

刘秋龙向量四心专项训练



主编：刘秋龙（作业帮金牌名师）

1. 已知点 O, N 在 $\triangle ABC$ 所在的平面内，且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ ， $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \mathbf{0}$ ，

则点 O, N 依次是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 外心，内心
- B. 外心，重心
- C. 重心，外心
- D. 重心，内心

2. 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，则 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知同一平面上的四点 O, A, B, C ，其中任意三点不共线，动点 P 满足：

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right), \lambda \in [0, +\infty), \text{ 则 } P \text{ 的轨迹一定通过 } \triangle ABC \text{ 的 ()}$$

- A. 外心
- B. 内心
- C. 重心
- D. 垂心

4. O 是平面上一点， A, B, C 是该平面上不共线的三个点，一动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ， $\lambda \in (0, +\infty)$ ，则直线 AP 一定经过 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 内心
- B. 外心
- C. 重心
- D. 垂心

5. 已知 O 是平面上的一定点， A, B, C 是平面内不共线的三个点，动点 P 满足

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot \sin B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot \sin C} \right), \lambda \in [0, +\infty), \text{ 则动点 } P \text{ 的轨迹一定通过 } \triangle ABC$$

的 ()

- A. 外心
- B. 内心
- C. 垂心
- D. 重心

6. 已知 O 是平面上的一定点， A, B, C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right), \lambda \in [0, +\infty), \text{ 则动点 } P \text{ 的轨迹一定通过}$$

$\triangle ABC$ 的 ()

- A. 内心
- B. 垂心
- C. 重心
- D. 外心

7. O 是平面上一定点， A, B, C 为平面上不共线的三个点，动点 P 满足

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos \angle ABC} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos \angle BCA} \right), \lambda \in \mathbf{R}, \text{ 则 } P \text{ 的轨迹一定通过 } \triangle ABC$$

的 ()

- A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心

8. 已知 O 是平面 ABC 内的一定点, P 是平面 ABC 内的一动点, $(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}) \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = 0$, 则 O 为 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 内心 B. 外心 C. 重心 D. 垂心

9. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一定点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right)$, $\lambda \in (0, +\infty)$, 则动点 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$

的 ()

- A. 内心 B. 垂心 C. 外心 D. 重心

10. 点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内任一点, $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$, 则点 G 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 重心 B. 内心 C. 垂心 D. 外心

11. 平面内 $\triangle ABC$ 及一点 O 满足 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CB}$, 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 重心 B. 垂心 C. 内心 D. 外心

12. P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 若 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$, 则 P 是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 外心 B. 内心 C. 垂心 D. 重心

13. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在的平面内的一点, 若 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$, 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心

14. 已知 O 是平面上一定点, A, B, C 是平面上不共线的三个点, 若动点 P 满足

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 ()

A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心

15. 设 O 是平面 ABC 内一点, P 是平面 ABC 内一动点, 若 $(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}) \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}) \cdot (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 0$, 则 O 为 $\triangle ABC$ 的 ()

A. 内心 B. 外心 C. 重心 D. 垂心

16. P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 若 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$, 则 P 是 $\triangle ABC$ 的 ()

A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心

17. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且满足 $\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{CA}^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{AB}^2$, 则 O 点一定为 $\triangle ABC$ 的 ()

A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心

18. 已知 O, N, P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内, 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$, $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \mathbf{0}$,

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$, 则点 O, N, P 依次是 $\triangle ABC$ 的 ()

A. 重心, 外心, 垂心
B. 重心, 外心, 内心
C. 外心, 重心, 垂心
D. 外心, 重心, 内心

19. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$, 则 P 点是 $\triangle ABC$ 的_____ (填: “外心”, “内心”, “重心”或“垂心”).

20. 已知 O, N, P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内, 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$, $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \mathbf{0}$,

且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$, 则点 O, N, P 依次是 $\triangle ABC$ 的_____.

①重心, 外心, 垂心; ②重心, 外心, 内心; ③外心, 重心, 垂心; ④外心, 重心, 内心.

答案解析

1. 【解答】在 $\triangle ABC$ 所在的平面内

$$\therefore |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$$

$\therefore$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心

设 D 、 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 三边 AB 、 BC 、 AC 上的中点

$$\therefore \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = 2\overrightarrow{ND} = -\overrightarrow{NC}$$

$\therefore N$ 、 C 、 D 三点共线，即 N 在 $\triangle ABC$ 的中线 CD 上

同理可得， N 在 $\triangle ABC$ 的中线 AE ， BF 上

$\therefore$ 点 N 是 $\triangle ABC$ 的重心

故选：B.

