②

由 ① ② 联立求得

$d = 2, a_1 = 1$ 或 $d = -2, a_1 = 15$ (排除)

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$$

(2) 令 $c_n = \frac{b_n}{2^n}$, 则有 $a_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, $a_{n+1} = c_1 + c_2 + \cdots + c_{n+1}$

两式相减得 $a_{n+1} - a_n = c_{n+1}$, 由 (1) 得 $a_{n+1} - a_n = 2$

$\therefore c_{n+1} = 2$, 即 $c_n = 2$ ($n \geq 2$)

即当 $n \geq 2$ 时, $b_n = 2^{n+1}$, 又当 $n = 1$ 时, $b_1 = 2a_1 = 2$

$$\therefore b_n = \begin{cases} 2, n = 1 \\ 2^{n+1}, n \geq 2 \end{cases}$$

于是 $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$

$$= 2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1}$$

$$= 2^{n+2} - 6, n \geq 2$$

$$S_n = \begin{cases} 2, n = 1 \\ 2^{n+2} - 6, n \geq 2 \end{cases}$$

第3讲 数列求和

练1

答案：10

解答：

$$\because a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1 \times (1+1)}{2} + \frac{2 \times (2+1)}{2} + \frac{3 \times (3+1)}{2} = 1 + 3 + 6 = 10$$

故答案为：10.

练2

答案：C

解答：

解法1：设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d

由等差数列的通项公式以及已知条件得 $\begin{cases} a_1 + d = 3 \\ a_1 + 6d = 13 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$

$$\text{故 } S_8 = 8 + \frac{8 \times 7}{2} \times 2 = 64$$

解法2： $\because a_2 + a_7 = a_1 + a_8 = 16$

$$\therefore S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \times 8 = 64$$

故选：C.

练3

答案：A

解答：

$\because$ 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$ ，公比 $q = 2$

$$\therefore S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{1-16}{1-2} = 15$$

故选：A.

练4

答案：B

解答:

$$\because a_n = 2^n + n$$

$$\therefore \text{其前 } n \text{ 项和 } S_n = (2 + 2^2 + \cdots + 2^n) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$= \frac{2(1-2^n)}{1-2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 2^{n+1} - 2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

故选: B.

练5

答案: B

解答:

$$S_n = 3 \times 3^1 + 4 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots + (n+2) \cdot 3^n, \therefore 3S_n = 3 \times 3^2 + 4 \times 3^3 + 5 \times 3^4 + \cdots + (n+2) \cdot 3^{n+1},$$

$$\therefore -2S_n = 9 + (3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) - (n+2) \cdot 3^{n+1}, \text{ 故 } S_n = \frac{(6n+9) \cdot 3^n - 9}{4}.$$

故选: B.

练6

答案: B

解答:

$$\because a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

故选: B.

练7

答案: C

解答:

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n

$$\because a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\therefore \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$$

$$\therefore S_{99} = 10 - 1 = 9$$

故选: C.

练8

答案: B

解答:

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d \neq 0$

$\because a_1, a_2, a_5$ 成等比数列

$$\therefore a_2^2 = a_1 a_5$$

又 $\because$ 首项 $a_1 = 1$

$$\therefore (1+d)^2 = 1 \times (1+4d), \text{ 即 } d(d-2) = 0$$

$$\because d \neq 0$$

$$\therefore d = 2$$

$$\therefore S_{10} = 10 \times 1 + \frac{10 \times 9}{2} \times 2 = 100$$

故选: B.

练9

答案: D

解答:

$$\text{由题意可得 } a_n = 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore S_n = \frac{1 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1 - \frac{2}{3}} = 3 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 3 - 2a_n$$

故选: D.

练10

答案: D

解答:

$$a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

则

$$\begin{aligned} S_n &= (2-1) + (2^2-1) + \cdots + (2^n-1) \\ &= (2+2^2+\cdots+2^n) - n \\ &= \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n \\ &= 2^{n+1} - 2 - n \end{aligned}$$

故选: D.

练11

答案: D

解答:

由题意可得

$$\begin{aligned}
 & a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018} \\
 &= -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \cdots - 2017 + 2018 \\
 &= (-1 + 2) + (-3 + 4) + (-5 + 6) + \cdots + (-2017 + 2018) \\
 &= 1009
 \end{aligned}$$

故选: D.