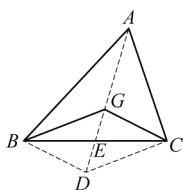
2. 【解答】根据题意画出图形，连接 AG 并延长交 BC 于点 E ，延长 AE 到 D ，使 $GE = ED$

$\therefore G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心

$\therefore E$ 是 BC 边的中点

$$\therefore \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}, \quad \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GA} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GA} = \mathbf{0}$$



故答案为：0.

3. 【解答】 $\therefore \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ ， $\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 表示向量 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AC}$ 方向上的单位向量

$\therefore \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 的方向与 $\angle BAC$ 的角平分线的方向相一致

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$$

$$\text{即 } \overrightarrow{AP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$$

$\therefore \overrightarrow{AP}$ 与 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 共线，即 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\angle BAC$ 的角平分线上

$\therefore$ 角平分线必过三角形的内心

$\therefore P$ 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的内心

故选：B.

4. 【解答】连接 A, B, C 三点，使之成为 $\triangle ABC$

设 BC 的中点为 D ，则 AD 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线

由向量的运算法则可得 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 2\lambda\overrightarrow{AD}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = 2\lambda\overrightarrow{AD}$$

$\therefore A, P, D$ 三点共线

$\therefore$ 直线 AP 一定经过 $\triangle ABC$ 的重心

故选：C.

5. 【解答】由正弦定理得 $|\overrightarrow{AB}| \sin B = |\overrightarrow{AC}| \sin C = t$

所以 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \frac{1}{t}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ，而 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ ， D 为 BC 中点

所以 $\lambda \cdot \frac{1}{t}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ 表示与 $\overrightarrow{AD}$ 共线的向量 $\overrightarrow{AP}$ ，而点 D 是 BC 的中点

即 P 的轨迹一定是通过三角形的重心

故选：D.

6. 【解答】设 BC 的中点为 D

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right)$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right)$$

$$\text{即 } \overrightarrow{DP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right)$$

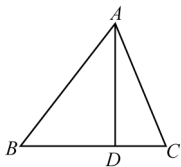
$$\begin{aligned}\text{得 } \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{BC} &= \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right) \\&= \lambda \left[\frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\pi - B)}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos C}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right] \\&= \lambda (-|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BC}|) = 0\end{aligned}$$

$\therefore DP \perp BC$

$\therefore$ 点 P 在 BC 的垂直平分线上，即 P 经过 $\triangle ABC$ 的外心

故选：D.

7. 【解答】如图所示，过点 A 作 $AD \perp BC$ ，垂足为 D 点



$$\text{则 } \overrightarrow{BC} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos \angle ABC} = \frac{|\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{AB}| \cos(\pi - \angle ABC)}{|\overrightarrow{AB}| \cos \angle ABC} = -|\overrightarrow{BC}|$$

$$\text{同理 } \overrightarrow{BC} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos \angle BCA} = |\overrightarrow{BC}|$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos \angle ABC} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos \angle BCA} \right), \lambda \in \mathbf{R}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos \angle ABC} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos \angle BCA} \right), \lambda \in \mathbf{R}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos \angle ABC} + \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos \angle BCA} \right) = \lambda (-|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BC}|) = 0$$

$\therefore \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$

因此 P 点的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的垂心

故选：D.

$$8. \text{【解答】根据题意得： } \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = 0$$

设 D 为 BC 的中点， E 为 AC 的中点

$$\text{则 } \overrightarrow{CB} \cdot 2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AC} \cdot 2\overrightarrow{OE} = 0$$

$$\text{从而 } \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OE} = 0$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{OE}$$

故点 O 是三边中垂线的交点

所以点 O 是外心

故选：B.

$$9. \text{【解答】} \because \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right)$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right)$$

$$\text{即 } \overrightarrow{AP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right)$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{BC} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right) = -|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BC}| = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} \text{ 与 } \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right) \text{ 垂直}$$

$$\text{即 } \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$$

$\therefore$ 点 P 在 BC 的高所在的直线上，即 P 的轨迹过 $\triangle ABC$ 的垂心

故选：B.

$$10. \text{【解答】} \because \overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$$

$$\therefore 3\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

$$\text{取 } AB \text{ 的中点 } D, \text{ 则 } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PD}$$

$$\therefore 3\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

$$\therefore 2\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PG}$$

$$\therefore 2(\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PG}) = \overrightarrow{PG} - \overrightarrow{PC}$$

$$\text{即 } 2\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CG}$$

同理，取 BC 中点 E ，可得 $2\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AG}$

$\therefore G$ 为重心

故选：A.

$$11. \text{【解答】} \because \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}) = 0$$

$$\therefore (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 0$$

$$\therefore |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$$

$$\therefore \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CB}$$

$$\therefore \text{同理得出 } |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OB}|$$

$\therefore$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心

故选：D.

$$12. \text{【解答】} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{PB} \cdot (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

$$\text{同理，} \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

故选：C.