练12

答案: A

解答:

$$\begin{aligned}
 & a_n = n \cdot \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2} \\
 & \therefore a_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad a_2 = 0 + \frac{1}{2}, \quad a_3 = -3 + \frac{1}{2}, \quad a_4 = 0 + \frac{1}{2} \\
 & a_5 = 5 + \frac{1}{2}, \quad a_6 = 0 + \frac{1}{2}, \quad a_7 = -7 + \frac{1}{2}, \quad a_8 = 0 + \frac{1}{2}, \quad \cdots \\
 & \therefore a_{4n-3} + a_{4n-2} + a_{4n-1} + a_{4n} = 0 \\
 & \therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 0 \times 25 = 0
 \end{aligned}$$

故选: A.

练13

解答:

(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , $q \neq 0, 1$ 则 $a_n = a_1 q^{n-1}$, $n \in \mathbf{N}^*$ 由题意得: $a_2 + a_3 = 2a_1$ 即 $a_1 q + a_1 q^2 = 2a_1$ 由 $a_1 \neq 0$, 得 $q^2 + q - 2 = 0$ 解得 $q = 1$ (舍) 或 -2 故 $\{a_n\}$ 的公比为 -2 (2) 设数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和为 T_n 由上一问得 $a_n = (-2)^{n-1}$

$$T_n = 1 \times (-2)^0 + 2 \times (-2)^1 + \cdots + n \cdot (-2)^{n-1} \quad ①$$

$$-2T_n = 1 \times (-2)^1 + 2 \times (-2)^2 + \cdots + n \cdot (-2)^n \quad ②$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } 3T_n = (-2)^0 + (-2)^1 + \cdots + (-2)^{n-1} - n \cdot (-2)^n$$

$$\text{即 } 3T_n = \frac{1 - (-2)^n}{3} - n \cdot (-2)^n$$

$$\text{又即 } T_n = \frac{1}{9} - \frac{3n+1}{9}(-2)^n$$

$$\text{综上, 数列 } \{na_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } \frac{1}{9} - \frac{3n+1}{9}(-2)^n$$

练14

答案: A

解答:

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d

$$\text{由题意可得 } \begin{cases} a_5 = a_1 + 4d = 5 \\ S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 15 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 + (n-1)d = n$$

$$\text{所以 } \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

所以数列 $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 100 项的和为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{100} a_{101}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} \\ &= 1 - \frac{1}{101} \\ &= \frac{100}{101} \end{aligned}$$

故选: A.

练15

答案: B

解答:

$$\begin{aligned} S_m &= \lg \frac{2}{1} + \lg \frac{3}{2} + \lg \frac{4}{3} + \cdots + \lg \frac{m+1}{m} \\ &= \lg 2 - \lg 1 + \lg 3 - \lg 2 + \lg 4 - \lg 3 + \cdots + \lg(m+1) - \lg m \\ &= \lg(m+1) - \lg 1 \\ &= \lg(m+1) \end{aligned}$$

$$\text{则 } \lg(m+1) = 2, \text{ 得 } m = 99$$

故选: B.

练16

答案: A

解答:

设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$)

若 $a_1 = 2$, 且 $a_1 \cdot a_5 = 64$

则 $4q^4 = 64$, 解得 $q = 2$

则 $a_n = 2^n$

可得数列 $\left\{ \frac{a_n}{(a_n - 1)(a_{n+1} - 1)} \right\}$, 即为 $\left\{ \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} \right\}$

可得 $\frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}$

数列 $\left\{ \frac{a_n}{(a_n - 1)(a_{n+1} - 1)} \right\}$ 的前 n 项和是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^3-1} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1} \end{aligned}$$

故选: A.

练17

答案: D

解答:

由题意知, $f(n)$ 是首项为 2, 公比为 8 的等比数列的前 $n+4$ 项和

$$\text{所以 } f(n) = \frac{2(1-8^{n+4})}{1-8} = \frac{2}{7}(8^{n+4}-1)$$

故选: D.