13. 【解答】由题意可知， $\triangle ABC$ 的三个顶点都在以 O 为圆心，半径为 $|\overrightarrow{OA}|$ 的圆上，该圆

就是 $\triangle ABC$ 的外接圆

所以点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心

故选：A.

$$14. \text{【解答】} \because \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}, \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \text{ 分别表示向量 } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ 方向上的单位向量}$$

$$\therefore \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \text{ 的方向与 } \angle BAC \text{ 的角平分线一致}$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$$

$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{AP}$ 的方向与 $\angle BAC$ 的角平分线一致

$\therefore P$ 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的内心

故选：B.

15. 【解答】设 BC 的中点为 D ，由 $(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC})(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 0$

$$\text{得 } \overrightarrow{CB} \cdot 2\overrightarrow{OD} = 0$$

$$\text{即 } \overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{OD}$$

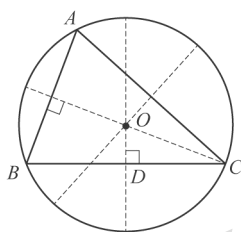
因为 BC 的中点为 D

所以 O 在 BC 的中垂线上，同理，由 $(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA})(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) = 0$ ，得 O

在 AC 的中垂线上

由 $(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB})(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 0$ ，得 O 在 AB 的中垂线上，由外心的性质可知，

O 为 $\triangle ABC$ 的外心



故选：B.

16. 【解答】由 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$

$$\text{得 } \overrightarrow{PB} \cdot (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}) = 0$$

$$\text{即 } \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\therefore PB \perp AC$$

同理 $PA \perp BC$ ， $PC \perp AB$

即 P 是垂心

故选：D.

17. 【解答】 $\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ ， $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$ ， $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$\therefore \text{由 } \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{CA}^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{AB}^2, \text{ 得}$$

$$\overrightarrow{OA}^2 + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 = \overrightarrow{OB}^2 + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})^2 = \overrightarrow{OC}^2 + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2$$

$$\therefore \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\text{即 } \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

则 $OC \perp AB$ ， $OA \perp BC$ ， $OB \perp AC$

$\therefore O$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心

故选：D.

$$18. \text{【解答】} \because |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$$

$\therefore O$ 到 $\triangle ABC$ 的三个顶点的距离相等

$\therefore O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心

$$\therefore \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{NA}$$

$\therefore$ 根据平行四边形法则可得点 N 在 BC 的中线上，同理可得点 N 在 AB ， AC 的中线上

$\therefore$ 点 N 为 $\triangle ABC$ 的重心

$$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} \cdot (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}) = 0, \overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}) = 0, \overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0, \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{AB}$$

$\therefore$ 点 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心

$\therefore$ 点 O ， N ， P 依次是 $\triangle ABC$ 的外心，重心，垂心

故选：C.

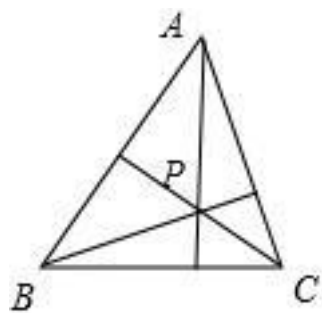
$$19. \text{【解答】} \text{由 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$$

$$\text{得, } \overrightarrow{PB} \cdot (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}) = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

$$\therefore PB \perp CA$$

同理， $PC \perp BA$ ， $PA \perp BC$

如图所示，点 P 为 $\triangle ABC$ 三边的高线交点



$\therefore P$ 为三角形 ABC 的垂心

故答案为：垂心.

20. 【解答】 $\because |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$

$\therefore O$ 到三角形三个顶点的距离相等

$\therefore O$ 是三角形的外心

根据 $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$ 时，得 $-\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}$

由平行四边形法则可得 N 点在 BC 的中线上，同理可得 N 也在 AB ， AC 的中线上，故 N 为 $\triangle ABC$ 的重心

$$\because \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$$

$$\therefore \overrightarrow{PB}(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}) = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{CA}$$

同理得到另外两个向量都与边垂直，得到 P 是三角形的垂心

故答案为：③