练18

答案: $3n^2 - 2n$

解答:

令 $2n-1 = 3m-2$ (m, n 均为正整数), 可得 $n = \frac{3m-1}{2} = m + \frac{m-1}{2}$

易知, 当 $m-1$ 为非负偶数时, n 恒为正整数

所以 $m-1 = 2(k-1)$, k 为正整数, 即 $m = 2k-1$, k 为正整数

所以公共项构成的数列为 $\{3(2k-1)-2\}$, k 为正整数, 即 $\{6k-5\}$, k 为正整数

所以 $a_n = 6n-5$, n 为正整数

其前 n 项和为 $\frac{1+6n-5}{2} \cdot n = 3n^2 - 2n$

故答案为: $3n^2 - 2n$.

练19

答案: C

解答:

已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是公差为1的等差数列, 其首项分别为 a_1 , b_1 , 且 $a_1 + b_1 = 5$, $a_1, b_1 \in \mathbb{N}^*$

又 $\because c_n = a_{b_n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$\therefore c_1 + c_2 + \cdots + c_{10} = a_{b_1} + a_{b_2} + \cdots + a_{b_{10}} = a_{b_1} + a_{b_1+1} + \cdots + a_{b_1+9}$

又 $\because a_{b_1} = a_1 + (b_1 - 1) = 4$

$\therefore a_{b_1} + a_{b_1+1} + \cdots + a_{b_1+9} = 4 + 5 + 6 + \cdots + 13 = 85$

故选: C.

练20

答案: D

解答:

$$f(x) + f(1-x) = \frac{1}{3^x + \sqrt{3}} + \frac{1}{3^{1-x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{3^x + \sqrt{3}} + \frac{3^x}{3 + \sqrt{3} \times 3^x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

设 $S = f(-12) + f(-11) + f(-10) + \cdots + f(0) + \cdots + f(12) + f(13)$

则 $S = f(13) + f(12) + f(11) + \cdots + f(0) + \cdots + f(-10) + f(-11) + f(-12)$

两式相加, 可得 $2S = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 26$, 即 $S = \frac{13\sqrt{3}}{3}$

故选: D.

练21

答案: $2^n - 1 + \frac{3n^2 + n}{2}$

解答:

当 n 为奇数时, $a_{n+2} = 2a_n$

$\therefore$ 奇数项成等比数列, 首项为1, 公比为2

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1$$

当 n 为偶数时, $a_{n+2} - a_n = 3$

$\therefore$ 偶数项成等差数列, 首项为2, 公差为3

$$\therefore a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = 2n + \frac{n(n-1)}{2} \times 3 = \frac{3n^2 + n}{2}$$

$$S_{2n} = 2^n - 1 + \frac{3n^2 + n}{2}$$

故答案为: $2^n - 1 + \frac{3n^2 + n}{2}$.

练22

答案: A

解答:

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n

$$\because a_n = 2n - 7$$

$$\therefore a_1 = 2 - 7 = -5$$

$$a_n - a_{n-1} = 2n - 7 - 2(n-1) + 7 = 2 \quad (n \geq 2)$$

数列 $\{a_n\}$ 是首项为 -5 , 公差为 2 的递增等差数列当 $n = 4$ 时, $a_4 = 1 > 0$ 即: a_1, a_2, a_3 为负数, 从 a_4 之后都为正数

$$\therefore |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{15}|$$

$$= -(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + \cdots + a_{15})$$

$$= -S_3 + S_{15} - S_3$$

$$= S_{15} - 2S_3$$

$$= 15 \times (-5) + \frac{15 \times 14 \times 2}{2} - 2 \left[3 \times (-5) + \frac{3 \times 2 \times 2}{2} \right]$$

$$= 153$$

故选: A.

练23

解答:

(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 1$)

$$\text{由 } \begin{cases} a_2 + a_4 = 20 \\ a_3 = 8 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a_1 q + a_1 q^3 = 20 \\ a_1 q^2 = 8 \end{cases}, \text{ 解得 } q = 2 \quad (q = \frac{1}{2} \text{ 舍去})$$

$$\text{所以 } a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 2$$

$$\text{所以 } a_n = 2^n$$

$$(2) b_m = 0, m = 2^0 = 1$$

$$b_m = 1, 2^1 \leq m < 2^2$$

$$b_m = 2, 2^2 \leq m < 2^3$$

$$b_m = 3, 2^3 \leq m < 2^4$$

...

$$b_m = n, 2^n \leq m < 2^{n+1}, m \in \mathbf{N}^*$$

$$\text{所以 } S_{100} = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 4 \times 2^4 + 5 \times 2^5 + 6 \times 37 = 480$$

练24

答案: A

解答:

由题意得: $a_n = 2n - 1$

$$\therefore \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} = 1 - \frac{1}{2^n} \text{①}$$

$$\therefore \text{当 } n=1 \text{ 时, } \frac{a_1}{b_1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore b_1 = 2a_1 = 2$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \text{②}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得, } \frac{a_n}{b_n} = 1 - \frac{1}{2^n} - 1 + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

$$\therefore b_n = a_n \cdot 2^n = (2n-1) \cdot 2^n, \quad n \geq 2$$

当 $n=1$ 时, $b_1 = 2$, 符合题意

综上, $b_n = (2n-1) \cdot 2^n$

$$\therefore S_5 = 1 \times 2 + 3 \times 2^2 + \cdots + 9 \times 2^5 \text{③}$$

$$2S_5 = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + 9 \times 2^6 \text{④}$$

$$\text{③} - \text{④} \text{ 得: } -S_5 = 2 - 9 \times 2^6 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 2 \times 2^4 + 2 \times 2^5$$

$$= 2 - 9 \times 2^6 + \frac{2^3 \times (2^4 - 1)}{2 - 1}$$

$$= -454$$

$$\therefore S_5 = 454$$

故选: A.

练25

答案: $\frac{2n}{n+1}$

解答:

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3 = 3$, $S_4 = 10$, $S_4 = 2(a_2 + a_3) = 10$

可得 $a_2 = 2$, 数列的首项为 1, 公差为 1

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{1}{S_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\text{则 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} = 2 \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1}$$

故答案为: $\frac{2n}{n+1}$.

练26

解答:

(I) $\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 前 n 项和为 S_n

$$\therefore S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n^2 - n + na_1$$

$\therefore S_1, S_2, S_4$ 成等比数列

$$\therefore S_2^2 = S_1 \cdot S_4$$

$$\therefore (2^2 - 2 + 2a_1)^2 = a_1 \cdot (4^2 - 4 + 4a_1), \text{ 化为 } (1 + a_1)^2 = a_1(3 + a_1), \text{ 解得 } a_1 = 1$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n-1$$

$$(II) \text{ 由 (I) 可得 } b_n = (-1)^{n-1} \frac{4n}{a_n a_{n+1}}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{4n}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\therefore T_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \cdots + (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } T_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{2n}{2n+1}$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } T_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \cdots - \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{2n+2}{2n+1}$$

$$\therefore T_n = \begin{cases} \frac{2n}{2n+1}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{2n+2}{2n+1}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

第4讲 基础检测卷-数列

练1

答案: B

解答:

因为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_2 = 4$, $S_4 = 20$, 公差为 d

$$\text{所以} \begin{cases} 2a_1 + d = 4 \\ 4a_1 + 6d = 20 \end{cases}$$

解得 $d = 3$

故选: B.

练2

答案: C

解答:

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d

$$\because a_1 = \frac{1}{3}, a_2 + a_5 = 4$$

$$\therefore \frac{1}{3} + d + \frac{1}{3} + 4d = 4, \text{ 即 } \frac{2}{3} + 5d = 4$$

$$\text{解得 } d = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(n-1) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{3}$$

令 $a_n = 33$

$$\text{即 } \frac{2}{3}n - \frac{1}{3} = 33$$

解得 $n = 50$

故选: C.

练3

答案: C

解答:

由于 $q = 2$

$$\therefore S_4 = \frac{a_1(1-2^4)}{1-2} = 15a_1$$

$$\therefore \frac{S_4}{a_2} = \frac{15a_1}{2a_1} = \frac{15}{2}$$

故选: C.

练4

答案: A

解答:

设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 由等差数列的性质可得

$$a_1 + a_9 = 2a_5, \quad a_1 + a_5 = 2a_3$$

$$\text{所以 } \frac{S_9}{S_5} = \frac{\frac{a_1 + a_9}{2} \times 9}{\frac{a_1 + a_5}{2} \times 5} = \frac{9a_5}{5a_3} = \frac{9}{5} \times \frac{5}{9} = 1$$

故选: A.

练5

答案: B

解答:

依题意, $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, 设公比是 q ($q > 0$)

$$\because a_2 a_4 = 1$$

$$\therefore a_3^2 = 1, \quad a_3 = 1$$

$$\text{又} \because S_3 = 7$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 = 7, \text{ 即 } \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 = 7, \text{ 整理得: } 6q^2 - q - 1 = 0$$

$$\text{解得: } q = \frac{1}{2} \text{ 或 } q = -\frac{1}{3} \text{ (舍)}$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{q^2} = 4$$

$$\therefore S_5 = \frac{4 \times \left(1 - \frac{1}{2^5}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{31}{4}$$

故选: B.

练6

答案: 1; 0

解答:

$$\because 2009 = 503 \times 4 - 3$$

$$\therefore a_{2009} = 1$$

$$\because a_{2014} = a_{1007}$$

$$1007 = 252 \times 4 - 1$$

$$\therefore a_{2014} = 0$$

故答案为: 1; 0.

练7

答案：10

解答：

$\therefore$ 等差数列 $\{a_n\}$ 的前9项和等于前4项和， $a_1 = 1$

$$\therefore 9 + 36d = 4 + 6d$$

$$\therefore d = -\frac{1}{6}$$

$$\text{又} \because a_k + a_4 = 0$$

$$\therefore 1 + (k-1)d + 1 + 3d = 0$$

$$\therefore k = 10$$

故答案为：10.

练8

答案：1

解答：

由题意，可知 $a_2^2 = a_1 a_4$

$$\therefore (a_1 + d)^2 = a_1 (a_1 + 3d)$$

$$\text{即 } a_1^2 + 2a_1 d + d^2 = a_1^2 + 3a_1 d$$

$$\therefore d \neq 0$$

$$\therefore a_1 = d$$

$$\therefore \frac{a_1}{d} = 1$$

故答案为：1.

练9

解答：

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d

$\therefore$ 等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = -7$ ， $S_3 = -15$

$$\therefore 3a_1 + 3d = -15, \text{ 解得 } d = 2$$

$$\therefore a_n = -7 + 2(n-1) = 2n - 9$$

(2) $\because a_1 = -7$ ， $d = 2$ ， $a_n = 2n - 9$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}(2n^2 - 16n) = n^2 - 8n = (n-4)^2 - 16$$

当 $n = 4$ 时， S_n 取得最小值 -16

练10

解答:

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $d \neq 0$ 由题意 a_1, a_{11}, a_{13} 成等比数列

$$\therefore a_{11}^2 = a_1 a_{13}$$

$$\therefore (a_1 + 10d)^2 = a_1 (a_1 + 12d), \text{ 化为 } d(2a_1 + 25d) = 0$$

$$\because d \neq 0$$

$$\therefore 2 \times 25 + 25d = 0, \text{ 解得 } d = -2$$

$$\therefore a_n = 25 + (n-1) \times (-2) = -2n + 27$$

(2) 由(1)可得 $a_{3n-2} = -2(3n-2) + 27 = -6n + 31$

可知此数列是以25为首项, -6为公差的等差数列

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= a_1 + a_4 + a_7 + \cdots + a_{3n-2} \\ &= \frac{n(a_1 + a_{3n-2})}{2} = \frac{n(25 - 6n + 31)}{2} \\ &= -3n^2 + 28n \end{aligned}$$

第5讲 中档检测卷-数列

练1

答案: C

解答:

已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_8 = 8$

$\therefore a_1 + a_9 = 8$, 则该数列前9项和 $S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = 36$

故选: C.

练2

答案: C

解答:

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

A. $\because a_1 + a_2 > 0$, $\therefore a_1(1+q) > 0$, 则当 $q < -1$ 时, $a_2 + a_3 = a_1q(1+q) < 0$, 因此不正确;

B. $\because a_1 + a_3 < 0$, $\therefore a_1(1+q^2) < 0$, $\therefore a_1 < 0$. 则 $a_1 + a_2 = a_1(1+q)$ 可能大于等于0或小于0, 因此不正确;

C. $\because 0 < a_1 < a_2$, $\therefore 0 < a_1 < a_1q$, $\therefore a_1 > 0$, $q > 1$. 则 $2a_2 - (a_1 + a_3) = -a_1(1-q)^2 < 0$, 因此正确;

D. $\because a_1 < 0$, 则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) = -a_1^2q(1-q)^2$ 可能小于等于0或大于0, 因此不正确.

故选: C.

练3

答案: C

解答:

设首项为 a_1 , 公差为 d

$$\begin{cases} 5a_1 + 20d = 15 \\ 5a_1 + 25d = 30 \end{cases} \Rightarrow d = 3$$

故选: C.

练4

答案: A

解答:

因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 = 1$, $a_{10} = 3$

所以 $a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 = (a_2 a_9)(a_3 a_8)(a_4 a_7)(a_5 a_6) = (a_1 a_{10})^4 = 3^4 = 81$

故选: A.

练5

答案: D

解答:

由互不相等的实数 a, b, c 成等差数列, 可设 $a = b - d, c = b + d$, 由题设得

$$\begin{cases} b - d + 3b + b + d = 10 \\ (b - d)^2 = b(b + d) \end{cases}$$

$$\text{解方程组得 } \begin{cases} b = 2 \\ d = 6 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} b = 2 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\because d \neq 0$$

$$\therefore b = 2, d = 6$$

$$\therefore a = b - d = -4$$

故选: D.

练6

答案: 8

解答:

由等差数列的性质可得 $a_7 + a_8 + a_9 = 3a_8 > 0$

$$\therefore a_8 > 0$$

$$\text{又 } a_7 + a_{10} = a_8 + a_9 < 0$$

$$\therefore a_9 < 0$$

$\therefore$ 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 8 项为正数, 从第 9 项开始为负数

$\therefore$ 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 8 项和最大

故答案为: 8.

练8

答案: $(-2)^{n-1}$

解答:

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}, \text{ 解得 } a_1 = 1$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = \left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}a_n - \frac{2}{3}a_{n-1}$$

$$\text{整理可得 } \frac{1}{3}a_n = -\frac{2}{3}a_{n-1}, \text{ 即 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = -2$$

故数列 $\{a_n\}$ 从第二项开始是以 -2 为首项, -2 为公比的等比数列

故当 $n \geq 2$ 时, $a_n = (-2)^{n-1}$

经验证当 $n = 1$ 时, 上式也适合

故答案为: $(-2)^{n-1}$.

练9

解答:

$$(1) b_1 = a_2 - a_1 = 1$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n = a_{n+1} - a_n = \frac{a_{n-1} + a_n}{2} - a_n = -\frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) = -\frac{1}{2}b_{n-1}$$

所以 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列

$$(2) \text{ 由 } (1) \text{ 知, } b_n = a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$$

$$= 1 + 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$= 1 + \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 1 + \frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 1 = a_1$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

练10

解答:

$$(1) \text{ 由题知, } S_n \text{ 为数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和, } a_n > 0, a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$$

$$\text{则 } a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} = 4S_{n+1} + 3$$

$$\text{两式相减可得, } a_{n+1}^2 - a_n^2 + 2a_{n+1} - 2a_n = 4a_{n+1}$$

$$\text{整理可得, } a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2(a_{n+1} + a_n)$$

$$\text{又 } a_n > 0, \text{ 则 } a_{n+1} + a_n > 0$$

$$\text{则有 } a_{n+1} - a_n = 2$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } a_1^2 + 2a_1 = 4a_1 + 3, \text{ 解得 } a_1 = 3 \text{ 或 } a_1 = -1 \text{ (舍去)}$$

则数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项, 2 为公差的等差数列

$$\text{则 } a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$$

综上所述, 结论是: 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 1$

$$(2) \text{ 由 (1) 得, } a_n = 2n + 1, \text{ 则 } b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

$$\text{则数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项的和为 } b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{n}{3(2n+3)}$$

综上所述, 结论是: 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和为 $\frac{n}{3(2n+3)}$